

FRANÇOIS LAUDENBACH

**Trois constructions en topologie symplectique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 6, n<sup>o</sup> 4  
(1997), p. 697-709

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1997\\_6\\_6\\_4\\_697\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_4_697_0)

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Trois constructions en topologie symplectique<sup>(\*)</sup>FRANÇOIS LAUDENBACH<sup>(1)</sup>


---

**RÉSUMÉ.** — On établit les trois résultats suivants :

- 1) il existe des hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{2n}$ , muni de sa structure symplectique standard  $\omega_0$ , qui sont de type contact et qui ne sont pas diffeomorphes à la sphère de dimension  $2n - 1$ . D'après un théorème de Viterbo, elles portent au moins une caractéristique fermée ;
- 2) il est possible de définir la somme connexe à l'infini de deux variétés symplectiques qui sont convexes à l'infini dans le sens de Eliashberg-Gromov ;
- 3) il existe des hypersurfaces de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  non simplement connexes avec seulement un nombre fini de caractéristiques fermées.

**ABSTRACT.** — The following three results are proved.

- 1) There are hypersurfaces in  $\mathbb{R}^{2n}$ , endowed with its standard symplectic structure  $\omega_0$ , which are not diffeomorphic to the  $(2n - 1)$ -sphere and actually of various topological type, but which are of contact type and thus, according to Viterbo's theorem, carry at least one closed characteristic line.
- 2) It is possible to define the connected sum at infinity of two symplectic manifolds which are convex at infinity in the sense of Eliashberg-Gromov.
- 3) There are non-simply connected hypersurfaces in  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  carrying at most a finite number of closed characteristic lines.

**AMS Classification :** 58F05

**KEY-WORDS :** Hamiltonian flow, periodic orbit, Liouville flow, hypersurface of contact type, connected sum, surgery, handlebody.

---

<sup>(\*)</sup> Reçu le 12 décembre 1997

<sup>(1)</sup> Centre de mathématiques, URA CNRS 169, Ecole polytechnique, F-91128 Palaiseau (France)

## 0. Introduction

En 1986, Claude Viterbo a résolu la conjecture de Weinstein dans  $\mathbb{R}^{2n}$  [Vi] : toute hypersurface compacte de type contact dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , muni de sa structure symplectique standard  $\omega_0$ , a au moins une caractéristique fermée.

On rappelle que, si  $(M, \omega)$  est une variété symplectique, un champ de vecteurs  $X$  est un *champ de Liouville* si la dérivée de Lie  $L_X$  vérifie  $L_X \omega = \omega$ . Une hypersurface  $\Sigma$  est de *type contact* s'il existe un champ de Liouville défini au voisinage de  $\Sigma$  et transverse à  $\Sigma$ . Elle est de *type contact restreint* s'il existe un tel champ de Liouville globalement défini. Evidemment, dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , le bord d'un domaine étoilé est de type contact restreint, mais topologiquement cette hypersurface n'est autre qu'une sphère  $S^{2n-1}$ . J'ai alors proposé une construction par chirurgie produisant des hypersurfaces de type contact avec des topologies variées; en vertu de [Vi], elles possèdent au moins une caractéristique fermée.

**THÉORÈME 1.** — *Toute hypersurface compacte connexe, niveau d'une fonction de Morse  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dont tous les points critiques ont leurs indices  $\leq n - 1$ , est isotope à une hypersurface de type contact restreint.*

Cette construction a circulé oralement, mais n'a jamais été écrite, sauf dans des lettres privées. C'est la première des trois constructions du présent texte. La seconde construction a été exposée à la *rencontre franco-russe de géométrie* (C.I.R.M. - Luminy Marseille, 1992) et est une cousine de la précédente via les singularités génériques des champs de Liouville.

Comme un champ de Liouville dilate le volume, un tel champ n'existe que sur une variété ouverte. Avec Eliashberg-Gromov [EG], on dit que  $(M, \omega)$  est *convexe à l'infini* s'il existe un champ de Liouville  $X$  sur  $M$  et une hypersurface  $\Sigma$ , transverse à  $X$ , tels que le flot positif de  $X$  appliqué à  $\Sigma$  conjugue  $\Sigma \times [0, +\infty)$  à un voisinage de l'infini dans  $M$ . On dira que  $X$  *trivialise* un voisinage de l'infini.

Par ailleurs, pour les variétés ouvertes, on a une notion de *somme connexe à l'infini* : si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux variétés ouvertes,  $M_1 \#_{\infty} M_2$  est obtenue en plongeant proprement un demi-espace fermé  $E_1 \cong \mathbb{R}_+^{2n}$  dans  $M_1$  (resp.  $E_2$  dans  $M_2$ ), en formant les variétés à bord  $M'_1 = M_1 \setminus \text{int } E_1$  et  $M'_2 = M_2 \setminus \text{int } E_2$  et en recollant ces deux variétés par leurs bords

$\mathbb{R}^{2n-1}$ . Comme V. Poénaru me l'a fait remarquer, le résultat de cette somme connexe n'est indépendant des choix que si  $M_1$  et  $M_2$  sont connexes et 1-connexes à l'infini et si la dimension est  $\geq 4$ .

THÉORÈME 2. — *Si  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$  sont convexes à l'infini, alors  $M_1 \#_{\infty} M_2$  possède une structure symplectique convexe à l'infini et qui induit  $\omega_i$  sur  $M_i^!$  pour  $i = 1, 2$ .*

Ce résultat contraste avec ce qu'on attend pour les sommes connexes de variétés compactes, à savoir qu'il n'y a aucune structure symplectique sur une somme connexe de variétés différentiables, à quelques exceptions près (les éclatées de variétés kählériennes). Il permet d'avoir des exemples de variétés symplectiques convexes à l'infini qui ne sont pas du type standard, espaces cotangents, symplectisées de variétés de contact compactes. La convexité à l'infini retient mon attention puisqu'elle est l'hypothèse symplectique cruciale pour le théorème d'engouffrement des isotopies de sous-variétés lagrangiennes [La].

En 1994, Viktor Ginzburg a prouvé l'existence d'hypersurfaces compactes dans  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $2n \geq 8$ , sans caractéristiques fermées [Gi] (résultat établi indépendamment par M. Herman mais non publié). Précisément, toute hypersurface n'ayant qu'un nombre fini de caractéristiques fermées peut être approchée au sens  $C^0$  par une hypersurface sans caractéristiques fermées. Bien sûr, les ellipsoïdes génériques satisfont l'hypothèse de finitude et peuvent donc être approchés par des hypersurfaces, difféomorphes à la sphère  $S^{2n-1}$ , sans caractéristiques fermées. Comme dans le premier problème discuté ici, on peut alors se demander si le même résultat peut être obtenu avec des hypersurfaces dont la topologie est plus compliquée.

THÉORÈME 3. — *Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  n'ayant qu'un nombre fini de caractéristiques fermées. Alors il existe un plongement*

$$\Sigma \# 4(S^1 \times S^{2n-2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0),$$

*de la somme connexe de  $\Sigma$  et de quatre exemplaires de  $S^1 \times S^{2n-2}$ , avec seulement un nombre fini de caractéristiques fermées.*

## 1. Démonstration du théorème 1

### 1.1 Disque de chirurgie

Une hypersurface compacte connexe  $\Sigma$  sépare  $\mathbb{R}^{2n}$  en deux composantes. On définit l'extérieur de  $\Sigma$  comme l'adhérence de la composante non bornée; on la note  $\text{Ext } \Sigma$ .

Étant donné un disque  $\Delta$  de dimension  $k$  plongé dans l'extérieur de  $\Sigma$  et rencontrant  $\Sigma$  transversalement le long de son bord, on dit que  $\Delta$  est un *disque de chirurgie* d'indice  $k$ . Il permet de fabriquer une nouvelle hypersurface  $\Sigma^\Delta$ , qui est l'intersection de  $\text{Ext } \Sigma$  et du bord d'un voisinage régulier de  $\Sigma \cup \Delta$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'hypersurface  $\Sigma^\Delta$  est bien définie à isotopie près et une isotopie de  $\Delta$  parmi les disques de chirurgie fournit une isotopie de  $\Sigma^\Delta$ .

Cette construction est étroitement liée à la théorie de Morse. Si  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  sont deux niveaux réguliers d'une fonction de Morse  $f$  (disons que  $\Sigma'$  est dans  $\text{Ext } \Sigma$ ) et si  $f$  a un seul point critique dans la région entre  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , alors  $\Sigma'$  est une réalisation de  $\Sigma^\Delta$ , où  $\Delta$  est la variété stable du point critique pour le champ  $\text{grad } f$ .

Au voisinage d'un extremum local de  $f$ , une sphère de niveau est de type contact restreint. Par conséquent, le théorème 1 résulte facilement des deux propositions suivantes.

### 1.2 Chirurgie avec disque isotrope

On suppose que  $\Sigma$  est de type contact restreint. Soit  $X$  un champ de Liouville défini sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , transverse à  $\Sigma$ . On notera  $\lambda^X$  la 1-forme différentielle  $\omega_0$ -duale de  $X : \lambda(\cdot) = \omega_0(X, \cdot)$ . Dire que  $X$  est un champ de Liouville pour  $\omega_0$  revient à dire que  $d\lambda^X = \omega_0$ .

**PROPOSITION.** — *On suppose que le disque de chirurgie  $\Delta$  est  $\omega_0$ -isotrope en tous ses points et qu'il est tangent à  $X$  le long de son bord. Alors une réalisation de  $\Sigma^\Delta$  à isotopie près est de type contact restreint.*

*Démonstration.* — On construit d'abord un champ de Liouville  $X'$  au voisinage de  $\Sigma \cup \Delta$  avec les propriétés suivantes :

- 1)  $X' - X$  est un champ de vecteurs hamiltonien (ce qui assure que  $X'$  peut se globaliser en un champ de Liouville sur  $\mathbb{R}^{2n}$ );

- 2)  $X' = X$  au voisinage de  $\Sigma$ ;
- 3)  $X'$  est tangent à  $\Delta$  et radial avec un zéro au centre  $a$  du disque  $\Delta$ ;
- 4) le point  $a$  est un zéro hyperbolique de  $X'$  et  $\Delta$  est sa variété stable (locale).

Il s'agit pour cela de construire une fonction  $h$  telle que,  $\overrightarrow{dh}$  désignant son champ  $\omega_0$ -dual,  $X + \overrightarrow{dh}$  ait les propriétés 2) à 4) ci-dessus. Le 2) signifie que  $h$  est localement constante au voisinage de  $\Sigma$ . Comme  $X$  est un champ de Liouville global, on a  $d\lambda^X = \omega_0$  le long de  $\Delta$  et, comme  $\Delta$  est isotrope, la 1-forme  $\lambda^X$  induit une forme fermée (donc exacte) sur  $\Delta$  :

$$i^*\lambda^X = df, \quad f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Comme  $X$  est tangent à  $\Delta$  au voisinage de  $\partial\Delta$ ,  $f$  est localement constante au voisinage de  $\partial\Delta$ . Donc, pour avoir  $X'$  tangent à  $\Delta$ , il suffit de prendre  $h \mid \Delta = -f$ . Par ailleurs, on peut se donner  $X' \mid \Delta$  arbitrairement et ainsi le 1-jet de  $h$  est déterminé en tout point de  $\Delta$ . Ainsi 3) est satisfait.

Enfin, pour tout  $k \leq n$ , on connaît un champ de Liouville linéaire dans  $\mathbb{R}^{2n}$  dont l'origine est un zéro d'indice  $k$ . Dans des coordonnées de Darboux (c.-à-d. qui laissent  $\omega_0$  sous forme standard) linéarisant  $\Delta$  au voisinage de  $a$ , on prend pour  $X'$  la trace d'un tel champ; ce choix détermine  $h$  au voisinage de  $a$ . On sait bien qu'il existe une fonction  $h$  ayant un germe prescrit au voisinage de  $\Sigma$  et de  $a$ , et un 1-jet prescrit le long de  $\Delta$ , pourvu que ce dernier soit compatible avec les deux germes, ce qui est le cas.

Une fois construit le champ  $X'$ , on peut choisir le voisinage régulier de  $\Sigma \cup \Delta$  avec un bord transverse à  $X'$ . Cette réalisation de  $\Sigma^\Delta$  est donc de type contact restreint (fig. 1).  $\square$

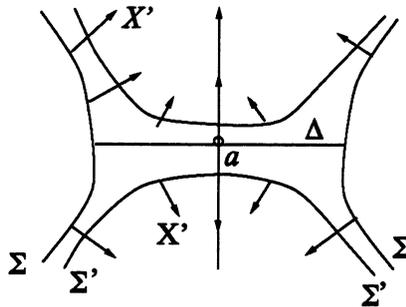


Fig. 1

*Remarque.* — Si  $\Sigma$  est seulement de type contact et si  $k = 2$ , il y a une obstruction cohomologique dans la construction précédente lorsque  $\int_{\partial\Delta} \lambda^X \neq 0$ .

### 1.3 Isotopie de disques

On considère (presque) le même contexte que dans le paragraphe 1.2 :  $\Sigma$  est une hypersurface de type contact,  $X$  un champ de Liouville défini au voisinage de  $\Sigma$ ,  $\Delta$  un disque de chirurgie de dimension  $k$ .

**PROPOSITION.** — *On suppose  $k \leq n - 1$ . Alors  $\Delta$  est isotope parmi les disques de chirurgie à un disque isotrope pour  $\omega_0$  et tangent à  $X$  au voisinage de son bord.*

*Démonstration.* — On observe qu'une homotopie régulière générique  $(\Delta, \partial\Delta) \rightarrow (\text{Ext } \Sigma, \Sigma)$  est une isotopie à cause des conditions de dimension. Donc il suffit de savoir résoudre le problème dans le cadre des disques immergés, ce que l'on peut faire grâce au théorème de Gromov-Lees [Gr, p. 334].

Pour ce problème, le  $h$ -principe de Gromov énonce que l'espace des immersions du  $k$ -disque avec les propriétés voulues a le type d'homotopie d'un espace d'immersions formelles. En particulier, les deux espaces sont non vides en même temps. En l'occurrence, les immersions formelles du problème à résoudre sont les monomorphismes de fibrés tangents

$$\varphi : T\Delta \longrightarrow T(\text{Ext } \Sigma)$$

avec les conditions suivantes :

- 1) pour tout  $x \in \Delta$ , le  $k$ -plan  $\varphi(T_x\Delta)$  est contenu dans un plan lagrangien de  $\mathbb{R}^{2n}$ ;
- 2) pour tout  $x \in \partial\Delta$ , le  $k$ -plan  $\varphi(T_x\Delta)$  contient  $X$  et, par dualité symplectique, est alors contenu dans  $\ker \lambda^X$ .

La condition 2) assure la transversalité à  $\Sigma$  et assure que la restriction de  $\varphi$  à  $T\partial\Delta$  est une immersion legendrienne formelle. Il reste maintenant à voir que notre espace d'immersions formelles est non vide. Or génériquement, le disque initial  $i(\Delta)$  évite les zéros de  $X$  que l'on peut supposer isolés. Alors  $(\ker \lambda^X, \mathbb{R}X)$  définit une paire de sous-fibrés du fibré tangent de  $\text{Ext } \Sigma$  le long de  $\Delta$ . Comme  $\Delta$  est un disque, il y a une trivialisat

simultanée de ces trois fibrés. Il n'y a alors aucune obstruction à intercaler un sous-fibré en  $k$ -plans isotropes. Cela donne une immersion formelle vérifiant les 1) et 2) ci-dessus. Le  $h$ -principe donne alors une homotopie de  $i : (\Delta, \partial\Delta) \hookrightarrow (\text{Ext } \Sigma, \Sigma)$  jusqu'à une immersion isotrope  $\Phi : \Delta \rightarrow \text{Ext } \Sigma$  qui, en position générale, est un plongement isotrope. Mais de nouveau, génériquement, une homotopie entre  $i$  et  $\Phi$  est une isotopie, vu les conditions de dimension.  $\square$

*Remarque.* — Si  $k = 1$ , il n'y a presque rien à faire, seulement rendre  $\Delta$  tangent à  $X$  au voisinage de  $\partial\Delta$ . Le  $h$ -principe est ici inutile.

## 2. Démonstration du théorème 2

### 2.1 Somme connexe à l'infini

Soit  $(M, \omega)$  une variété convexe à l'infini et soit  $X$  un champ de Liouville trivialisant un voisinage de l'infini. Si  $x$  est un point de ce voisinage et si  $\ell$  est sa demi-orbite positive par le flot de  $X$ , alors  $\ell$  admet un voisinage, positivement invariant par ce flot, et muni de coordonnées de Darboux dans lesquelles on a

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad (1)$$

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n. \quad (2)$$

Près de l'origine de  $\ell$ , ce modèle est donné par le théorème de Darboux, appliqué à la forme de contact induite par  $\lambda^X$  sur un petit morceau d'hypersurface transverse à  $\ell$ . La conjugaison avec un modèle le long de  $\ell$  tout entier est obtenue en propageant une conjugaison locale (au voisinage d'un point) par les flots de  $X$  à la source et du modèle au but.

On expliquera plus loin une version Liouville de la bifurcation *selle-nœud*, à support dans ce voisinage de  $\ell$ , qui produit un nouveau champ de Liouville  $X'$ , avec les propriétés suivantes :

- 1) le champ  $X'$  est tangent à  $\ell$ ;
- 2) en se déplaçant sur  $\ell$  de son origine jusqu'à l'infini, on rencontre une selle  $a$  (zéro hyperbolique dont la variété stable est de dimension 1) et une source  $b$ ;

- 3) la variété instable  $W$  de  $a$  est l'image d'un plongement propre de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  dans  $M$  et borde un demi-espace  $\mathbb{R}_+^{2n}$  qui est l'adhérence de la variété instable de  $b$ .
- 4) la variété instable  $W$  et le germe de la 1-forme  $\lambda^{X'}$  le long de  $W$  sont conjugués à l'hyperplan  $P_0$  d'équation  $x_1 = 0$ , muni du germe de  $\lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est la 1-forme définie par :

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2} x_1 dy_1 - \frac{3}{2} y_1 dx_1 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^n x_i dy_i - y_i dx_i \right).$$

Le champ de Liouville dual de  $\lambda_0$  est linéaire; la variété stable de l'origine est l'axe des  $x_1$  et la variété instable est l'hyperplan  $P_0 = \{x_1 = 0\}$ . On observe que la symétrie centrale préserve  $P_0$  et  $\lambda_0$ , et échange les deux côtés de  $P_0$ . Une telle involution est exactement ce dont on a besoin pour faire une somme connexe à l'infini.

Précisément, soit  $(M_i, \omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , deux variétés convexes à l'infini. Chacune est munie d'un champ de Liouville  $X_i$  trivialisant un voisinage de l'infini. On fait la bifurcation précédente; elle donne un champ de Liouville  $X'_i$  avec une selle  $a_i$  et une source  $b_i$ . Soit  $M'_i$  le complémentaire de la variété instable de  $b_i$ . On peut recoller  $M'_1$  et  $M'_2$  en identifiant les variétés instables de  $a_1$  et de  $a_2$  via la symétrie centrale de  $P_0$ . La variété recollée est alors munie d'une structure symplectique et d'un champ de Liouville qui en fait une variété convexe à l'infini.  $\square$

## 2.2 Bifurcation selle-nœud pour un champ de Liouville

On se contente de donner le résultat de la bifurcation, laissant au lecteur le soin de mettre le paramètre de déformation (qui d'ailleurs ne nous est pas utile ici). On se place dans le modèle donné par l'équation (1). Disons que l'origine de  $\ell$  coïncide avec l'origine des coordonnées. Soit  $h(x_1)$  une fonction négative à support compact, avec les propriétés suivantes :

- la fonction  $h$  prend deux fois la valeur  $-1$ , en des points  $a$  et  $b$ ,  $0 < a < b$ ;
- près de  $a$  et de  $b$  la fonction est affine de dérivée  $-1/2$  et  $+1/2$  respectivement;
- la dérivée de  $h$  est partout de module majoré par 1.

Soit  $\varphi(r)$  une fonction cloche valant 1 près de 0, et valant 0 si  $r$  est supérieur à un  $\epsilon$  donné à l'avance. On considère alors la fonction  $H$  définie par la formule suivante :

$$H(x_1, y_1, x_2, \dots) = h(x_1)y_1\varphi(|y_1|)\varphi(x_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Le champ  $X'$  est alors obtenu en ajoutant à  $X$  le champ hamiltonien  $\overline{dH}$ . Un calcul montre que le champ  $X'$  ne s'annule qu'en  $a$  et  $b$ . En effet,

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x_1} \right| < |y_1|$$

en tout point où  $y_1 \neq 0$ ; quant au champ

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots - \frac{\partial H}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial y_n},$$

il est orthogonal à

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Le champ  $X'$  est linéaire au voisinage des deux zéros, une fois ceux-ci translatés à l'origine. La variété stable de  $a$  est portée par le premier axe et sa variété instable locale est dans l'hyperplan orthogonal. Vu que la fonction  $y_1^2 + x_2^2 + \dots + y_n^2$  est croissante sur les orbites, on est sûr que celles dont le point  $\alpha$ -limite est  $a$  vont à l'infini en restant dans le modèle voisinage de  $\ell$ ; en effet, au voisinage du bord du modèle, la fonction  $H$  est nulle et le champ  $X$  est non sortant du modèle, donc le champ  $X'$  aussi.

### 3. Démonstration du théorème 3

#### 3.1 Anse d'indice 1

On commence par définir un modèle pour une anse d'indice 1. Il s'agit d'une hypersurface  $\mathcal{M}$ , proprement plongée dans  $[-1, +1] \times \mathbb{R}^{2n-1}$ , diféomorphe à  $[-1, +1] \times S^{2n-2}$ . On en décrira la dynamique hamiltonienne.

Le modèle choisi est défini par une équation  $h = 0$ , où

$$h(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) := q(y_1, x_2, y_2, \dots, y_n) - f(x_1^2),$$

où  $q$  est une forme quadratique définie positive et où  $f(t)$  est une fonction positive, strictement croissante et de dérivée  $\infty$  en  $t = 1$ .

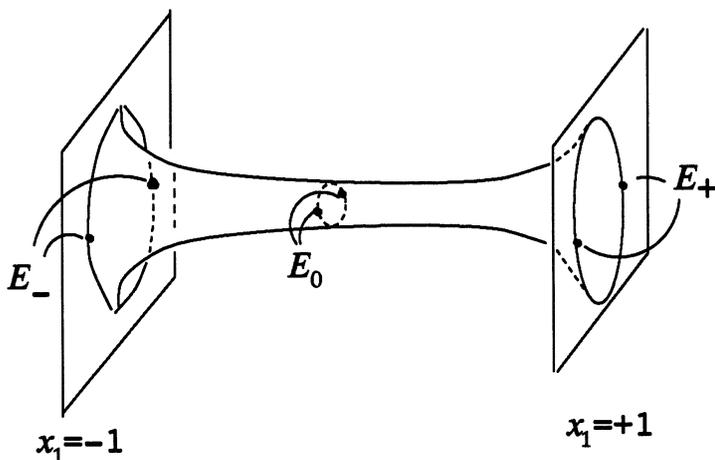


Fig. 2

On précise la forme quadratique  $q$  :

$$q = y_1^2 + \lambda_2(x_2^2 + y_2^2) + \cdots + \lambda_n(x_n^2 + y_n^2)$$

où les  $\lambda_i$  sont tous distincts. On observe que, le long de  $\partial_{\pm}\mathcal{M} := \mathcal{M} \cap \{x_1 = \pm 1\}$ , l'hypersurface  $\mathcal{M}$  est tangente à l'hyperplan  $\{x_1 = \pm 1\}$ .

On note  $E_0 \subset \mathcal{M}$  l'ellipsoïde de dimension  $(2n - 3)$ , d'équation  $h = 0$ ,  $x_1 = y_1 = 0$ . Le champ hamiltonien  $\overrightarrow{d\tilde{h}}$  lui est tangent et, vu l'hypothèse sur les  $\lambda_i$ , n'y possède qu'un nombre fini d'orbites périodiques. Le plan symplectique  $\mathbb{R}_{x_1 y_1}^2$  est tangent à  $\mathcal{M}$  le long de  $E_0$  et transverse à  $E_0$  dans  $\mathcal{M}$ . Un calcul simple montre que la projection de  $\overrightarrow{d\tilde{h}}$  sur ce plan y présente un zéro hyperbolique (à l'origine), du type selle. On en déduit que  $E_0$  a une variété stable  $W^s$  (resp. instable  $W^u$ ) avec deux composantes chacune diffeomorphe à  $S^{2n-3} \times [0, +\infty[$ .

Pour décrire complètement la dynamique hamiltonienne de  $\mathcal{M}$  on a besoin de quelques autres notations. On note  $S'_{\pm}$  et  $S''_{\pm}$  les deux sphères de dimension  $2n - 3$  qui sont les traces de  $W^s \cup W^u$  dans  $\partial_{\pm}\mathcal{M}$ . Elles sont disjointes de l'équateur  $E_{\pm} := \partial_{\pm}\mathcal{M} \cap \{y_1 = 0\}$ . Disons que  $S'_{\pm}$  est contenue dans  $\{y_1 > 0\}$  et  $S''_{\pm}$  dans  $\{y_1 < 0\}$ . La sphère  $S'_{\pm}$  borde une boule  $D'_{\pm}$  dans  $\partial_{\pm}\mathcal{M} \cap \{y_1 > 0\}$ ; de même  $S''_{\pm}$  borde  $D''_{\pm}$  dans  $\partial_{\pm}\mathcal{M} \cap \{y_1 < 0\}$ . Enfin  $S'_- \cup S''_-$  borde un anneau  $A_-$  dans  $\partial_- \mathcal{M}$  dont l'âme est  $E_-$ ; de même avec l'indice  $+$ . Avec ces notations, on a la proposition suivante.

PROPOSITION

- 1) Toute caractéristique de  $\mathcal{M}$  issue de l'intérieur de  $D'_-$  (resp.  $D''_-$ ) va à  $D'_+$  (resp.  $D''_+$ ). Toute caractéristique issue de l'intérieur de  $A_-$  (resp.  $A_+$ ) retourne à  $A_-$  (resp.  $A_+$ ).
- 2) Les boules  $D'_+$  et  $D'_-$  (resp.  $D''_+$  et  $D''_-$ ) se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe  $x_1$ .

COROLLAIRE. — Le modèle  $\mathcal{M}$  ne contient qu'un nombre fini de caractéristiques fermées, à savoir celles qui sont portées par  $E_0$ .

La démonstration de cette proposition est évidente car le champ hamiltonien  $\vec{d}\bar{h}$  est la somme de champs hamiltoniens portés par les plans symplectiques de coordonnées  $\mathbb{R}^2_{x_i y_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Remarque. — Si on déplace  $\mathcal{M}$  par un difféomorphisme symplectique, on préserve évidemment ses propriétés dynamiques. Or il existe un tel difféomorphisme, qui ne travaille que sur les coordonnées  $x_1, y_1$ , qui place  $\mathcal{M}$  dans  $\{y_1 \geq 0\}$  et les deux composantes de son bord dans l'hyperplan  $\{y_1 = 0\}$ . Dans cette position, dite de *chirurgie*, on peut utiliser  $\mathcal{M}$  pour faire une chirurgie d'indice 1 sur l'hyperplan  $\{y_1 = 0\}$ . L'hypersurface obtenue est difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n-1} \# S^1 \times S^{2n-2}$ .

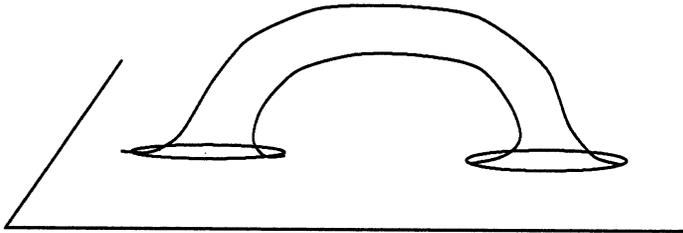


Fig. 3

Certes  $E_0$  ne porte qu'un nombre fini de caractéristiques fermées. Mais, puisqu'il y a des caractéristiques qui joignent  $D''_-$  à  $D''_+$  dans  $\{y_1 = 0\}$ , la dynamique hamiltonienne de cette hypersurface n'est pas contrôlée. La construction suivante lève cette difficulté.

### 3.2 Chirurgie quadruple

On place quatre exemplaires de  $\mathcal{M}$  deux à deux disjoints et en position de chirurgie sur  $\{y_1 = 0\}$  :

- $\mathcal{M}_1$  est dans  $\{y_1 \geq 0, x_1 < 0\}$ .
- $\mathcal{M}_2$  se déduit de  $\mathcal{M}_1$  par une rotation de  $\pi$  dans le plan  $x_1 y_1$  suivie d'une translation parallèle à l'axe  $x_1$  qui amène ses deux bords en position enlacée par rapport aux bords de  $\mathcal{M}_1$  : une droite (orientée), parallèle à l'axe  $x_1$  dans  $\{y_1 = 0\}$  ou bien évite  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , ou bien rencontre successivement  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ .
- $\mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4$  est l'image de  $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  par la symétrie  $(x_1, y_1) \mapsto (-x_1, -y_1)$  qui préserve les autres coordonnées.

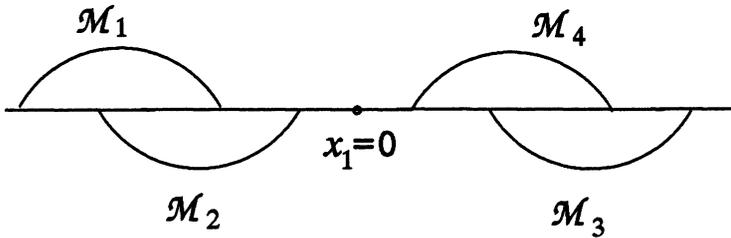


Fig. 4

Disons que ces quatre anses de chirurgie sont dans  $\{-1 < x_1 < +1\}$ . Notons par  $\mathcal{H}$  le résultat de la chirurgie quadruple sur l'hyperplan  $\{y_1 = 0\}$ . Topologiquement,  $\mathcal{H}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n-1} \# 4(S^1 \times S^{2n-2})$ .

PROPOSITION

- 1) L'hypersurface  $\mathcal{H}$  n'a qu'un nombre fini de caractéristiques fermées.
- 2) Si une caractéristique de  $\mathcal{H}$  va d'un point  $a_- \in \{x_1 = -1\}$  à un point  $a_+ \in \{x_1 = +1\}$ , alors  $a_- a_+$  est parallèle à l'axe  $x_1$ .

*Démonstration.* — Considérons une caractéristique  $\ell$  entrant dans  $\mathcal{M}_1$  par  $D'_-(\mathcal{M}_1)$ ; elle en sort par  $D'_+(\mathcal{M}_1)$ . Après un parcours dans le sens  $x_1$  croissant dans l'hyperplan  $\{y_1 = 0\}$ ,  $\ell$  rentre dans  $\mathcal{M}_2$  par  $D''_-(\mathcal{M}_2)$  (en vertu du 2) de la proposition 3.1) et en sort par  $D''_+(\mathcal{M}_2)$  (on a transporté les boules  $D'_\pm$  du modèle par la rotation d'angle  $\pi$ ). De nouveau après un parcours dans le sens  $x_1$  croissant,  $\ell$  entre dans  $\mathcal{M}_1$  par  $D''_+(\mathcal{M}_1)$  et en sort par  $D''_-(\mathcal{M}_1)$ . Puis on revisite  $\mathcal{M}_2$  avant de couper la section  $x_1 = 0$ . Enfin le trajet dans  $\{x_1 > 0\}$  est le symétrique de celui-ci par la symétrie centrale du plan  $x_1 y_1$ .

On peut décrire de la même façon les trajets de toutes les caractéristiques qui ne sont pas sur les variétés stables (ou instables) des ellipsoïdes invariants de chaque anse. Les deux conclusions de la proposition s'en suivent.  $\square$

### 3.3 Fin de la démonstration

Soit  $\Sigma$  une hypersurface n'ayant qu'un nombre fini de caractéristiques fermées. On choisit une carte de Darboux  $U$  linéarisant  $\Sigma$ . A l'intérieur de cette carte, on pratique la chirurgie quadruple sur  $\Sigma$  et on en note  $\Sigma'$  le résultat. Comme, avec les notations de 3.2, l'holonomie du feuilletage caractéristique de  $\mathcal{H}$  (non partout définie) entre les sections  $x_1 = -1$  et  $x_1 = +1$  est l'*identité*, une caractéristique  $\ell'$  de  $\Sigma'$ , qui passe dans  $U$  et en ressort, est fermée si et seulement si la caractéristique  $\ell$  correspondante de  $\Sigma$ , qui coïncide avec  $\ell'$  hors de  $U$ , est elle-même fermée. Donc la chirurgie ne crée pas d'autres orbites fermées que celles portées par les ellipsoïdes des anses de chirurgie.  $\square$

### Références

- [EG] ELIASBERG (Y.) et GROMOV (M.) .— *Convex symplectic manifolds*, Proc. Symposia in pure math. **52**, part 2 (1991), pp. 135-162.
- [Gi] GINZBURG (V.) .— *An embedding  $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $2n - 1 \geq 7$ , whose Hamiltonian flow has no periodic trajectories*, Intern. Math. Res. Notices **2** (1995), pp. 83-98.
- [La] LAUDENBACH (F.) .— *Engouffrement symplectique et intersections lagrangiennes*, Comment. Math. Helvetici **70** (1995), pp. 558-614.
- [Vi] VITERBO (C.) .— *A proof of Weinstein's conjecture in  $\mathbb{R}^{2n}$* , Ann. Inst. Henri-Poincaré, Analyse non linéaire **4** (1987), pp. 337-356.