

JOËL BENOIST

Espace de liberté d'un sous-ensemble convexe de \mathbf{R}^n

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 5, n° 4
(1996), p. 553-576

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_4_553_0

© Université Paul Sabatier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Espace de liberté d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n(*)}$

JOËL BENOIST⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — A un sous-ensemble convexe de C de \mathbb{R}^n , nous associons un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qui peut être défini aussi bien à partir d'une famille d'ensembles contenus dans C que d'une famille d'ensembles contenant C . Dans cet article, nous étudions en détail les propriétés de cette application.

ABSTRACT. — To a convex subset C of \mathbb{R}^n , we associate a vector subspace of \mathbb{R}^n which can be defined either by a family of subsets contained in C or by a family of subsets which contains C . In this article, we study in detail the properties of this application.

1. Notations

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien réel de dimension finie n . \mathcal{L} (resp. \mathcal{A}), \mathcal{C} , \mathcal{C}_F , \mathcal{C}_B , \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_S désigneront respectivement l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. affines non vides) de E , l'ensemble des convexes de E non vides quelconques, fermés, bornés, compacts puis enfin symétriques par rapport à l'origine de E . Si $A \in \mathcal{A}$, \vec{A} désignera le sous-espace vectoriel associé à A et p_A la projection orthogonale sur A . Pour $X \subset E$ nous notons $\text{int } X$, \overline{X} , X^* , $\text{vect } X$ (resp. $\text{aff } X$) et X^\perp respectivement l'intérieur de X , la fermeture de X , la frontière de X , l'espace vectoriel (resp. affine) engendré par X et l'orthogonal de X . Si $r \geq 0$, $B_L(x, r)$ sera la trace de la boule fermée de centre x et de rayon r sur le sous-espace affine $\{x\} + L$. Pour $C \in \mathcal{C}$, on note $\text{ir } C$ l'intérieur relatif de C et on définit le cône asymptote de C ,

(*) Reçu le 3 mars 1995

(1) U.R.A. n° 1586, Université de Limoges, 123 rue A.-Thomas, F-87060 Limoges (France)

noté C_∞ , par $C_\infty = \{d \in E \mid \overline{C} + \{d\} \subset \overline{C}\}$; remarquons que cette dernière définition coïncide avec celle donnée dans [10] seulement pour $C \in \mathcal{C}_F$.

2. Espace de liberté d'un convexe

L'espace de liberté associé à un convexe non vide C de E , noté $\ell(C)$, est défini par la formule

$$\ell(C) = (C - C)_\infty.$$

Comme $C - C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C) \in \mathcal{L}$; nous définissons ainsi une application ℓ de \mathcal{C} dans \mathcal{L} . Nous avons les premières propriétés suivantes qui se déduisent de la définition de $\ell(C)$ et des résultats de [10] sur le cône asymptote.

PROPOSITION 1. — *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $C_1 \subset C_2$ entraîne $\ell(C_1) \subset \ell(C_2)$;
- (ii) $C \subset \mathcal{L}$ si et seulement si $\ell(C) = C$;
- (iii) $C \in \mathcal{C}_B$ si et seulement si $\ell(C) = \{0\}$;
- (iv) si $C_2 \in \mathcal{C}_B$, $\ell(C_1 + C_2) = \ell(C_1)$;
- (v) $\text{vect}(C_\infty) \subset \ell(C) \subset \overline{\text{aff } C}$;
- (vi) si $C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C) = C_\infty$; si C est un cône convexe non vide, $\ell(C) = \text{vect } C$;
- (vii) $\ell(C) = \ell(-C) = \ell(\overline{C}) = \ell(\text{ir } C) = \ell(C - C)$;
- (viii) si E' désigne un autre espace euclidien de dimension finie et $A : E \rightarrow E'$ une application linéaire, alors $\ell(A(C)) = A(\ell(C))$; en particulier
 - (a) $\ell(C) = L + \ell(p_{L^\perp}(C))$ si $L \in \mathcal{L}$ vérifie $L \subset \text{vect}(C_\infty)$;
 - (b) $\ell(C_1 + C_2) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$.

Preuve

(i) et (ii) sont évidentes.

(iii) est une conséquence immédiate de [10, théorème 8.4].

(iv) Nous avons $\ell(C_1 + C_2) = ((C_1 - C_1) + (C_2 - C_2))_\infty$ et puisque $C_2 - C_2 \in \mathcal{C}_C$, d'après [10, corollaire 9.1.2 et théorème 8.4],

$$\ell(C_1 + C_2) = (C_1 - C_1)_\infty = \ell(C_1).$$

(v) Choisissons $c \in C$; on a $C - \{c\} \subset C - C$, donc

$$C_\infty = (C - \{c\})_\infty \subset (C - C)_\infty = \ell(C).$$

Comme $\ell(C) \in \mathcal{L}$, on déduit $\text{vect}(C_\infty) \subset \ell(C)$. Pour la deuxième inclusion $C \subset \text{aff } C$, donc $C - C \subset \text{aff } C - \text{aff } C = \overline{\text{aff } C}$ ce qui implique $\ell(C) \subset \overline{\text{aff } C}$.

(vi) Supposons que $C \in \mathcal{C}_S$. Choisissons $c \in C$; on a $C - \{c\} \subset C - C \subset 2C$, donc

$$C_\infty = (C - \{c\})_\infty \subset (C - C)_\infty \subset (2C)_\infty = C_\infty.$$

Ainsi $\ell(C) = C_\infty$. Supposons que C soit un cône convexe non vide. Alors $C - C \in \mathcal{L}$ et donc $\ell(C) = (C - C)_\infty = C - C = \text{vect}(C)$.

(vii) Il est clair que $\ell(C) = \ell(-C)$. D'après (i), $\ell(C) \subset \ell(\overline{C})$. Réciproquement, comme $\overline{C} - \overline{C} \subset \overline{C - C}$, on a

$$(\overline{C} - \overline{C})_\infty \subset \overline{(C - C)_\infty} = (C - C)_\infty$$

et donc $\ell(\overline{C}) \subset \ell(C)$. Alors on a aussi, d'après [10, théorème 6.3], $\ell(\text{ir } C) = \ell(\text{ir } \overline{C}) = \ell(\overline{C})$. Enfin, comme $C - C \in \mathcal{C}_S$, $\ell(C - C) = (C - C)_\infty$ d'après (vi).

(viii) C'est une conséquence de [10, théorème 9.1].

(a) Soit $L \in \mathcal{L}$ vérifiant $L \subset \text{vect}(C_\infty)$. Comme $\text{vect}(C_\infty) \subset \ell(C)$, on a aussi $L \subset \ell(C)$. On utilise alors la décomposition $E = L \oplus L^\perp$, ce qui permet d'écrire

$$\ell(C) = p_L(\ell(C)) + p_{L^\perp}(\ell(C)),$$

soit $\ell(C) = L + p_{L^\perp}(\ell(C))$. En choisissant $A = p_L^\perp$ et en appliquant la formule $\ell(A(C)) = A(\ell(C))$, on conclut $\ell(C) = L + \ell(p_{L^\perp}(C))$.

(b) On applique la formule $\ell(A(C)) = A(\ell(C))$ avec $C = C_1 \times C_2$ et $A : E \times E \rightarrow E$ définie, pour $(x_1, x_2) \in E \times E$, par $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. \square

Le théorème suivant justifie l'appellation "espace de liberté" et donne deux caractérisations différentes de $\ell(C)$.

Pour $L \in \mathcal{L}$, on note

$$L^- \text{ (resp. } L^+) = \{L' \in \mathcal{L} \mid L' \subset L \text{ (resp. } L \subset L')\}.$$

THÉORÈME 2. — *Nous avons les égalités suivantes :*

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists K \in \mathcal{C}_C, C \subset K + L\} = \ell(C)^+ \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \forall r > 0, \exists x \in C, B_L(x, r) \subset C\} = \ell(C)^-. \quad (2.2)$$

Preuve

Étape 1. — Montrons que si $C \in \mathcal{C}_S$ alors

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = C_{\infty}^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\text{int}}(C) = C_{\infty}^-.$$

Comme $\mathcal{L}_{\text{ext}}(\overline{C}) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$ et $(\overline{C})_{\infty} = C_{\infty}$, nous pouvons nous ramener à C fermé. Soit $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$; il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que $C \subset K + L$, ce qui implique $C_{\infty} \subset (K + L)_{\infty} = L$ et $L \in C_{\infty}^+$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$. Comme $C_{\infty} \in \mathcal{L}$, C_{∞} est la partie linéaire de C (voir [10, p. 65]), et donc $C = C_{\infty} + C'$ où

$$C' \stackrel{\text{def}}{=} C \cap (C_{\infty})^{\perp}.$$

Alors, d'après [10, théorème 8.4], $C' \in \mathcal{C}_C$ et donc $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$.

Soit $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$; pour $r > 0$, il existe $x \in C$ tel que $B_L(x, r) \subset C$. Ceci entraîne

$$B_L(0, 2r) = B_L(x, r) - B_L(x, r) \subset C - C \subset 2C$$

soit $B_L(0, r) \subset C$. Ainsi $L \subset C$ et donc $L \in C_{\infty}^-$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que $C_{\infty} \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$; pour cela montrons que $C_{\infty} \subset C$. Soit $d \in C_{\infty}$; si nous choisissons un élément x dans $\text{ir}C$ qui est non vide, alors $\{x\} + \mathbb{R}_+d \subset C$ et donc

$$\mathbb{R}d = (\{x\} + \mathbb{R}_+d) - (\{x\} + \mathbb{R}_+d) \subset C - C \subset 2C \quad \text{et} \quad d \in C.$$

Étape 2. — Montrons que si $C \in \mathcal{C}$ alors

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\text{rint}}(C - C) = \mathcal{L}_{\text{int}}(C).$$

Soit $c \in C$; comme $C - \{c\} \subset C - C$, on a

$$\mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C) \subset \mathcal{L}_{\text{ext}}(C - \{c\}) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(C).$$

Inversement, soit $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$; il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que $C \subset K + L$, ce qui implique $C - C \subset (K - K) + L$. Comme $K - K \in \mathcal{C}_C$, $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C - C)$. Soit $c \in C$; comme $C - \{c\} \subset C - C$, on a

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(C) = \mathcal{L}_{\text{int}}(C - \{c\}) \subset \mathcal{L}_{\text{int}}(C - C).$$

Inversement, soit $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C - C)$ et choisissons une base orthonormée $(e_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ de L . Pour $r > 0$, il existe $x \in E$ tel que $B_L(x, 2r) \subset C - C$; puisque $C - C \in \mathcal{C}_S$, on déduit que

$$B_L(0, 2r) \subset C - C.$$

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe $(a_i, b_i) \in C^2$ tel que $2re_i = b_i - a_i$, ou en d'autres termes, il existe

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \quad \text{tel que } c_i + [-r, r]e_i \subset C.$$

Par convexité nous obtenons alors

$$B_L\left(\frac{c_1 + \dots + c_p}{p}, \frac{r}{p}\right) \subset C$$

et ainsi $L \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$.

Étape 3. — Vu que $C - C \in \mathcal{C}_S$, la conclusion est une conséquence immédiate des deux premières étapes. \square

Nous donnons comme exemple d'application le corollaire suivant. Remarquons que la partie (i) de ce corollaire est un résultat dû à Clark [5] (voir aussi les articles de Klee [8] et de Thorp-Whitley [11] pour le cas de la dimension infinie).

COROLLAIRE 3. — *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *C contient des boules de rayon arbitrairement grand si et seulement si C n'est pas contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles ;*
- (ii) *si pour un élément L de \mathcal{L} il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in C$, $B_L(x, r) \not\subset C$, alors nous pouvons trouver un hyperplan vectoriel H qui ne contient pas L et un convexe compact K tel que $C \subset K + H$;*
- (iii) *si, pour un élément L de \mathcal{L} , $\sup_{x \in C} d(x, L) = +\infty$ avec $d(x, L) = \inf_{l \in L} \|x - l\|$, alors il existe une droite vectorielle D, $D \cap L = \{0\}$, telle que l'on puisse trouver des segments de longueur arbitrairement grande dans la direction donnée par D.*

Preuve

(i) C contient des boules de rayon arbitrairement grand est équivalent à $\mathcal{L}_{\text{int}}(C) = \mathcal{L}$; C n'est pas contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles est équivalent à $\mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = E$. Et, d'après le théorème 2, ces deux dernières assertions sont équivalentes à $\ell(C) = E$.

(ii) Si $L \notin \mathcal{L}_{\text{int}}(C)$ alors, d'après (2.2), $L \notin \ell(C)$ et donc il existe une droite vectorielle D telle que

$$D \cap \ell(C) = \{0\} \quad \text{et} \quad D \subset L.$$

On peut alors choisir un hyperplan vectoriel H tel que $D \cap H = \{0\}$ et $\ell(C) \subset H$. On a alors le résultat souhaité.

(iii) Nous passons par la contraposée. On suppose donc que, pour toute droite vectorielle D de $\mathcal{L}_{\text{int}}(C)$, $D \subset L$. Donc, d'après le théorème 2, $\ell(C) \subset L$ et $L \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C)$. \square

3. Localisation d'un convexe

Nous étudions dans cette section la localisation des centres x que l'on trouve dans la définition de $\mathcal{L}_{\text{int}}(C)$ pour $L = \ell(C)$. Soit $X \subset E$; on dira que X localise C si, pour tout $r > 0$, il existe $x \in X$ tel que $B_{\ell(C)}(x, r) \subset C$.

THÉORÈME 4. — *Soit $A \in \mathcal{A}$; si A localise C , alors*

$$\overline{p_{\vec{A}^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C.$$

La réciproque est vraie sous la condition $A \cap \text{int} C$ est non vide.

Preuve

\Rightarrow On suppose que A localise C . Posons

$$p = p_{\vec{A}^\perp} \quad \text{et} \quad C_1 = p(C);$$

d'après (2.1), il existe $K \in \mathcal{C}_C$ tel que

$$C_1 \subset K + \ell(C_1). \tag{3.1}$$

Écrivons $A = \{a\} + \vec{A}$. Comme A localise C , pour tout $r > 0$, il existe $x \in \vec{A}$ tel que

$$B_{\ell(C)}(a + x, r) \subset C \tag{3.2}$$

Montrons que $\{p(a)\} + p(\ell(C)) \subset C_1$. Soit $z \in \{p(a)\} + p(\ell(C))$; il existe $v \in \ell(C)$ tel que $z = p(a) + p(v)$. En prenant $r = \|v\|$ dans la relation (3.2), on déduit l'existence de $x \in \vec{A}$ tel que $B_{\ell(C)}(a+x, r) \subset C$. Or

$$z = p(a+x+v) \quad \text{et} \quad a+x+v \in B_{\ell(C)}(a+x, r);$$

ainsi $z \in C_1$. En combinant cette inclusion avec la relation (3.1) et en utilisant la proposition 1(viii), on obtient

$$\{p(a)\} + \ell(C_1) \subset \overline{C_1} \subset K + \ell(C_1).$$

La partie linéaire du convexe $\overline{C_1}$ est donc $\ell(C_1)$ et, d'après [10, p. 65] on déduit $\overline{C_1} = \ell(C_1) + K'$ où $K' = \overline{C_1} \cap \ell(C_1)^\perp$ est un convexe compact non vide de E . Ainsi $\overline{C_1} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.

[\Leftarrow] Nous supposons que $A \cap \text{ir } C \neq \emptyset$ et que $\overline{C_1} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Il existe donc $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C_1} = L + K$; alors clairement $L = \ell(C_1)$. Ainsi

$$\overline{C_1} = \ell(C_1) + K. \tag{3.3}$$

Comme $A \cap \text{ir } C \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in \text{ir } C$ tel que $A = \{x_0\} + \vec{A}$. D'après [10, théorème 6.6],

$$y_0 \stackrel{\text{def}}{=} p(x_0) \in \text{ir } C_1$$

et par la relation (3.3), $y_0 \in \ell(C_1) + \text{ir } K$ (utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]); on peut donc écrire $y_0 = \ell_0 + k_0$ avec $\ell_0 \in \ell(C_1)$ et $k_0 \in \text{ir } K$; en particulier, il existe $r_0 > 0$ tel que $B_{\overline{\text{aff } K}}(k_0, r_0) \subset \text{ir } K$. Soit $r > 0$; d'après (2.2), il existe $x \in C$ tel

$$B_{\ell(C)}(x, r_1) \subset C, \tag{3.4}$$

où

$$r_1 = \max \left\{ 2r; \left(1 + \frac{d}{r_0} \right) r \right\},$$

d désignant le diamètre de K . Comme $p(x) \in C_1$, d'après la relation (3.3), il existe $k \in K$ et $\ell \in \ell(C_1)$ tel que $p(x) = k + \ell$. Nous allons maintenant envisager deux cas.

Cas 1. — $k = k_0$.

Considérons l'élément

$$y' = (2\ell_0 - \ell) + k_0, \quad y' \in \ell(C_1) + \text{ir } K = \text{ir } C_1 \subset C_1$$

(utiliser la relation (3.3) et [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]); alors il existe $x' \in C$ tel que $y' = p(x')$. Ainsi nous avons, grâce à la relation (3.4),

$$B_{\ell(C)}\left(\frac{x+x'}{2}, r\right) = \frac{1}{2}\{x'\} + \frac{1}{2}B_{\ell(C)}(x, 2r) \subset C$$

et $p((x+x')/2) = y_0$ soit $(x+x')/2 \in A$. Dans ce cas, nous avons le résultat souhaité.

Cas 2. — $k \neq k_0$.

Considérons le point $y' = k' + \ell'$ avec

$$k' = k_0 + r_0 \frac{k_0 - k}{\|k_0 - k\|} \quad \text{et} \quad \ell' = \ell_0 + r_0 \frac{\ell_0 - \ell}{\|\ell_0 - \ell\|};$$

$k' \in B_{\frac{r_0}{\text{aff } K}}(k_0, r_0) \subset \text{ir } K$ et $\ell' \in \ell(C_1)$ ce qui implique

$$y' \in \ell(C_1) + \text{ir } K = \text{ir}(\ell(C_1) + K) = \text{ir } \overline{C_1} = \text{ir } C_1 \subset C_1$$

(utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]). Par conséquent, il existe $x' \in C$ tel que $p(x') = y'$. Posons

$$\lambda = \frac{r_0}{r_0 + \|k_0 - k\|} \in \left] \frac{r_0}{r_0 + d}, 1 \right[.$$

On a

$$B_{\ell(C)}(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda r_1) = \lambda B_{\ell(C)}(x, r_1) + (1 - \lambda)\{x'\},$$

et comme C est convexe, d'après la relation (3.4),

$$B_{\ell(C)}(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda r_1) \subset C$$

et en particulier $B_{\ell(C)}(\lambda x + (1 - \lambda)x', r) \subset C$ car $r < \lambda r_1$. Il ne reste plus à vérifier que $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in A$. Ceci résulte de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1 - \lambda)x') &= \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(x') = \lambda y + (1 - \lambda)y' \\ &= (\lambda k + (1 - \lambda)k') + (\lambda \ell + (1 - \lambda)\ell') \\ &= k_0 + \ell_0 = p(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Nous déduisons entre autre les propriétés suivantes.

COROLLAIRE 5. — *Les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *C peut être localisé par un point si et seulement si $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$;*
- (ii) *soient $(x_1, x_2) \in C \times \text{ir } C$ et $L \in \mathcal{L}$; si $\{x_1\} + L$ localise C , alors $\{x_2\} + L$ localise C ;*
- (iii) *soit $x \in \text{ir } C$; alors le sous-espace affine $\{x\} + \ell(C)$ localise C . Il n'est pas possible dans tous les cas de localiser C par un sous-espace affine de dimension inférieure ; pour s'en convaincre, il suffit de prendre $E = \mathbb{R}^n$ et*

$$C = \text{co}\{(t, t^2, \dots, t^n) \mid t \in \mathbb{R}_+\} ;$$

- (iv) *si $A \in \mathcal{A}$ est de dimension minimale parmi les sous-espaces affines localisant C , alors $\vec{A} \subset \ell(C)$.*

Preuve

(i) C'est une conséquence immédiate du théorème 4 et du fait que l'intérieur relatif d'un convexe non vide est non vide.

(ii) C'est une conséquence immédiate du théorème 4.

(iii) La première partie est une conséquence immédiate du théorème 4 et de (2.1). Pour la deuxième partie, il suffit de vérifier qu'aucun hyperplan M de \mathbb{R}^n ne localise C . Sinon, d'après le théorème 4, il existe $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|d\| = 1$ tel que $\overline{p_{\mathbb{R}d}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Or $p_{\mathbb{R}d}(C) = \text{co } X$, où

$$X = p_{\mathbb{R}d} \left(\{(t, t^2, \dots, t^n) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \right) ;$$

comme X est connexe dans un espace de dimension un, X est convexe et $p_{\mathbb{R}d}(C) = X$. Ainsi $\overline{X} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$; ceci entraîne que \overline{X} est un convexe compact ou bien $\overline{X} = \mathbb{R}d$. On a donc prouvé que X est borné ou bien est égal à $\mathbb{R}d$. Or, par le calcul, nous avons :

$$X = \left\{ \left(\sum_{i=1}^n d_i t^i \right) d \mid t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

qui n'est ni un ensemble borné (faire tendre $t \rightarrow +\infty$), ni égal à $\mathbb{R}d$ (utiliser le fait que $t \in \mathbb{R}_+$). On aboutit donc à une contradiction.

(iv) C'est une conséquence directe de (ii) et de la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 3.1. — Soient $x \in \text{ir } C$ et $L \in \mathcal{L}$. Si $\{x\} + L$ localise C , alors $\{x\} + (L \cap \ell(C))$ localise C .

Preuve. — La preuve de cette proposition commence par les deux lemmes suivants.

LEMME 3.1. — Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors l'application $\varphi : E \rightarrow E_1 \times E_2$ définie par $\varphi(x) = (p_{E_1}(x), p_{E_2}(x))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve. — Il est clair que φ est linéaire. Comme $\dim E = \dim(E_1 \times E_2)$, il suffit de vérifier que φ est injective. Soit $x \in E$ tel que $p_{E_1}(x) = p_{E_2}(x) = 0$; alors

$$x \in E_1^\perp \cap E_2^\perp = (E_1 + E_2)^\perp = E^\perp = \{0\}.$$

Ainsi φ est un isomorphisme. Remarquons en fait que

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = (\{x_1\} + E_1^\perp) \cap (\{x_2\} + E_2^\perp). \quad \square$$

LEMME 3.2. — Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si C est un convexe de E vérifiant

$$\overline{p_{E_1}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C \quad \text{et} \quad \overline{p_{E_2}(C)} \in \mathcal{C}_C,$$

alors $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.

Preuve

Étape 1. — Par hypothèse, il existe $K_1 \in \mathcal{C}_C$ et $L_1 \in \mathcal{L}$ tels que $\overline{p_{E_1}(C)} = L_1 + K_1$. Remarquons que $L_1 + K_1 \subset E_1$ ce qui implique

$$L_1 = \ell(L_1 + K_1) \subset \ell(E_1) = E_1,$$

soit $L_1 \subset E_1$. D'une part, $p_{E_1}(C) \subset L_1 + K_1$ ce qui implique

$$C \subset (L_1 + E_1^\perp) + K_1 \quad \text{et} \quad L_1 + E_1^\perp \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C).$$

D'autre part, il existe $K_2 \in \mathcal{C}_C$ tel que $p_{E_2}(C) \subset K_2$ ce qui implique

$$C \subset E_2^\perp + K_2 \quad \text{et} \quad E_2^\perp \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C).$$

Grâce à la relation (2.1), on conclut

$$(L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp \in \mathcal{L}_{\text{ext}}(C) = \mathcal{L}_{\text{ext}}(\overline{C}),$$

ce qui s'écrit $\overline{C} \subset ((L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp) + K$ pour un certain sous-ensemble K de \mathcal{C}_C .

Étape 2. — Soit $x_0 \in \text{ir } C$; montrons que

$$\{x_0\} + ((L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp) \subset \overline{C}.$$

Pour cela prenons un élément $d \in (L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp$. Nous avons $d \in E_2^\perp$ et il existe $\ell_1 \in L_1$ tel que $d - \ell_1 \in E_1^\perp$. On vérifie aisément que $d = \varphi^{-1}(\ell_1, 0)$. Nous avons $p_{E_1}(x_0) \in \text{ir}(p_{E_1}(C))$ [2, théorème 6.6] et donc $p_{E_1}(x_0) \in L_1 + \text{ir } K_1$ (utiliser [10, corollaire 6.6.2 et théorème 6.3]). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{E_1}(x_0) + n\ell_1 \in p_{E_1}(C).$$

Ainsi, il existe un élément $c_n \in C$ tel que

$$c_n = \varphi^{-1}(p_{E_1}(c_n), p_{E_2}(c_n)) = \varphi^{-1}(p_{E_1}(x_0) + n\ell_1, p_{E_2}(c_n)).$$

En divisant par n ,

$$\frac{c_n}{n} = \varphi^{-1}\left(\ell_1 + \frac{p_{E_1}(x_0)}{n}, \frac{p_{E_2}(c_n)}{n}\right)$$

et en faisant $n \rightarrow +\infty$, $d = \varphi^{-1}(\ell_1, 0) \in C_\infty$. On conclut alors que $x_0 + d \in \overline{C}$.

Étape 3. — Des deux inclusions obtenues dans les étapes 1 et 2, on déduit que $(L_1 + E_1^\perp) \cap E_2^\perp$ est la partie linéaire de \overline{C} et, d'après [2, p. 65],

$$\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C. \quad \square$$

Continuation de la preuve de la proposition

D'après (2.1), $\overline{p_{\ell(C)^\perp}(C)} \in \mathcal{C}_C$ et d'après le théorème 4, $\overline{p_{L^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Pour conclure, il suffit de montrer que (utiliser à nouveau le théorème 5) :

$$\overline{p_{(\ell(C) \cap L)^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C.$$

On a

$$(\ell(C) \cap L)^\perp = L^\perp + \ell(C)^\perp = L^\perp \oplus E'_2$$

où E'_2 est un sous-espace vectoriel de $\ell(C)^\perp$. Nous allons nous placer dans l'espace euclidien $E' = L^\perp + \ell(C)^\perp$ et appliquer le lemme 3.2 dans cet espace avec la décomposition $E' = E'_1 \oplus E'_2$, où $E'_1 = L^\perp$, et avec le convexe $C' = p_{E'}(C)$. Vérifions les hypothèses, c'est-à-dire avec des notations évidentes,

$$\overline{p_{E'_1}(C')} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}'_C \quad \text{et} \quad \overline{p_{E'_2}(C')} \in \mathcal{C}'_C.$$

On a

$$\overline{p_{E'_1}(C')} = \overline{p_{E'_1}(p_{E'}(C))} = \overline{p_{L^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$$

et comme $\overline{p_{E'_1}(C')} \subset E'$, on démontre aisément que

$$\overline{p_{E'_1}(C')} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}'_C.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overline{p_{E'_2}(C')} &= \overline{p_{E'_2}(p_{E'}(C))} = \overline{p_{E'_2}(C)} \\ &= \overline{p_{E'_2}(p_{\ell(C)^\perp}(C))} \subset \overline{p_{E'_2}(p_{\ell(C)^\perp}(C))} \in \mathcal{C}_C \end{aligned}$$

et comme $\overline{p_{E'_2}(C')} \in E'$ on a aussi $\overline{p_{E'_2}(C')} \in \mathcal{C}'$. En appliquant le lemme 3.2, on conclut $\overline{C'} \in \mathcal{L}' + \mathcal{C}'$, ce qui implique $\overline{p_{(\ell(C) \cap L)^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}$. \square

Si $C \in \mathcal{C}_F$, notons

$$\mathcal{D}(C) = \{ \{x\} + \mathbb{R}_+d \mid x \in C \text{ et } d \in C_\infty \setminus \{0\} \}$$

l'ensemble des demi-droites incluses dans C et

$$\mathcal{I}(C) = \{ D \in \mathcal{D}(C) \mid D \text{ localise } C \}.$$

La proposition 6 donne des propriétés relatives à $\mathcal{I}(C)$.

PROPOSITION 6. — *Soit $C \in \mathcal{C}_F \setminus \mathcal{C}_C$; les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$ si et seulement si $\overline{p_{(C_\infty)^\perp}(C)} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$;

(ii) si $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$, alors

$$\{\{x\} + \mathbb{R}_+d \mid x \in \text{ir } C \text{ et } d \in (\text{ir}(C_\infty)) \setminus \{0\}\} \subset \mathcal{I}(C);$$

(iii) si C est un cône

$$\{\{x\} + \mathbb{R}_+d \mid x \in C \text{ et } d \in (\text{ir } C) \setminus \{0\}\} = \mathcal{I}(C);$$

(iv) C est continu (voir [7]) si et seulement si $\ell(C) = E$ et $\mathcal{I}(C) = \mathcal{D}(C)$.

Remarque 7. — Supposons que $\ell(C) = E$. Avec les notations ci-dessus, le cône d'ouverture interne (*inner aperture*) introduit par Larman [9] est égal par définition à

$$\bigcap_{D \in \mathcal{I}(C)} \overrightarrow{D},$$

où \overrightarrow{D} désigne la demi-droite vectorielle associée à D . Cette définition a ensuite été étudiée par Brøndsted [3] et Bair ([1], [2]). Remarquons que cette notion a permis à Larman [9] puis à Brøndsted [4] d'obtenir des résultats sur l'intersection de convexes translétés.

Preuve de la proposition 6

(i) $[\Rightarrow]$ Il existe $D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C)$; en particulier $d \in C_\infty$. Posons $M = C_\infty^\perp$ et $C_1 = p_M(C)$. Comme $D \in \mathcal{I}(C)$, on a

$$\forall r > 0, \exists t_r \geq 0, \quad B_{\ell(C)}(x + t_r d, r) \subset C. \quad (3.5)$$

Montrons que

$$\{p_M(x)\} + p_M(\ell(C)) \subset C_1.$$

Soit $z = p_M(x) + p_M(v)$ avec $v \in \ell(C)$; $z = p_M(x + t_r d + v)$. Si l'on prend dans la relation (3.5) $r = \|v\|$, alors

$$x + t_r d + v \in B_{\ell(C)}(x + t_r d, r) \subset C$$

et donc $z \in C_1$. Ainsi, nous avons la double inclusion (utiliser la proposition 1(viii)) $\{p_M(x)\} + \ell(C_1) \subset C_1 \subset K + \ell(C_1)$ pour $K \in \mathcal{C}_C$ et donc

$$\{p_M(x)\} + \ell(C_1) \subset \overline{C_1} \subset K + \ell(C_1).$$

De cette inclusion, on déduit que la partie linéaire de $\overline{C_1}$ est $\ell(C_1)$ et donc, d'après [10, p. 65],

$$\overline{C_1} = \ell(C_1) + (\overline{C_1} \cap \ell(C_1)^\perp) \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C.$$

[\Leftarrow] Posons encore ici $C_1 = p_{(C_\infty)^\perp}(C)$. Comme $C \neq \emptyset$; choisissons un élément x dans $\text{ir } C$; écrivons $x = y + z$ avec $y \in p_{(C_\infty)^\perp}(x)$ et $z = p_{\text{vect}(C_\infty)}(x)$; d'après [10, théorème 6.6], $y \in \text{ir } C_1$. Comme $C \notin \mathcal{C}_C$, on peut choisir un élément $d \in (\text{ir}(C_\infty)) \setminus \{0\}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\text{vect}(C_\infty)}(d, \varepsilon) \subset C_\infty$, ce qui entraîne, pour $t \geq 0$,

$$B_{\text{vect}(C_\infty)}(td, t\varepsilon) \subset C_\infty. \quad (3.6)$$

Montrons alors que $D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C)$, ce qui prouvera que $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C_1} = L + K$; ceci entraîne

$$\ell(\overline{C_1}) = \ell(C_1) = \ell(L + K) = \ell(L) = L,$$

ce qui permet d'écrire $\overline{C_1} = \ell(C_1) + K$. En prenant l'intérieur relatif de chaque côté de cette égalité, $\text{ir } C_1 = \ell(C_1) + \text{ir } K$ (utiliser [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2]), et par conséquent

$$\{y\} + \ell(C_1) \subset C_1. \quad (3.7)$$

Envisageons désormais deux cas.

Cas 1. — $\ell(C_1) \neq \{0\}$.

Alors $\ell(C_1) = \text{vect}\{e_1, \dots, e_p\}$, où $1 \leq p \leq n - 1$ et où $(e_i)_{i=1, \dots, p}$ est une famille orthonormale. Soit $r > 0$; pour $i \in \{1, \dots, p\}$ (resp. $i \in \{p + 1, \dots, 2p\}$), d'après la relation (3.7), il existe $z_1 \in \text{vect}(C_\infty)$ tel que

$$y + re_i + z_i \in C \quad (\text{resp. } y - re_{i-p} + z_i \in C). \quad (3.8)$$

Prenons maintenant

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{r}{\sqrt{p}} + \sum_{i=1}^{2p} \|z_i\| + \|z\| \right);$$

alors

$$B_{\text{vect}(C_\infty)} \left(z + td, \frac{r}{\sqrt{p}} \right) \subset \{z_1\} + C_\infty \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 2p\}. \quad (3.9)$$

En effet, soit $y \in B_{\text{vect}(C_\infty)}(z + td, r/\sqrt{p}) - \{z_i\}$. D'une part

$$\|y - z - td + z_i\| \leq \frac{r}{\sqrt{p}}$$

ce qui implique

$$\|y - td\| \leq \frac{r}{\sqrt{p}} + \|z\| + \|z_i\| \leq \varepsilon t ;$$

d'autre part $y + z_i - z - td \in \text{vect}(C_\infty)$ ce qui implique

$$y - td \in \text{vect}(C_\infty).$$

Ainsi, d'après la relation (3.6), $y \in C_\infty$. On obtient, en combinant les relations (3.8) et (3.9) :

$$\begin{cases} \{x + td + re_i\} + B_{\text{vect}(C_\infty)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C & i \in \{1, \dots, p\} \\ \{x + td - re_{i-p}\} + B_{\text{vect}(C_\infty)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C & i \in \{p+1, \dots, 2p\}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Puisque C est convexe, on déduit de la relation (3.10) :

$$\{x + td\} + B_{\ell(C_1)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) + B_{\text{vect}(C_\infty)}\left(0, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C,$$

et grâce à la proposition 1(viii),

$$B_{\ell(C)}\left(x + td, \frac{r}{\sqrt{p}}\right) \subset C.$$

Cas 2. — $\ell(C_1) = \{0\}$.

Dans ce cas, d'après la proposition 1(viii), $\ell(C) = \text{vect}(C_\infty)$. Soit $r > 0$; choisissons $t = r/\varepsilon$. D'après la relation (3.6), $B_{\text{vect}(C_\infty)}(td, r) \subset C_\infty$ et donc

$$\{x\} + B_{\text{vect}(C_\infty)}(td, r) \subset C.$$

Ainsi $B_{\ell(C)}(x + td, r) \subset C$.

(ii) Si $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$, d'après (i), $p_{(C_\infty)^\perp}(C) \in \mathcal{C}_C + \mathcal{L}$. En regardant ce que l'on a démontré en (i), on a le résultat.

(iii) Si C est un cône, $\text{vect}(C_\infty) = \text{vect } C = \ell(C)$ (voir proposition 1(vi) et donc $p_{(C_\infty)^\perp}(C)$ est un cône qui est borné, ce qui implique $p_{(C_\infty)^\perp}(C) = \{0\}$. On est dans la situation du (i), dont $\mathcal{I}(C) \neq \emptyset$. Alors, d'après (ii),

$$\{\{x\} + \mathbb{R}_+d \mid x \in \text{ir } C \text{ et } d \in (\text{ir}(C)) \setminus \{0\}\} \subset \mathcal{I}(C),$$

puisque C est un cône. En remarquant que pour un cône nous avons $((x \in C \text{ et } d \in \text{ir } C) \Rightarrow x + d \in C)$, la première inclusion est démontrée. Réciproquement, soit $D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C)$. Par définition, pour $r_1 = 1 + \|x\|$, il existe $t_1 \geq 0$ tel que

$$B_{\text{vect}(C_\infty)}(x + t_1d, 1 + \|x\|) \subset C.$$

Comme $d \in C_\infty$, on peut supposer que $t_1 > 0$. Alors $B_{\text{vect}(C_\infty)}(t_1d, 1) \subset C$ et comme C est un cône $B_{\text{vect}(C_\infty)}(d, 1/t_1) \subset C$ ce qui exprime que $d \in \text{ir } C_\infty = \text{ir } C$.

(iv) On rappelle (voir [7]) qu'un rayon frontière du convexe fermé C est une demi-droite qui est contenue dans la frontière de C et qu'une asymptote est une demi-droite Δ contenue dans $E \setminus C$ tel que

$$\inf \{\|y - x\| \mid y \in \Delta \text{ et } x \in C\} = 0.$$

Un ensemble C est continu si C est un convexe fermé qui n'a ni asymptote, ni rayon frontière. Le résultat qui va nous servir ici est le suivant.

LEMME 3.3 (voir [7]).— Soit $d \in C_\infty \setminus \{0\}$, $x \in C$ et $y \in E$ tels que la demi-droite $\Delta = \{y + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ ne rencontre pas C . Alors pour $u \in [x, y]$, la demi-droite $D = \{u + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ est une asymptote ou contient un rayon frontière.

Continuation de la preuve, partie (iv)

[\Rightarrow] Supposons que $\ell(C) \neq E$. Comme $p_{\ell(C)^\perp}(C)$ est borné, il existe $y \in E$ tel que $\{y\} + \ell(C) \cap C = \emptyset$. En particulier pour $d \in C_\infty \setminus \{0\}$ (qui existe bien car $C \notin \mathcal{C}_C$), on a $\{y\} + \mathbb{R}_+d$ ne rencontre pas C et, si $x \in C$, le lemme donne une contradiction.

Soit maintenant $D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{D}(C)$. En appliquant à nouveau le lemme on montre que $p_{\{d\}^\perp}(C) = \{d\}^\perp$. En appliquant le même type d'argument que dans la preuve de la proposition 6(i), on déduit $D \in \mathcal{I}(C)$.

[\Leftarrow] On suppose $\ell(C) = E$ et $\mathcal{I}(C) = \mathcal{D}(C)$.

Supposons qu'il existe un rayon frontière $D = \{x\} + \mathbb{R}_+d$. Alors $D \in \mathcal{D}(C)$ et donc $D \in \mathcal{I}(C)$; pour $r_1 = 1$ il existe $t_1 \geq 0$ tel que $B_E(x + t_1d, 1) \subset C$ et alors $x + t_1d \in \text{int } C$, ce qui contredit que $D \subset C^*$.

Supposons maintenant qu'il existe une asymptote $D = \{y\} + \mathbb{R}_+d$. Alors on montre facilement que $d \in C_\infty$. Soit $x \in C$; on a $\{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{D}(C)$ donc par hypothèse $\{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C)$. Par définition, pour $r_2 = \|y - x\|$, il existe $t_2 \geq 0$ tel que

$$B_E(x + t_2d, \|y - x\|) \subset C.$$

Mais alors $y + t_2d \in C \cap D$, ce qui entraîne à nouveau une contradiction.

Ainsi C est continu. \square

L'introduction de $\mathcal{I}(C)$ permet d'obtenir une condition suffisante pour que l'application ℓ soit stable par intersection.

PROPOSITION 8. — Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_F$ tels que $\mathcal{I}(C_1) \cap \mathcal{I}(C_2) \neq \emptyset$. Alors

$$\ell(C_1 \cap C_2) = \ell(C_1) \cap \ell(C_2).$$

Preuve. — L'inclusion $\ell(C_1 \cap C_2) \subset \ell(C_1) \cap \ell(C_2)$ est une conséquence de la proposition 1(i). Réciproquement, par hypothèse il existe

$$D = \{x\} + \mathbb{R}_+d \in \mathcal{I}(C_1) \cap \mathcal{I}(C_2).$$

Soit $r > 0$; pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $t_i \geq 0$ tel que $B_{\ell(C_i)}(x + t_id, r) \subset C_i$. Comme $d \in (C_1)_\infty \cap (C_2)_\infty$, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$B_{\ell(C_i)}(x + t_0d, r) \subset C_i$$

où $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$. Ceci implique $B_{\ell(C_1) \cap \ell(C_2)}(x + t_0d, r) \subset C_1 \cap C_2$; ainsi $\ell(C_1) \cap \ell(C_2) \in \mathcal{L}_{\text{int}}(C_1 \cap C_2)$ et, d'après (2.2),

$$\ell(C_1) \cap \ell(C_2) \subset \ell(C_1 \cap C_2). \square$$

4. Ombre d'un convexe

Dans cette section, nous supposons que $C \in \mathcal{C}$ vérifie $\ell(C) \neq E$ ou, en d'autres termes, grâce au corollaire 3(i),

$$r_C \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in C, B_E(x, r) \subset C \} \in \mathbb{R}_+.$$

On appellera le convexe borné $p_{\ell(C)^\perp}(C)$ l'ombre du convexe C . Le théorème suivant exprime que cette ombre donne une bonne information sur C lui-même.

THÉORÈME 9. — *Si $A \in \mathcal{A}$ localise C , alors, pour tout $R \in \mathcal{C}_C$ inclus dans $\text{ir}(p_{\ell(C)^\perp}(C))$, pour tout $r > 0$, il existe $x \in A$ tel que*

$$(R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\}) + B_{\ell(C)}(0, r) \subset C.$$

Preuve. — Nous allons faire une récurrence sur la dimension de l'espace E . Si $n = 1$, le résultat est facile à vérifier. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour un espace euclidien de dimension inférieure à $n - 1$. Nous allons envisager deux cas.

Cas 1. — $\overline{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$

Alors il existe $L \in \mathcal{L}$ et $K \in \mathcal{C}_C$ tels que $\overline{C} = L + K$. On montre que $L = \ell(C)$ et que l'on peut choisir $K = p_{\ell(C)^\perp}(C)$. D'après [10, théorème 6.3 et corollaire 6.6.2],

$$\text{ir } C = \text{ir } \overline{C} = L + \text{ir } K.$$

Choisissons un élément x dans A qui est non vide; on a $x - p_{\ell(C)^\perp}(x) \in \ell(C)$. Donc

$$R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\} + B_{\ell(C)}(0, r) \subset \text{ir } K + L = \text{ir } C \subset C.$$

Cas 2. — $\overline{C} \notin \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$.

Nous allons décomposer la preuve en trois étapes.

Étape 1. — Montrons tout d'abord qu'il existe $e_n \in C_\infty \cap \vec{A}$, $\|e_n\| = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in A$ tel que $B_{\ell(C)}(x_k, k) \subset C$. Si une sous-suite de (x_k) converge vers un élément \bar{x} , alors on aura

$$\{\bar{x}\} + \ell(C) \subset \bar{C}$$

et $\ell(C) = \ell(\bar{C})$ est la partie linéaire de \bar{C} ce qui implique que $\bar{C} \in \mathcal{L} + \mathcal{C}_C$. Ceci est impossible. Ainsi nous avons $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k\| = +\infty$; en toute généralité nous pouvons supposer que la suite $(x_k/\|x_k\|)$ converge vers un élément e_n de E , $\|e_n\| = 1$. Comme $x_k \in A \cap C$, nous déduisons que $e_n \in \vec{A} \cap C_\infty$ [10, théorème 8.2].

Étape 2. — Posons

$$E' = \{e_n\}^\perp, \quad C = p_{E'}(C) \quad \text{et} \quad A' = A \cap E'$$

et vérifions que les hypothèses du théorème sont satisfaites dans l'espace euclidien E' où nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque $\dim E' = n - 1$. D'après la proposition 1(viii),

$$\ell(C) = \ell(C') + \mathbb{R}e_n.$$

Montrons que A' localise C' . Soit $r > 0$; il existe $x \in A$ tel que $B_{\ell(C)}(x, r) \subset C$. Soit alors

$$z' \in B_{\ell(C')}(x', r) \quad \text{où} \quad x' \stackrel{\text{def}}{=} p_{E'}(x) \in A'$$

d'après l'étape 1; $z' - x' \in \ell(C')$ et $\|z' - x'\| \leq r$. Posons

$$z \stackrel{\text{def}}{=} z' + (x - x');$$

on a

$$z - x \in \ell(C') \subset \ell(C) \quad \text{et} \quad \|z - x\| \leq r,$$

donc $z \in C$ et alors $z' = p_{E'}(z) \in C'$. Ainsi $B_{\ell(C')}(x', r) \subset C'$ et A' localise C' .

Posons $C_1 = p_{\ell(C)^\perp}(C)$ et notons

$$\varepsilon = \inf_{r \in \mathbb{R}} d(r, (\text{aff } C_1) \setminus (\text{ir } C_1)) > 0.$$

Alors

$$R' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y \in \text{aff } C_1 \mid d(y, R) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \mathcal{C}_C$$

et vérifie $R \subset \text{ir } R'$ et $R' \subset \text{ir } C_1$.

Remarquons enfin que $\ell(C)^\perp = \ell(C')^{\perp E'}$ et alors

$$R' \subset \text{ir}(p_{\ell(C)^\perp}(C)) = \text{ir}(p_{\ell(C)^\perp}(C')) = \text{ir}(p_{\ell(C')^{\perp E'}}(C')).$$

Étape 3. — Nous allons dans cette étape appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure. Il existe $x'_{r+1} \in A'$ tel que

$$K'_1 \stackrel{\text{def}}{=} R' + \{x'_{r+1} - p_{\ell(C')^{\perp E'}}(x'_{r+1})\} + B_{\ell(C')}(0, r+1) \subset C'.$$

La fonction convexe ϕ définie, pour $z \in E'$, par

$$\phi(z) = \inf\{t \geq 0 \mid z + te_n \in \overline{C}\}$$

est donc à valeurs finies sur K'_1 . On a, grâce à [10, corollaire 6.6.2],

$$\text{ir } K'_1 = \text{ir } R' + \{x_{r+1} - p_{\ell(C)^\perp}(x'_{r+1})\} + \text{ir } B_{\ell(C')}(0, r+1) \supset K'_2.$$

D'après [10, théorème 10.1], ϕ est alors continue sur le compact

$$K'_2 = R + \{x'_{r+1} - p_{\ell(C)^\perp}(x'_{r+1})\} + B_{\ell(C')}(0, r).$$

Il existe donc $t_0 \geq 0$ tel que $K'_2 + [t_0, +\infty[e_n \subset \overline{C}$; et en posant $x = x'_{r+1} + (r + t_0)e_n$, qui est bien un élément de A d'après l'étape 1, on a

$$R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\} + B_{\ell(C')}(0, r) + [-r, +\infty[e_n \subset \overline{C}$$

et en particulier, nous déduisons $R + \{x - p_{\ell(C)^\perp}(x)\} + B_{\ell(C')}(0, r) \subset \overline{C}$. \square

Nous donnons comme exemple d'application le corollaire suivant.

COROLLAIRE 10. — *Si $\ell(C) \neq E$, alors :*

- (i) *C est contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles distants de d telle que C contienne des*

segments perpendiculaires aux deux hyperplans et de longueur arbitrairement proche de d ;

(ii) nous sommes dans l'une des situations suivantes :

(S1) C est contenu dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans affines parallèles distants de $2r_C$;

(S2) il existe $A \in \mathcal{A}$ de dimension $n - 2$ tel que

$$\lim_{r \rightarrow r_C^-} \sup_{\{x \in C \mid B_E(x, r) \subset C\}} d(x, A) = 0.$$

Preuve

(i) Posons $C_1 = p_{\ell(C)^\perp}(C)$ et notons d le diamètre de $\overline{C_1}$. Comme $\overline{C_1}$ est compact, il existe $y_1, y_2 \in \overline{C_1}$ tel que $\|y_1 - y_2\| = d$. Nous allons envisager deux cas.

Cas 1. — $d = 0$

Alors C_1 est réduit à un point et tout hyperplan contenant $C_1 + \ell(C)$ répond à la question.

Cas 2. — $d \neq 0$

Posons $p = (y_2 - y_1) / \|y_2 - y_1\|$; pour tout $z \in C_1$,

$$p \cdot y_1 \leq p \cdot z \leq p \cdot y_2$$

et donc, pour $x \in C$,

$$p \cdot y_1 \leq p \cdot x \leq p \cdot y_2.$$

Les deux hyperplans $H_i = \{e \in E \mid p \cdot e = p \cdot y_i\}$ ($i = 1, 2$) sont donc parallèles et distants de d . Considérons maintenant le segment $B_t = t\{y\} + (1 - t)[y_1, y_2]$, où $t \in]0, 1[$ et où $y \in \text{ir } C_1$. En appliquant le théorème 9 avec $A = E$, $R = B_t \subset \text{ir } C_1$ et $r = 1$, nous obtenons

$$B_t + \{x_t - p_{\ell(C)^\perp}(x_t)\} \subset C$$

et le résultat est prouvé.

(ii) Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 4.1. — Soit C' un convexe compact non vide de l'espace euclidien E_1 de dimension finie n_1 . On définit une fonction concave r_1 sur C' par

$$r_1(x) = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid B_{E_1}(x, r) \subset C' \} = d(x, \overline{E_1 \setminus C'}) .$$

Notons alors

$$\bar{r}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ r_1(x) \mid x \in C' \}, \quad S_1 = \arg \max \{ r_1(x) \mid x \in C' \}$$

et enfin, pour $x \in C'$,

$$I_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} B_{E_1}(x, r_1(x))^* \cap C'^* .$$

Alors, nous avons :

- (a) S_1 est un convexe compact non vide et $\dim S_1 \leq n_1 - 1$;
- (b) si $x \in \text{int } C'$, alors $x \in S_1$ est équivalent à $x \in \text{co } I_1(x)$;
- (c) si $\dim S_1 = n_1 - 1$, C' est dans une région de l'espace délimitée par deux hyperplans parallèles et distants de $2\bar{r}_1$.

Preuve

(a) Le fait que S_1 soit un convexe compact non vide est classique. Si $\text{int } S_1 \neq \emptyset$, alors il existe $x \in S_1$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B_{E_1}(x, \varepsilon) \subset S_1$; alors $B_{E_1}(x, \bar{r}_1 + \varepsilon) \subset C'$ ce qui contredit la définition de \bar{r}_1 .

(b) Soit $x \in \text{int } C'$; comme la fonction $-r_1$ est convexe sur C' , on a $x \in S_1$ si et seulement si $0 \in \partial(-r_1)(x)$, où $\partial(-r_1)$ désigne la sous-différentielle au sens de l'analyse convexe de la fonction $-r_1$. Notons alors ∂^c la sous-différentielle au sens de Clarke. D'une part, d'après [6, propositions 2.2.7 et 2.3.1], nous avons

$$\partial(-r_1)(x) = \partial^c(-r_1)(x) = -\partial^c r_1(x) ;$$

d'autre part, nous avons $\partial^c r_1(x) = \overline{\text{co}}(\{x\} - I_1(x))$ (utiliser par exemple les arguments que l'on trouve dans la preuve du théorème 2.5.6 de [6]). Nous obtenons donc

$$\partial(-r_1)(x) = -\overline{\text{co}}(\{x\} - I_1(x))$$

et on conclut en remarquant que $I_1(x)$ est compact.

(c) Si $\bar{r}_1 = 0$, alors $\text{int } C' = \emptyset$ et C' est contenu dans l'hyperplan affine $\text{aff } C'$ et le résultat est prouvé dans ce cas.

Nous supposons désormais que $\bar{r}_1 > 0$. Choisissons un élément x dans $\text{ir } S_1$ qui est non vide. Posons $(\text{aff } S_1)^\perp = \mathbb{R}d, \|d\| = 1$ et vérifions l'inclusion

$$I_1(x) \subset \{x + \bar{r}_1 d; x - \bar{r}_1 d\}.$$

Soit $z \in I_1(x)$; notons $z_1 = p_{\text{aff } S_1}(z)$. Alors pour $\lambda \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \|z - ((1-\lambda)x + \lambda z_1)\|^2 &= \|z - x\|^2 + \lambda^2 \|x - z_1\|^2 + 2\lambda(z - x) \cdot (x - z_1) \\ &= \bar{r}_1^2 + \lambda(\lambda - 2)\|x - z_1\|^2. \end{aligned}$$

Si $x \neq z_1$, alors $z \in \text{int } B_{E_1}((1-\lambda)x + \lambda z_1, \bar{r}_1)$; comme, pour λ assez petit, $(1-\lambda)x + \lambda z_1 \in S_1$, on déduit $z \in \text{int } C'$ ce qui est impossible. Donc $x = z_1$ et ceci entraîne $z \in \{x + \bar{r}_1 d; x - \bar{r}_1 d\}$.

Compte tenu de (b), comme $x \in \text{int } C'$ (car $\bar{r}_1 > 0$), il vient alors

$$I_1(x) = \{x + \bar{r}_1 d; x - \bar{r}_1 d\}.$$

Les deux hyperplans

$$\{y \in E_1 \mid d \cdot y = d \cdot x + \bar{r}_1\} \quad \text{et} \quad \{y \in E_1 \mid d \cdot y = d \cdot x - \bar{r}_1\}$$

satisfont alors aux conditions demandées.

Continuation de la preuve, partie (ii)

Nous allons appliquer le lemme 4.1 avec

$$E_1 = \ell(C)^\perp \quad \text{et} \quad C' = \overline{p_{\ell(C)^\perp}(C)}.$$

Constatons que grâce au théorème 9, nous avons $\bar{r}_1 = r_C$. Deux situations seulement peuvent alors se produire (utiliser la partie (a) du lemme 4.1).

Première situation. — $\dim S_1 = n_1 - 1$

Dans ce cas, en utilisant la partie (c) du lemme 4.1 on vérifie (S1)

Deuxième situation. — $\dim S_1 < n_1 - 1$

Dans ce cas, en prenant un sous-espace affine de dimension $n-2$ contenant $(\text{aff } S_1) + \ell(C)$ (ce qui est possible car $\dim((\text{aff } S_1) + \ell(C)) \leq n-2$), on montre facilement que (S2) est vérifiée. \square

Références

- [1] BAIR (J.) .— *A geometric description of the inner aperture of a convex set*, Acta Math., **38**, 1-4 (1981) , pp. 237-240.
- [2] BAIR (J.) .— *Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **35**, n° 2 (1983), pp. 177-187.
- [3] BRONDSTED (A.) .— *The inner aperture of a convex set*, Pacific J. Math., **72**, n° 2 (1977) , pp. 335-340.
- [4] BRONDSTED (A.) .— *Intersections of translates of convex sets*, Mathematika, **24** (1977), pp. 122-129.
- [5] CLARK (C.) .— *On convex sets of finite width*, J. London Math. Soc., **43** (1968), pp. 513-516.
- [6] CLARKE (F.) .— *Optimization and nonsmooth Analysis*, New York, John Wiley (1983).
- [7] GALE (D.) et KLEE (V.) .— *Continuous convex sets*, Math. Scand., **7** (1959), pp. 379-391.
- [8] KLEE (V.) .— *On a question of Colin Clark concerning three properties of convex sets*, Canadian Math. Bull. (1972), pp. 535-537.
- [9] LARMAN (D. G.) .— *On the inner aperture and intersections of convex sets*, Pacific J. Math., **55** (1974), pp. 219-232.
- [10] ROCKAFELLAR (R. T.) .— *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
- [11] THORP (E.) and WHITLEY (R.) .— *Partially bounded sets of infinite width*, J. Reine Angew. Math., **248** (1971), pp. 117-122.