

JOËLLE BAILET

**Régularité de la solution d'un problème mêlé dans  
un domaine polygonal ou polyédral**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 5, n<sup>o</sup> 1  
(1996), p. 5-27

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1996\\_6\\_5\\_1\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_5_0)

© Université Paul Sabatier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral<sup>(\*)</sup>

JOËLLE BAILET<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous montrons la régularité  $H^s(\Omega)$  pour tout  $s < 1 + \pi/2\omega$  de la solution d'un problème aux limites elliptiques avec conditions mêlées de type Dirichlet-graphe maximal monotone au voisinage d'un angle non convexe d'ouverture  $\omega$ . Le même résultat est obtenu au voisinage d'une arête dans un ouvert polyédral de  $\mathbb{R}^3$ .

**ABSTRACT.** — We prove a regularity result in  $H^s(\Omega)$  for every  $s < 1 + \pi/2\omega$  for the solution of an elliptic boundary value problem with mixed boundary condition : Dirichlet-maximal monotone graph near a non convex angle of measure  $\omega$ . The same result is proved near the vertices of a polyedral open set in  $\mathbb{R}^3$ .

---

### 1. Introduction

#### 1.1 Le problème en dimension 2

Soit  $\Omega$  un ouvert plan polygonal de frontière

$$\Gamma = \left( \bigcup_{i \in D} \Gamma_i \right) \cup \left( \bigcup_{j \in G} \Gamma_j \right), \quad D \cup G = [1, N].$$

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & (\Omega) \\ u = 0 & (\Gamma_i), i \in D \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu_j} \in \beta_j(u) & (\Gamma_j), j \in G \end{cases} \quad (\text{P})$$

---

(\*) Reçu le 2 novembre 1993

(1) Département de Mathématiques, 22, B.P. 582, Abidjan (Cote d'Ivoire)  
 Adresse actuelle : Mission française de Coopération et d'Action Culturelle  
 B.P. 2175, Brazzaville (Congo)

$\partial/\partial\nu_j$  désigne la dérivée normale à  $\Gamma_j$ , orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ . Pour tout  $j \in G$ ,  $\beta_j : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  est un graphe maximal monotone (Brézis [3]) différent de celui correspondant à la condition de Dirichlet (à savoir  $\beta(0) = \mathbb{R}, \beta(t) = \emptyset$  si  $t \neq 0$ ).  $S_i = (\bar{\Gamma}_i) \cap (\bar{\Gamma}_{j+1})$  est un sommet de  $\Omega$  et on note par  $\omega_i$  la mesure de l'angle intérieur à  $\Omega_i$  au point  $S_i$ .

Il est bien connu que ce problème admet une unique solution variationnelle dans  $H^1(\Omega)$  et que de plus à l'intérieur de  $\Omega$  la solution a la régularité  $H^2$ . La régularité de  $u$  dépend donc de sa régularité au voisinage des sommets du polygone. On s'intéressera plus précisément ici à la régularité de la solution au voisinage d'un sommet  $S_i$ , dont l'angle  $\omega_i$  est non convexe ( $\omega_i > \pi$ ) avec des conditions aux limites de type mêlées (en  $S_i$ ,  $\Gamma_i$  est tel que  $i \in D$ ,  $\Gamma_{i+1}$  est tel que  $i+1 \in G$ ). La contrainte  $\pi/\omega < 1$  permettra d'obtenir l'inclusion  $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega) \subset W_{-\pi/2\omega}^{1,2}(\Omega)$ , il sera alors licite d'appliquer la proposition 2.1 à  $u$ .

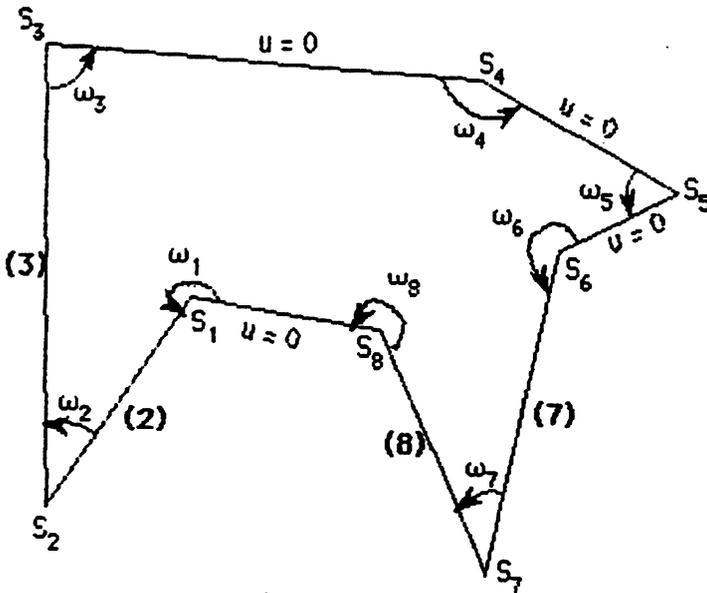


Fig. 1

$$\begin{array}{ll}
 (2) & -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_2(u) & (7) & -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_7(u) \\
 (3) & -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_3(u) & (8) & -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_8(u)
 \end{array}$$

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

Pour les autres sommets du polygone ne rentrant pas dans ce cadre on supposera qu'on a la régularité  $H^2$ , il suffit pour cela que  $\omega_i \leq \pi$  si  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont tels que  $i$  et  $i+1$  appartiennent à  $D$  ou bien  $\omega_i \leq \pi/2$  si  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_{i+1}$  sont tels que  $i$  et  $i+1$  appartiennent à  $G$ .

En posant

$$\omega = \max_{i \in [1, N]} \{ \omega_i \mid \omega_i > \pi \}$$

on a

$$L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \int_{\Omega} |r^{-\pi/2\omega} f|^2 r dr d\theta < +\infty \right\}$$

$r, \theta$  désignant les coordonnées polaires, on prouvera le résultat suivant.

**THÉORÈME 1.1.** — *Pour tout  $f$  dans  $L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega)$  la solution  $u$  de (P) appartient à  $H^s(\Omega)$  pour tout  $s < 1 + \pi/2\omega$ .*

Dans le cas où  $\beta_{i+1}$  est le graphe correspondant à la condition de Neumann ( $\beta(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ ) (problème mêlé Dirichlet–Neumann), la solution a la régularité  $H^{1+(\pi/2\omega)}$  (Grisvard [1]).

Dans le cas où  $\beta_{i+1}$  est le graphe correspondant à la condition aux limites de Signorini ( $\beta(t) = \emptyset$  si  $t < 0, \beta(0) = ] - \infty, 0[, \beta(t) = 0$  si  $t > 0$ ) (problème mêlé Dirichlet–Signorini), la solution a encore la régularité  $H^{1+(\pi/2\omega)}$  (Moussaoui [5]).

Le résultat démontré pour  $\pi \leq \omega \leq 2\pi$  est donc le meilleur possible.

Compte tenu des inclusions des espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]) on a :

$$L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^2_{-(\pi/2\omega)+1}(\Omega)$$

grâce aux théorèmes d'immersion des espaces de Sobolev on déduit le résultat suivant.

**PROPOSITION 1.1.** — *Pour tout  $f$  dans  $L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega)$  la solution  $u$  de (P) appartient à l'espace de Hölder  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  pour tout  $\alpha < \pi/2\omega$ .*

### 1.2 Le problème en dimension 3

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de la forme  $\Omega \times ]0, h[$  où  $\Omega$  est un ouvert polygonal du même type que celui considéré en dimension 2 et

$$\Gamma = \left( \bigcup_{i \in D} \Gamma_i \right) \cup \left( \bigcup_{j \in G} \Gamma_j \right)$$

la frontière de  $\Omega$ .

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & (\mathcal{O} = \Omega \times ]0, h[) \\ u = 0 & (\mathcal{G}_i = \Gamma_i \times ]0, h[ \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}), i \in D \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu_j} \in \beta_j(u) & (\mathcal{G}_j = \Gamma_j \times ]0, h[), j \in G. \end{cases} \quad (\text{P})$$

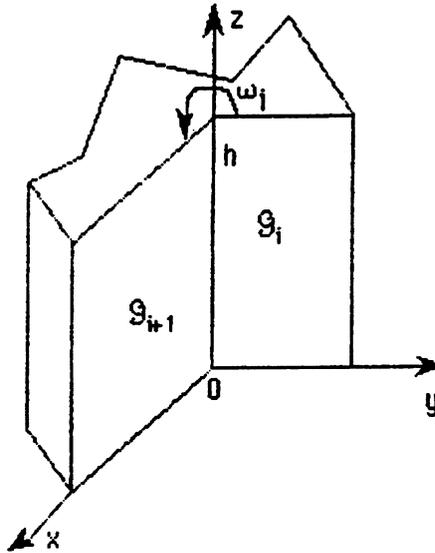


Fig. 2

On s'intéresse aux dièdres non convexes du polyèdre ( $\omega_i > \pi$ ) et on suppose que sur les faces de ces dièdres les conditions aux limites sont mêlées :  $\mathcal{G}_i$  est tel que  $i \in D$ ,  $\mathcal{G}_{i+1}$  est tel que  $i+1 \in G$ ,  $\beta_j$  est un graphe maximal monotone distinct du graphe correspondant à la condition aux limites de Dirichlet comme dans le cas de la dimension 2.

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

Au voisinage des autres arêtes du polyèdre, on suppose qu'on a la régularité  $H^2$  de la solution variationnelle  $u$  de (P) de la même manière qu'en dimension 2.

On prouvera le résultat suivant, où  $\omega = \max_{i \in [1, N]} \{\omega_i \mid \omega_i > \pi\}$ .

THÉORÈME 1.2. — *Pour tout  $f \in L^2(\cdot)1, h[\cdot, L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega))$ , la solution  $u$  de (P) appartient à  $H^s(\mathcal{O})$ , pour tout  $s < 1 + (\pi/2\omega)$ .*

## 2. Inégalités de type Poincaré

### 2.1 Inégalité de type Poincaré dans un secteur angulaire

Soit

$$\Sigma = \{(r, \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \omega\}$$

et

$$\Gamma' = \{(r, \theta) \mid r = R \text{ ou } \theta = 0\}, \quad \Gamma = \partial\Sigma.$$

Soit

$$W^1_{\alpha/2}(\Sigma) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Sigma) \mid \int_{\Sigma} u^2 r^{\alpha} dx < +\infty \text{ et } \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 r^{\alpha} dx < +\infty \right\}.$$

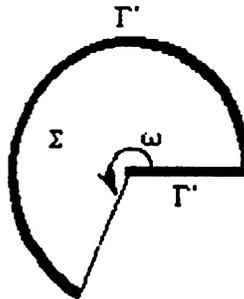


Fig. 3

PROPOSITION 2.1. — Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$ . Pour tout

$$u \in \mathcal{V} = \{v \in W_{\alpha/2}^1(\Sigma) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma'\}$$

on a :

$$\int_{\Sigma} u^2 r^{\alpha-2} dx \leq \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)} \int_{\Sigma} |\nabla u|^2 r^{\alpha} dx.$$

*Démonstration.* — Par densité il suffit de démontrer cette relation pour des fonctions de  $\mathcal{C}^2(\overline{\Sigma})$  (Avantaggiati [4]).

Considérons la forme bilinéaire continue et coercitive sur  $\mathcal{V}$  :

$$a(u, v) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\nabla} u \cdot \overrightarrow{\nabla} v r^{\alpha} dx.$$

Compte tenu de la formule du Min-Max (Dautray–Lions [6]), trouver la meilleure constante telle que l'inégalité annoncée ait lieu est équivalent à trouver la première valeur propre non nulle du problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^{\alpha-2}} \operatorname{div}(r^{\alpha}(\overrightarrow{\nabla} u)) = \lambda u & (\Sigma) \\ u = 0 & (\Gamma') \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (\Gamma/\Gamma'). \end{cases}$$

En coordonnées polaires

$$\frac{1}{r^{\alpha-2}} \operatorname{div}(r^{\alpha}(\overrightarrow{\nabla} u)) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\alpha + 1)r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Considérons l'opérateur :

$$\begin{aligned} \Lambda : H^2(]0, \omega[) &\longrightarrow L^2(]0, \omega[) \\ \varphi &\longrightarrow -\varphi'' \end{aligned}$$

de domaine

$$D(\Lambda) = \{\varphi \in H^2(]0, \omega[) \mid \varphi(0) = 0, \varphi'(\omega) = 0\}.$$

Les fonctions

$$\varphi_k(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} \theta, \quad k \in \mathbb{N},$$

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

forment un système orthonormé de  $L^2(]0, \omega[)$  qui diagonalise  $\Lambda$ , les valeurs propres correspondantes étant

$$\lambda_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\omega^2}.$$

En développant  $v$  selon cette base  $v(r, \theta) = \sum_k v_k(r) \varphi_k(\theta)$ , et grâce à l'identité de Bessel :

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |v(r, \theta)|^2 d\theta &= \sum_k |v_k(r)|^2 \\ \int_0^\omega |\nabla v(r, \theta)|^2 d\theta &= \int_0^\omega \left( \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 \right) d\theta \\ &= \sum_k \left( |v'_k(r)|^2 + \frac{1}{r^2} \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\omega^2} |v_k(r)|^2 \right) \\ \int_0^R \int_0^\omega |\nabla v(r, \theta)|^2 r^\alpha d\theta r dr &\geq \sum_k \int_0^R r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \sum_k \int_0^R r^{\alpha-2} |v_k(r)|^2 r dr. \end{aligned}$$

Si  $v_k(0) = 0$ ,  $\alpha < 0$  en appliquant une inégalité de Hardy à chaque  $v_k$  (Kondratiev [2]) :

$$\int_0^R r^{\alpha-2} |v_k(r)|^2 r dr \leq \frac{4}{\alpha^2} \int_0^R r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\omega |\nabla v(r, \theta)|^2 r^\alpha d\theta r dr &\geq \frac{\alpha^2}{4} \sum_k \int_0^R r^{\alpha-2} |v_k(r)|^2 r dr + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \sum_k \int_0^R r^{\alpha-2} |v_k(r)|^2 r dr ; \end{aligned}$$

finalement

$$\int_\Sigma r^{\alpha-2} |v(r, \theta)|^2 dx \leq \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)} \int_\Sigma r^\alpha |\nabla v(r, \theta)|^2 dx.$$

Il reste à démontrer que  $v_k(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^\alpha dx < +\infty &\implies \sum_k \int_0^R r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr < +\infty \\ &\implies \int_0^R r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr < +\infty. \end{aligned}$$

En écrivant  $v_k(t) = \int_0^t v'_k(r) dr$ , alors

$$\begin{aligned} |v_k(t_1) - v_k(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} v'_k(r) dr \right| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} r^{(\alpha+1)/2} |v'_k(r)| r^{-(\alpha+1)/2} dr \\ &\leq \left( \int_{t_1}^{t_2} r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_1}^{t_2} r^{-(\alpha+1)} dr \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \frac{t_2^{-\alpha} - t_1^{-\alpha}}{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_1}^{t_2} r^\alpha |v'_k(r)|^2 r dr \right) \end{aligned}$$

sachant que  $\alpha < 0, |t_1 - t_2| \rightarrow 0 \Rightarrow |v_k(t_1) - v_k(t_2)| \rightarrow 0$  et la continuité de  $v_k(t)$  sur  $[0, +\infty[$  résulte du critère de Cauchy.

Si  $v_k(0) \neq 0$ , de la continuité de  $v_k$  en zéro on déduit l'existence d'un  $\eta > 0$  tel que  $\forall r \in [0, \eta]$

$$|v_k(r)| \geq \frac{1}{2} |v_k(0)|$$

et

$$\int_0^\eta r^{\alpha-2} |v_k(r)|^2 r dr \geq \left( \frac{1}{2} |v_k(0)| \right)^2 \int_0^\eta r^{\alpha-1} dr = +\infty \quad \text{car } \alpha < 0,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

## 2.2 Inégalité dans un dièdre de $\mathbb{R}^3$

En coordonnées cylindriques, soit :

$$S = \{(r, \theta, z) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \omega, 0 < z < h\},$$

$$S = \Sigma \times ]0, h[, \quad G' = \Gamma' \times ]0, h[,$$

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}'(G) \mid \text{pour tout } z \in ]0, h[, u(r, \theta, z) \in W_{\alpha/2}^1(\Sigma)\}.$$

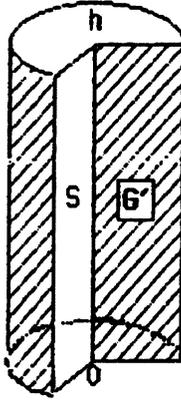


Fig. 4

**PROPOSITION 2.2.** — Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$ . Pour tout  $u \in H^1(S)$  tel que pour chaque  $z \in ]0, h[$ ,  $u(r, \theta, z) \in \mathcal{V}$ , on a :

$$\int_S u^2 r^{\alpha-2} dx \leq \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)} \int_S |\nabla u|^2 r^\alpha dx.$$

*Démonstration.* — Le résultat est évident.

### 3. Le problème en dimension 2

*Le problème approché*

Soit

$$\beta_{j,\lambda} = \frac{1}{\lambda} (\text{id} + \lambda \beta_j)^{-1}, \quad \lambda > 0,$$

les régularisées de Yosida du graphe  $\beta_j$  (Brézis [3]). Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\beta_{j,\lambda}$  est une fonction lipschitzienne croissante telle que  $\beta_{j,\lambda}(0) = 0$ .

Le problème approché :

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda + u_\lambda = f & (\Omega) \\ u_\lambda = 0 & (\Gamma_i) \\ -\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \beta_{j,\lambda}(u_\lambda) & (\Gamma_j) \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\lambda)$$

admet une unique solution variationnelle  $u_\lambda$  dans  $H^1(\Omega)$ .

#### 3.1 Régularité de la solution $u_\lambda$ de $(\mathbf{P}_\lambda)$

Pour pouvoir appliquer la proposition 2.1 à  $u_\lambda$  il est nécessaire d'avoir un peu plus de régularité sur celle-ci.

$(\mathbf{P}_\lambda)$  est un problème de type mêlé non homogène et sachant que  $u_\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_j)$  et  $\beta_{j,\lambda}$  est lipschitzienne,  $\beta_{j,\lambda}(u_\lambda) \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ .

Le polygone présente deux types de sommets :

- les sommets près desquels l'ouvert est non convexe; les conditions aux limites sont telles que les conditions de "raccord faible" (Grisvard [1]) sont satisfaites, en effet la condition :

$$\int_0^{\delta_j} \frac{|\beta_{j,\lambda}(u_\lambda(x_j(\sigma))) - \beta_{j+1,\lambda}(u_\lambda(x_j(-\sigma)))|^2}{\sigma} d\sigma < +\infty \text{ pour } 1 \leq j \leq N$$

devient

$$\int_0^{\delta_j} \frac{|\beta_{j,\lambda}(u_\lambda(x_j(\sigma)))|^2}{\sigma} d\sigma < +\infty \text{ pour } 1 \leq j \leq N$$

car sur  $\Gamma_{j+1}$  on a  $u_\lambda = 0$ ; ce qui exprime seulement que  $\beta_{j,\lambda}(u_\lambda) \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ ;

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

- les sommets près desquels les conditions aux limites ne sont pas du type Dirichlet-graphe; l'angle est tel que la régularité  $H^2$  est assurée.

Loin des sommets il est bien connu que  $u_\lambda$  a la régularité  $H^2$ . Au voisinage  $V_i$  d'un sommet  $S_i$  d'angle  $\omega_i$  où le problème est mêlé, la solution  $u_\lambda$  a une partie singulière qui est de la forme :

- si  $\omega_i \in ]\pi, 2\pi] \setminus \{3\pi/2\}$ ,

$$r^{\pi/2\omega_i} \cos \frac{\pi}{2\omega_i} \theta + r^{3\pi/2\omega_i} \cos \frac{3\pi}{2\omega_i} \theta \in H^{1+(\pi/2\omega_i)-\varepsilon}(V_i), \quad \varepsilon > 0;$$

- si  $\omega_i = 3\pi/2$ ,

$$r\{\log r \cos \theta - \theta \sin \theta\} \in H^{2-\varepsilon}(V_i), \quad \varepsilon > 0.$$

Étant donné qu'on a supposé que  $\omega_i \leq \pi$  si  $j$  et  $j+1 \in \mathcal{D}$ , ou  $\omega_i \leq \pi/2$  si  $j$  et  $j+1 \in \mathcal{N}$  de telle sorte que  $u_\lambda \in H^2$  au voisinage de ces sommets, et en appelant  $\omega = \max \omega_i$ , on a au moins  $u_\lambda \in H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)$ .

En utilisant les inclusions des espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]) :

$$H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega) \subset W_{-\pi/2\omega}^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \int_{\Omega} |\nabla u|^2 r^{-\pi/\omega} dx < +\infty, \int_{\Omega} |u|^2 r^{-\pi/\omega} dx < +\infty \right\}.$$

### 3.2 Estimations sur $u_\lambda$

Soit  $S$  un des sommets de  $\Omega$ . Quitte à faire une translation et une rotation, ce qui laisse le problème invariant, on peut supposer que  $S$  est à l'origine des coordonnées et que au voisinage de  $S$ ,  $\Omega$  est inclus dans un secteur angulaire d'ouverture  $\omega$ .  $\varphi$  étant une fonction de troncature convenable,  $v_\lambda = \varphi(r)u_\lambda$  est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda + v_\lambda = g & (\Sigma) \\ v_\lambda = 0 & (\Gamma_1 \cup \Gamma_0) \\ -\frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} = \varphi \beta_\lambda(u_\lambda) & (\Gamma_2) \end{cases}$$

où

$$g = \varphi f + \left( \varphi''(r) + \frac{1}{2} \varphi'(r) \right) u_\lambda + 2\varphi'(r) \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \in L^2$$

car  $u_\lambda \in H^1$ ,

$$\Sigma = \{(r, \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \omega\}$$

$$\Gamma_0 = \{(r, \theta) \mid r = R, 0 \leq \theta \leq \omega\}$$

$$\Gamma_1 = \{(r, \theta) \mid \theta = 0, 0 < r < R\}$$

$$\Gamma_2 = \{(r, \theta) \mid \theta = \omega, 0 < r < R\}.$$

*Premières estimations*

Par souci de clarté nous omettrons l'indice  $\lambda$  pour  $u$  et  $v$ . En multipliant l'équation par  $r^\alpha v$  et en intégrant sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (-\Delta v + v) v r^\alpha \, dx &= \int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^\alpha \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 \Delta r^\alpha \, dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial r^\alpha}{\partial \nu} v^2 \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} \varphi^2 \beta_\lambda(u) u r^\alpha \, d\sigma \\ &+ \int_{\Sigma} v^2 r^\alpha \, dx, \end{aligned}$$

or

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial r^\alpha}{\partial \nu} v^2 \, d\sigma = 0$$

et  $\beta_\lambda$  étant une fonction croissante telle que  $\beta_\lambda(0) = 0$ ,

$$\int_{\Gamma_2} \varphi^2 \beta_\lambda(u) u \, d\sigma \geq 0;$$

d'autre part,  $\Delta r^\alpha = \alpha^2 r^{\alpha-2}$ . Finalement

$$\int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^\alpha \, dx - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\Sigma} v^2 r^{\alpha-2} \, dx + \int_{\Sigma} v^2 r^\alpha \, dx \leq \int_{\Sigma} g v r^\alpha \, dx.$$

En utilisant la proposition 2.1 (ce qui est possible si  $\alpha \geq -\pi/\omega$ ), on obtient :

$$\left(1 - \frac{4}{\alpha^2 + \pi^2/\omega^2} \frac{\alpha^2}{2}\right) \int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^\alpha \, dx + \int_{\Sigma} v^2 r^\alpha \, dx \leq \int_{\Sigma} g v r^\alpha \, dx.$$

$$1 - \frac{4}{\alpha^2 + \pi^2/\omega^2} \frac{\alpha^2}{2} > 0 \iff |\alpha| < \frac{\pi}{\omega}.$$

Sous cette contrainte pour  $\alpha$ , on obtient :

$$\int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^\alpha dx \leq C_1(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^\alpha dx \quad (3.1)$$

$$\int_{\Sigma} v^2 r^\alpha dx \leq C_2(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^\alpha dx \quad (3.2)$$

et en utilisant de nouveau la proposition 2.1

$$\int_{\Sigma} v^2 r^{\alpha-2} dx \leq C_3(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^\alpha dx, \quad (3.3)$$

$C_1, C_2, C_3$  sont des constantes ne dépendant que de  $\alpha$  et de  $\omega$  (et non de  $\lambda$ ).

### Quotients différentiels radiaux

Nous allons maintenant utiliser une technique de quotients différentiels adaptée à la géométrie de l'ouvert.

Posons

$$v_h = \frac{v(re^h, \theta) - v(r, \theta)}{h},$$

$v_h$  est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_h + v_h = \frac{1}{r^2} \frac{r^2 e^{2h} g(re^h, \theta) - r^2 g(r, \theta)}{h} \\ \quad = \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h \quad (\Sigma) \\ v_h(r, 0) = \frac{v(re^h, 0) - v(r, 0)}{h} = 0 \quad (\Gamma_1) \quad (P_{\lambda, k}) \\ v_h(R, \theta) = \frac{\varphi(Re^h)u(Re^h, \theta) - \varphi(R)u(R, \theta)}{h} = 0 \quad (\Gamma_0) \\ -\frac{\partial v_h}{\partial \nu} = \varphi(r) \frac{\beta_\lambda(u(re^h, \theta)) - \beta_\lambda(u(r, \theta))}{h} \quad (\Gamma_2). \end{array} \right.$$

- La condition aux limites sur  $\Gamma_2$  pour  $v_h$  étant de nature différente de la condition aux limites sur  $\Gamma_2$  pour  $v$  (ou  $u$ ) on est amené à calculer de nouveau le produit

$$\int_{\Sigma} (-\Delta v_h + v_h) v_h r^\alpha dx$$

et en tenant compte des conditions aux limites on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} (-\Delta v_h + v_h) v_h r^\alpha \, dx = \\ & = \int_{\Sigma} |\nabla v_h|^2 r^\alpha \, dx - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\Sigma} v_h^2 r^{\alpha-2} \, dx + \int_{\Sigma} v_h^2 r^\alpha \, dx + \\ & \quad + \frac{1}{h^2} \int_{\Gamma_2} \varphi^2(r) \left( \beta_\lambda(u(re^h, \omega)) - \beta_\lambda(u(r, \omega)) \right) (u(re^h, \omega) - u(r, \omega)) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale de bord est positive pour tout graphe monotone  $\beta$ , en effet si  $\beta_\lambda$  est son approchante de Yosida, on a :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (\beta_\lambda(s) - \beta_\lambda(t))(s - t) \geq 0.$$

D'autre part,  $v_h$  appartenant à  $H^1(\Sigma)$  (puisque  $v \in H^1(\Sigma)$ ) et vérifiant  $v_h = 0$  sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ , on peut lui appliquer la proposition 2.1; d'où, avec  $|a| < \pi/\omega$  :

$$C_4(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} |\nabla v_h|^2 r^\alpha \, dx + \int_{\Sigma} v_h^2 r^\alpha \, dx \leq \int_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h v_h r^\alpha \, dx \quad (3.4)$$

où  $C_4(\alpha, \omega)$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $\lambda$ .

• Nous allons maintenant chercher une majoration de la norme de  $(1/r^2)(r^2 g)_h$  indépendante de  $h$ .

Par densité, il suffit de considérer le cas où  $g \in \mathcal{D}(\overline{\Sigma})$ . Posons  $\gamma(t) = e^{2th} g(re^{th}, \theta)$  alors

$$\gamma'(t) = 2h e^{2th} g(re^{th}, \theta) + r h e^{3th} \frac{\partial g}{\partial r}(re^{th}, \theta),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h &= \frac{e^{2h} g(re^h, \theta) - g(r, \theta)}{h} = \frac{\gamma(1) - \gamma(0)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \left( 2 e^{2th} g(re^{th}, \theta) + r e^{3th} \frac{\partial g}{\partial r}(re^{th}, \theta) \right) \, dt. \end{aligned}$$

Soit  $w \in \mathcal{D}(\overline{\Sigma})$ , on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h w r^\alpha \, dx \right| = \\ & = \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 \left( 2 e^{2th} g(re^{th}, \theta) + r e^{3th} \frac{\partial g}{\partial r}(re^{th}, \theta) \right) w r^\alpha \, dt \, dx \right| \\ & \leq 2 \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 e^{2th} g(re^{th}, \theta) w(r, \theta) r^\alpha \, dx \, dt \right| + \\ & \quad + \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 r e^{3th} \frac{\partial g}{\partial r}(re^{th}, \theta) w(r, \theta) r^\alpha \, dx \, dt \right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 e^{2th} g(re^{th}, \theta) w(r, \theta) r^{\alpha} dx dt \right| \leq \\ & \leq \left( \int_{\Sigma} \int_0^1 |r^{(\alpha/2)+1} e^{2th} g(re^{th}, \theta)|^2 r dr d\theta dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left( \int_{\Sigma} \int_0^1 |r^{(\alpha/2)-1} w(r, \theta)|^2 r dr d\theta dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Posons  $\rho = re^{th}$  dans la première intégrale du produit. Ce changement de variable laisse globalement invariant le secteur  $\Sigma$  d'où :

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \int_0^1 |r^{(\alpha/2)+1} e^{2th} g(re^{th}, \theta)|^2 r dr d\theta dt = \\ & = \int_0^1 e^{-\alpha th} \int_{\Sigma_h} |\rho^{(\alpha/2)+1} g(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho dt \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 e^{2th} g(re^{th}, \theta) w(r, \theta) r^{\alpha} dx dt \right| \leq \\ & \leq \text{Sup}(1, e^{-\alpha R}) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)} \|r^{(\alpha/2)-1} w\|_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

- En utilisant le même changement de variables que précédemment :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} \int_0^1 r e^{3th} \frac{\partial g}{\partial r}(re^{th}, \theta) w(r, \theta) r^{\alpha} dx dt \right| = \\ & = \left| \int_{\Sigma_h} \int_0^1 \rho \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) w(\rho e^{-th}, \theta) e^{-\alpha th} \rho^{\alpha} \rho d\rho d\theta dt \right| \\ & = \left| - \int_{\Sigma_h} \int_0^1 e^{-\alpha th} \left( (\alpha + 1) \rho^{\alpha} w(\rho e^{-th}, \theta) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho^{\alpha+1} \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho e^{-th}, \theta) e^{-th} \right) g(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_h} \int_0^1 \nu_{\rho} e^{-\alpha th} \rho^{\alpha+1} w(\rho e^{-th}, \theta) g(\rho, \theta) d\sigma dt \right| \end{aligned}$$

sur  $\Gamma_{0,h}$ ,  $g(\rho, \theta) = 0$  à cause de la fonction de troncature  $\varphi(r)$ ; sur  $\Gamma_{1,h}$  et  $\Gamma_{2,h}$ ,  $\nu_\rho = 0$ ; l'intégrale de bord est donc nulle. Majorons chacune des deux intégrales sur  $\Sigma_h$  :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma_h} \int_0^1 e^{-\alpha th} \rho^\alpha w(\rho e^{-th}, \theta) g(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right| \leq \\ & \leq \left( \int_{\Sigma_h} \int_0^1 |e^{-\alpha th} \rho^{(\alpha/2)-1} w(\rho e^{-th}, \theta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left( \int_{\Sigma_h} \int_0^1 |\rho^{(\alpha/2)+1} g(\rho, \theta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variables inverse dans le premier terme du produit :

$$\leq \text{Sup}(1, e^{-\alpha R}) \|r^{(\alpha/2)-1} w\|_{L^2(\Sigma)} \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)}.$$

De la même façon

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma_h} \int_0^1 e^{-(\alpha+1)th} \rho^{\alpha+1} \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho e^{-th}, \theta) g(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right| \leq \\ & \leq \left( \int_{\Sigma_h} \int_0^1 \left| e^{-(\alpha+1)th} \rho^{\alpha/2} \frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho e^{-th}, \theta) \right|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \quad \times \left( \int_{\Sigma_h} \int_0^1 |\rho^{\alpha+2} g(\rho, \theta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \text{Sup}(1, e^{-\alpha R}) \|r^{\alpha/2} \nabla w\|_{L^2(\Sigma)} \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Par densité, on peut appliquer le calcul précédent à  $v_h$ ; on obtient en regroupant les différentes majorations obtenues :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h v_h r^\alpha \, dx \right| \leq \\ & \leq \text{Sup}(1, e^{-\alpha R}) \left\{ (\alpha + 3) \|r^{(\alpha/2)-1} v_h\|_{L^2(\Sigma)} + \|r^{\alpha/2} \nabla v_h\|_{L^2(\Sigma)} \right\} \times \\ & \quad \times \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

Enfin en appliquant la proposition 2.1 à  $v_h$ , on obtient :

$$\left| \int_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (r^2 g)_h v_h r^\alpha dx \right| \leq K(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} \nabla v_h\|_{L^2(\Sigma)} \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)} \quad (3.5)$$

où

$$K(\alpha, \omega) = \text{Sup}(1, e^{-\alpha R}) \left( \frac{4}{\alpha^2 + \pi^2/\omega^2} (\alpha + 3) + 1 \right)$$

est indépendante de  $h$  et  $\lambda$ .

En reportant (3.5) dans (3.4), on obtient :

$$\|r^{\alpha/2} \nabla v_h\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha, \omega) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)} \quad (3.6)$$

où  $C_5(\alpha, \omega)$  est indépendante de  $h$  et  $\lambda$ .

Sachant que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (v(re^h, \theta) - v(r, \theta)) = r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta),$$

quitte à extraire une sous-suite par rapport à  $h$  et compte tenu de l'unicité de la solution de  $(P_{\lambda, h})$  on en déduit que :

$$r^{\alpha/2} \nabla \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \in L^2(\Sigma)$$

d'où

$$r^{\alpha/2} \left( r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \in L^2(\Sigma) \quad \text{et} \quad r^{\alpha/2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \in L^2(\Sigma);$$

sachant que  $r^{\alpha/2} \partial v / \partial r \in L^2(\Sigma)$ , on obtient finalement :

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha, \omega) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)}$$

et

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r \partial \theta} \right) \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha, \omega) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Revenant à l'équation et en utilisant les majorations précédentes :

$$\begin{aligned} r^{(\alpha/2)+1} g \in L^2(\Sigma) &\implies r^{(\alpha/2)+1} (-\Delta v + v) \in L^2(\Sigma) \\ &\implies \left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_6(\alpha, \omega) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\Sigma)} \end{aligned}$$

où  $C_5$  et  $C_6$  ne dépendent que de  $\alpha$  et de  $\omega$ .

### 3.3 Espaces de Sobolev avec poids

En regroupant les différentes majorations obtenues :

$$v \in \overset{\circ}{W}_{(\alpha/2)+1}^{2,2}(\Sigma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Sigma) \mid r^{(\alpha/2)-1}u \in L^2(\Sigma), r^{\alpha/2}\nabla u \in L^2(\Sigma), r^{(\alpha/2)+1}D^2u \in L^2(\Sigma)\}$$

et

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}_{(\alpha/2)+1}^{2,2}(\Sigma)} \leq C(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2}g\|_{L^2(\Sigma)} ;$$

or compte tenu des théorèmes d'immersion dans les espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]),

$$\overset{\circ}{W}_{(\alpha/2)+1}^{2,2}(\Sigma) \hookrightarrow H^{1-\alpha/2}(\Sigma),$$

on avait comme contrainte  $|\alpha| < \pi/\omega$  d'où

$$\|v\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Sigma)} \leq C \|r^{-\pi/2\omega}g\|_{L^2(\Sigma)}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\omega$ .

### 3.4 Passage à la limite en $\lambda$

En appelant  $\omega$  le plus grand des angles de l'ouvert, on obtient pour  $u_\lambda$  la majoration

$$\|u_\lambda\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)} \leq \{\text{constante indépendante de } \lambda\}.$$

Quitte à extraire une sous-suite  $u_{\lambda_j}$  :

$$u_{\lambda_j} \xrightarrow[\lambda_j \rightarrow 0]{} v \text{ faiblement dans } H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega), \text{ fortement dans } H^1(\Omega).$$

Par ailleurs (Brézis [3]) :

- $u_{\lambda_j} = \underset{W}{\text{Min}} \varphi_\lambda(v)$  où

$$\varphi_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |j_\lambda(v)| d\sigma$$

avec  $\partial j_\lambda = \alpha_\lambda$ ,  $W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{\Gamma_1} = 0\}$  et  $u_{\lambda_j}$  est l'unique solution de  $(P_\lambda)$ ;

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

- $u = \underset{W}{\text{Min}} \varphi(v)$  où

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Gamma_2} j(v) d\sigma$$

avec  $\partial j = \alpha$  et  $u$  est l'unique solution de (P);

- $u_{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} v$  fortement dans  $H^1(\Omega)$

On en déduit que  $u = v$  et par suite la solution de (P) est dans  $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

En appliquant des théorèmes d'immersion (Grisvard [1]) on déduit que  $u \in C^{0,\pi/2\omega}(\overline{\Omega})$ .

#### 4. Le problème en dimension 3

*Problème approché*

$$\begin{cases} -\Delta u_{\lambda} + u_{\lambda} = f & (\mathcal{O} = \Omega \times ]0, h[) \\ u_{\lambda} = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times ]0, h[ \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \\ -\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \nu} = \beta_{\lambda}(u_{\lambda}) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times ]0, h[). \end{cases} \quad (\mathbf{P}_{\lambda})$$

Par résolution variationnelle  $(\mathbf{P}_{\lambda})$  admet une unique solution  $u_{\lambda}$  dans  $H^1(\mathcal{O})$ .

##### 4.1 Régularité de la solution $u_{\lambda}$ de $(\mathbf{P}_{\lambda})$

Pour pouvoir appliquer la proposition 2.2 à  $u_{\lambda}$  il est nécessaire d'avoir un peu plus de régularité sur  $u_{\lambda}$  pour les variables  $r$  et  $\theta$ ; plus précisément : pour chaque  $z \in ]0, h[$  le problème  $(\mathbf{P}_{\lambda})$  devient

$$\begin{cases} -\Delta u_{\lambda} + u_{\lambda} = f & (\Omega \times \{z\}) \\ u_{\lambda} = 0 & (\Gamma_0 \times \{z\}) \\ -\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \nu} = \beta_{\lambda}(u_{\lambda}) & (\Gamma_1 \times \{z\}). \end{cases}$$

On est ramené à un problème en dimension 2 et, pour chaque  $z$  appartenant à l'arête du dièdre, on obtient un sommet pour  $\Omega \times \{z\}$ , l'ouverture de l'angle étant  $\omega$  ( $\omega$  est indépendant de  $z$ ). Comme précédemment :

$$u_\lambda(r, \theta, z) = u_1(r, \theta, z) + c_0(z)r^{\pi/2\omega}\varphi_0(\theta) + c_1(z)r^{3\pi/2\omega}\varphi_1(\theta)$$

$c_1(z)$  étant nulle si  $\omega \in ]\pi, 3\pi/2[$  et  $u_1 \in H^2(\mathcal{O})$ . On en déduit alors que  $u_\lambda \in (H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega \times \{z\}), H^1(0, h))$  et par suite vérifie pour chaque  $z \in ]0, h[$  :

$$\int_0^\omega \int_0^R \left( \left| \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} \right|^2 \right) r^{-\pi/\omega} r \, dr \, d\theta < +\infty$$

$$\int_0^\omega \int_0^R u^2 r^{-(\pi/\omega)-2} r \, dr \, d\theta < +\infty.$$

#### 4.2 Estimations sur $u_\lambda$

Soit  $A$  une arête de  $\Omega$ , après translation et rotation on peut supposer que l'arête coïncide avec l'axe  $0z$  et au voisinage de  $A$ ,  $\Omega$  est inclus dans un dièdre d'angle  $\omega$ .  $\varphi$  étant une fonction de troncature,  $v_\lambda = \varphi(r)u_\lambda$  est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda + u_\lambda = g & (\mathcal{O} = \Omega \times ]0, h[) \\ v_\lambda = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times ]0, h[ \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \\ -\frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} = \varphi \beta_\lambda(u_\lambda) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times ]0, h[). \end{cases} \quad (\widetilde{\mathcal{P}}_\lambda)$$

De la même manière qu'en dimension 2 et en utilisant la proposition 2.2, nous obtenons les estimations :

$$\|r^{\alpha/2} \nabla v_\lambda\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_1(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\|r^{\alpha/2} v_\lambda\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_2(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\|r^{(\alpha/2)-1} v_\lambda\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_3(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des constantes ne dépendant que de  $\alpha$  et  $\omega$ .

En utilisant la même technique de quotients différentiels radiaux que précédemment (on pose  $v_h = 1/h(v_\lambda(re^h, \theta, z) - v_\lambda(r, \theta, z))$ ) on obtient encore

$$\|r^{\alpha/2} \nabla v_\lambda\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_4(\alpha, \omega) \|r^{(\alpha/2)+1} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq c_4(\alpha, \omega) \| r^{(\alpha/2)+1} g \|_{L^2(\mathcal{O})} \\ \left\| r^{(\alpha/2)+1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r \partial \theta} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq c_4(\alpha, \omega) \| r^{(\alpha/2)+1} g \|_{L^2(\mathcal{O})} \\ \left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r \partial z} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq c_4(\alpha, \omega) \| r^{(\alpha/2)+1} g \|_{L^2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

On va maintenant utiliser la technique classique des quotients différentiels dans la direction de  $z$  pour obtenir une régularité  $H^2$  par rapport à cette variable. Posons

$$v_h(r, \theta, z) = \frac{1}{h} (v_\lambda(r, \theta, z+h) - v_\lambda(r, \theta, z))$$

$v_h$  est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v_h + v_h = g_h & (\mathcal{O} = \Omega \times ]0, h[) \\ v_h = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times ]0, h[ \cup \\ & \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \quad (\widetilde{\mathcal{P}}_{\lambda, h}) \\ -\frac{\partial v_h}{\partial \nu} = \frac{1}{h} \varphi(r) (\beta_\lambda(u_\lambda(r, \theta, z+h)) & \\ \quad - \beta_\lambda(u_\lambda(r, \theta, z))) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times ]0, h[). \end{array} \right.$$

En multipliant l'équation par  $v_h r^\alpha$  et en intégrant sur  $\mathcal{O}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} (-\Delta v_h + v_h) v_h r^\alpha r \, dr \, d\theta \, dz &= \\ &= \int_{\mathcal{O}} (|\nabla v_h|^2 + v_h^2) r^\alpha r \, dr \, d\theta \, dz - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\mathcal{O}} v_h^2 r^{\alpha-2} r \, dr \, d\theta \, dz + \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} v_h r^\alpha \, d\sigma. \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} v_h r^\alpha \, d\sigma &= \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}_1} \varphi^2 (\beta_\lambda(u_\lambda(r, \theta, z+h)) - \beta_\lambda(u_\lambda(r, \theta, z))) \times \\ &\quad \times (u_\lambda(r, \theta, z+h) - u_\lambda(r, \theta, z)) \, d\sigma \end{aligned}$$

et est donc positif compte tenu des propriétés de  $\beta_\lambda$ . Finalement en utilisant la proposition 2.2 :

$$c_5(\alpha, \omega) \int_{\mathcal{O}} (|\nabla v_h|^2 + v_h^2) r^\alpha r \, dr \, d\theta \, dz \leq \int_{\mathcal{O}} g_h v_h r^\alpha r \, dr \, d\theta \, dz.$$

La majoration

$$\left| \int_{\mathcal{O}} g_h v_h r^\alpha r \, dr \, d\theta \, dz \right| \leq \|r^{\alpha/2} v_h\|_{L^2(\mathcal{O})} \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

est tout à fait habituelle. On en déduit que

$$c_5(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} \nabla v_h\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où  $c_5$  ne dépend que de  $\alpha$  et  $\omega$ . D'où (en utilisant de plus que  $L^2(\mathcal{O})$  avec le poids  $\alpha/2$  est inclus algébriquement et topologiquement dans  $L^2(\mathcal{O})$  avec le poids  $(\alpha/2) + 1$ ) :

$$\begin{aligned} \left\| r^{(\alpha/2)+1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \theta \partial z} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq c_5(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ \left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq c_5(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Enfin en revenant à l'équation et en utilisant les majorations précédentes

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \theta^2} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_6(\alpha, \omega) \|r^{\alpha/2} g\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où  $c_6$  ne dépend que de  $\alpha$  et  $\omega$ .

### 4.3 Passage à la limite de $\lambda$

Exactement de la même façon que dans le cas de la dimension 2, on montre que  $\|u_\lambda\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\mathcal{O})} \leq$  constante indépendante de  $\lambda$ ; puis, en passant à la limite, on montre que la solution  $u$  de (P) appartient à  $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\mathcal{O})$ .

## Bibliographie

- [1] GRISVARD (P.) .— *Elliptic problems in non smooth domains*, Monographs and Studies in Math. Pitman (1985).
- [2] KONDRATIEV (V. A.) .— *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskovskogo Mat. Obshchestva **16** (1967), pp. 209-292 (and Transactions of the Moscow Mat. Soc. (1967), pp. 227-313).
- [3] BRÉZIS (H.) .— *Monotonicity methods in Hilbert spaces*, Academic Press (1971).
- [4] AVANTAGGIATI (A.) .— *Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni*, Bollettino U.M.I. **13-A**, n° 5 (1976), pp. 1-52.
- [5] MOUSSAOUI (M.) .— *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Publications Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, **36** (1990).
- [6] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.-L.) .— *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, Masson (1987).