ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED MALIKI

HAMIDOU TOURÉ

Solution généralisée locale d'une équation parabolique quasi linéaire dégénérée du second ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 1 (1998), p. 113-133

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_113_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 1, 1998

Solution généralisée locale d'une équation parabolique quasi linéaire dégénérée du second ordre(*)

Mohamed Maliki[1] et Hamidou Touré[2]

Résumé. — Nous étudions dans cet article l'équation quasi linéaire

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v$$

de type parabolique pouvant dégénérer en hyperbolique non linéaire du premier ordre pour certaines valeurs de u. Nous introduisons une notion de solution généralisée locale de cette équation; nous établissons le lien avec les notions de solution classique et de solution entropique.

Nous montrons, pour le problème de Cauchy associé avec une donnée initiale bornée, un résultat d'existence et d'unicité de solution généralisée locale.

Abstract. — We consider in this article, the general equation

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v$$

of parabolic type, which may degenerate into first order hyperbolic type, for some values of u.

We introduce a notion of local generalized solution of the equation, we establish connections with classical and entropy type solution. We show, that the associated Cauchy problem with bounded initial datum is well posed, when using the notion of local generalized solution.

1. Introduction

Nous considérons l'équation $E = E(f, \beta, v, Q)$:

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v\,, \quad \text{sur } Q\,, \tag{E}$$

(*) Reçu le 21 novembre 1995, accepté le 6 mai 1996

(1) F.S.T. Mohammedia, Université Hassan II, B.P. 146, Mohammedia (Maroc)

(2) Faculté des Sciences et Techniques, Université de Ouagadougou, 03 B.P. BF-7021 Ouagadougou 03 (Burkina Faso)

où Q est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f, β des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec β croissante (au sens large) et $v \in L^1_{\text{loc}}(Q)$. Lorsque f, β et v sont régulières et $\beta' \geq c > 0$, toute solution faible $u \in L^\infty_{\text{loc}}(Q)$ de (E) est solution classique ([Di], [DT], [Si]). Par contre, évidemment, ceci n'est plus vrai dans le cas général que nous considérons : lorsque $\beta \equiv 0$, (E) se réduit à une loi de conservation scalaire et il est bien connu (même avec f régulière) qu'il n'y a pas existence de solution classique globale du problème de Cauchy associé et, également, qu'il n'y a pas unicité d'une solution faible ([OA], [Kr]).

La théorie de l'équation (E) dans le cas $\beta \equiv 0$ est maintenant bien connue grâce à l'introduction par S. N. Kruskhov de la notion de solution entropique ([Kr], [KrP]); dans le cas où β est strictement croissante, la théorie commence à être bien comprise grâce notamment aux travaux de J. Carrillo ([C1], [C2], [C3]; voir aussi [BT], [DK], [G] et [GT]) et il apparaît maintenant clairement dans ce cas que le problème de Cauchy associé possède une unique solution faible. Par contre dans le cas général où β est constante sur certains intervalles de l'ensemble des valeurs de u, les phénomènes de parabolicité (même très dégénérés) et d'hyperbolicité non linéaire vont être mélangés et il ne semble pas que le problème soit encore bien compris.

Nous nous proposons dans cet article d'introduire une notion de solution généralisée locale de l'équation (E), en approchant (E) par des équations analogues avec des données régulières, pour laquelle nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy associé. Nous ferons le lien avec la notion de solution entropique de (E).

Dans la section 2, nous introduisons la notion de solution généralisée locale de (E) et nous précisons les liens avec les notions de solution classique et de solution entropique.

Dans la section 3, nous étudions le problème de Cauchy associé à (E); nous y établissons un résultat d'existence et d'unicité de solution généralisée locale (théorème 9). Nous montrons aussi que lorsque (f, β) sont localement lipchitzienne, cette solution dépend continûment des données (prop. 14).

2. Solutions classiques, généralisées et entropiques

Dans toute cette partie, on se donne f, $\beta \in C(\mathbb{R})$, où β est croissante (au sens large), Q un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $v \in L^1_{\text{loc}}(Q)$. On fait la normalisation

$f(0) = \beta(0) = 0$. On considère l'équation $E = E(f, \beta, Q, v)$:

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v\,, \quad \text{sur } Q\,. \tag{E}$$

Précisons tout d'abord la notion de solution classique de (E).

DÉFINITION 1 (solution classique). — *On appelle solution classique de $E(f, \beta, Q, v)$, toute fonction $u \in C(Q)$ telle que*

$$\begin{cases} u_t\,,\ f(u)_x\,,\ \beta(u)_{xx} \in C(Q) \\ u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v & \textit{sur } Q\,. \end{cases} \tag{1}$$

Notons alors que v est dans $C(Q)$.

Si u est solution classique de $E(f, \beta, Q, v)$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ avec $\beta' > 0$, alors $u \in C^1(Q)$ et $u_{xx} \in C(Q)$ et sur Q on a

$$u_t + f'(u)u_x = \beta'(u)u_{xx} + \beta''(u)u_x^2 + v\,.$$

Lorsque f, $\beta \in C^1(Q)$, $v \in C(Q)$, toute fonction $u \in C^1(Q)$, telle que

$$u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v$$

dans $\mathcal{D}'(Q)$ est solution classique de $E(f, \beta, Q, v)$

Introduisons maintenant la notion de solution généralisée.

DÉFINITION 2 (solution généralisée). — *On appelle solution généralisée de $E(f, \beta, Q, v)$, toute fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ vérifiant : il existe une suite (f_n, β_n, v_n, u_n) dans $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times C(Q)^2$ avec u_n solution classique de $E(f_n, \beta_n, Q, v_n)$ telle que*

$$\begin{cases} u_t \to u\,,\ v_n \to v & \textit{dans } L^1_{\mathrm{loc}}(Q) \\ f_n \to f\,,\ \beta_n \to \beta & \textit{dans } C(\mathbb{R}) \\ f_n(u_n) \to f(u)\,,\ \beta_n(u_n) \to \beta(u) & \textit{dans } L^1_{\mathrm{loc}}(Q), \end{cases} \tag{2}$$

où on a noté $C_m(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et monotones croissantes (au sens large).

Notons que la notion de solution généralisée est fermée pour le passage à la limite défini par (2); plus précisément, on a de manière immédiate le résultat suivant.

PROPOSITION 3. — *Soit* (f_n, β_n, v_n, u_n) *une suite de* $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times L^1_{\mathrm{loc}}(Q)^2$ *convergente vers* (f, β, v, u) *au sens de (2). Si pour tout* n, u_n *est la solution généralisée de* $E(f_n, \beta_n, Q, v_n)$, *alors* u *est solution généralisée de* $E(f, \beta, Q, v)$.

La notion de solution généralisée est une notion globale, il lui correspond la notion locale de solution qui suit.

DÉFINITION 4 (solution généralisée locale). — *On appelle solution généralisée locale de* $E(f, \beta, Q, v)$ *toute fonction* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ *vérifiant : tout point* $(t_0, x_0) \in Q$ *admet un voisinage ouvert* Q_1 *dans* Q *telle que la restriction de* u *à* Q_1 *soit une solution généralisée de* $E(f, \beta, Q_1, v)$.

Il est clair que si u est solution généralisée (resp. solution généralisée locale) sur Q, alors u est solution généralisée (resp. solution généralisée locale) sur tout ouvert $Q_1 \subset Q$.

Suivant S. N. Kruskhov [Kr], on définit la notion de solution entropique.

DÉFINITION 5 (solution entropique). — *On appelle solution entropique de* $E(f, \beta, Q, v)$ *toute fonction* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ *vérifiant :* $f(u)$, $\beta(u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ *et pour tout* $k \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|u-k| + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{sign}_0(u-k) + \big(f(u) - f(k)\big)\Big) \leq \\ \leq \operatorname{sign}_0(u-k)v + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big|\beta(u) - \beta(k)\big| \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(Q)\,,\end{aligned} \tag{3}$$

où $\operatorname{sign}_0 r = r/|r|$ *pour* $r \neq 0$ *et* 0 *sinon.*

Toute solution classique est solution entropique, plus généralement en utilisant un raisonnement courant, on a le résultat suivant.

LEMME 6. — *Soit* u, $\widehat{u}$ *deux solutions classiques de* $E(f, \beta, Q, v)$, $E(f, \beta, Q, \widehat{v})$ *respectivement, alors :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u-\widehat{u})^+ + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{sign}_0^+(u-\widehat{u}) + \big(f(u) - f(\widehat{u})\big)\Big) \leq \\ \leq \operatorname{sign}_0^+(u-\widehat{u})(v-\widehat{v}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\beta(u) - \beta(\widehat{u})\big)^+ \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(Q)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Ce type d'inégalité est appelée inégalité de Kato. En effet, elle s'inspire de l'inégalité classique de Kato pour le laplacien ([Ka] et aussi [Ar]).

Preuve.— L'inégalité (4) étant locale, il suffit de la prouver dans un voisinage de tout point (t_0, x_0) de Q. On peut supposer que $Q = \,]\,t_1\,,\,t_2\,[\, \times \,]\,a\,,\,b\,[$. Il est bien connu que (4) est équivalente à :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(u(t) - \widehat{u}(t)\right)^+ \xi \,\mathrm{d}x \leq \\
&\quad\leq \int_a^b \left(u(s) - \widehat{u}(s)\right)^+ \xi \,\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \int_s^t \int_a^b \operatorname{sign}_0^+\left(u(\tau) - \widehat{u}(\tau)\right) \Big\{ \Big(f\big(u(\tau)\big) - f\big(\widehat{u}(\tau)\big)\Big)\xi_x + \\
&\qquad\qquad + \Big(\beta\big(u(\tau)\big) - \beta\big(\widehat{u}(\tau)\big)\Big)\xi_{xx} + \left(v(\tau) - \widehat{v}(\tau)\right) \Big\} \xi \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Pour tout $t_1 < s \leq t < t_2$ et $\xi \in \mathcal{D}(]\,a\,,\,b\,[), \xi \geq 0$.

Sur l'intervalle $]\,t_1\,,\,t_2\,[$, la fonction $\varphi(t) = \int_a^b \left(u(t) - \widehat{u}(t)\right)^+ \xi \,\mathrm{d}x$ est localement lipschitzienne. Fixons $t \in \,]\,t_1\,,\,t_2\,[$ et notons

$$\begin{aligned}
w &= \beta\big(u(t)\big) - \beta\big(\widehat{u}(t)\big) \in C^2(]\,a\,,\,b\,[) \\
h &= f\big(u(t)\big) - f\big(\widehat{u}(t)\big) \in C^2(]\,a\,,\,b\,[)\,.
\end{aligned}$$

$\Omega = \Big\{x \in \,]\,a\,,\,b\,[\; \mid u(t,x) > \widehat{u}(t,x)\Big\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$; c'est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Puisque

$$\varphi'(t) = \int_\Omega \left(u_t(t) - \widehat{u}_t(t)\right)\xi \,\mathrm{d}x \quad \text{p.p. } t \in \,]\,t_1\,,\,t_2\,[\,; \tag{6}$$

pour prouver (5), il suffit de montrer

$$\int_\Omega (w_{xx} + h_x)\xi \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega (w\xi_{xx} - h\xi_x) \,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Soit $]\,c\,,\,d\,[$ une composante connexe de Ω, on a

$$\int_c^d w_{xx}\xi \,\mathrm{d}x = \left[w_x\xi\right]_c^d - \int_c^d w_x\xi_x \,\mathrm{d}x \left[w_x\xi\right]_c^d + \int_c^d w\xi_{xx} \,\mathrm{d}x\,.$$

Puisque, $w(x) \geq 0$ pour tout $x \in \,]\,c\,,\,d\,[$, on a $\xi w_x(c) \geq 0$ et $\xi w_x(d) \leq 0$; d'où

$$\int_c^d w_{xx}\xi \,\mathrm{d}x \leq \int_c^d w\xi_{xx} \,\mathrm{d}x\,.$$

On a également,

$$\int_c^d h_x \xi \, \mathrm{d}x = -\int_c^d h \xi_x \, \mathrm{d}x$$

et donc

$$\int_c^d (w_{xx} + h_x)\xi \, \mathrm{d}x \leq \int_c^d (w\xi_{xx} - h\xi_x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{8}$$

ce qui donne bien (7) par sommation de (8) sur toutes les composantes connexes de l'ouvert Ω. □

Notant que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{u} \equiv k$ est solution classique de $E(f, \beta, Q, 0)$, le lemme 6 montre que toute solution classique est solution entropique. En fait, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 7.— *Toute solution généralisée locale de $E(f, \beta, Q, v)$ est solution entropique.*

Preuve.— Il suffit d'établir (3) au voisinage de tout point (t_0, x_0) de Q. Étant donné $(t_0, x_0) \in Q$ fixé, il existe Q_1 un voisinage ouvert de (t_0, x_0) dans Q tel que u restreinte à Q_1 soit une solution généralisée de $E(f, \beta, Q_1, v)$. Il existe donc (f_n, β_n, v_n, u_n) une suite de $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times C(Q_1) \times C(Q_1)$ tels que u_n soit une solution classique de $E(f_n, \beta_n, Q_1, v_n)$ et (f_n, β_n, v_n, u_n) converge vers (f, β, v, u) au sens de (2) sur Q_1. Appliquant le lemme 6 à (u_n, k) et (k, u_n) et sommant les deux inégalités obtenues, on obtient : pour tout $\xi \in \mathcal{D}(Q_1)$, $\xi \geq 0$,

$$\begin{aligned} \iint_{Q_1} & \operatorname{sign}_0(u_n - k)(u_n - k)\xi_t + \big(f_n(u_n) - f_n(k)\big)\xi_x + \\ & \qquad + \big(\beta_n(u_n) - \beta_n(k)\big)\xi_{xx} + v\xi \geq 0 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Faisant tendre n vers l'infini, compte tenu de (2), il existe $\alpha \in L^\infty(Q_1)$, $\alpha \in \operatorname{sign}(u - k)$ tel que

$$\iint_{Q_1} \alpha\Big\{(u - k)\xi_t + \big(f(u) - f(k)\big)\xi_x + \big(\beta(u) - \beta(k)\big)\xi_{xx} + v\xi\Big\} \geq 0 \,, \tag{10}$$

où on a noté par sign le graphe monotone de $\mathbb{R}$, défini par

$$\operatorname{sign}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ [-1\,, +1] & \text{si } r = 0 \\ -1 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

L'inégalité (10) est équivalente à (3) ([Be], [T]). □

3. Problème de Cauchy

On suppose dans toute cette section que $Q = \,]\,0\,,T\,[\, \times \mathbb{R}$ avec $T > 0$, et on se donne

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})\,,\ v \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$

$$\text{vérifiant p.p. } t \in \,]\,0\,,T\,[\,,\quad v(t) \cup L^\infty(\mathbb{R})\,,\quad \int_0^T \|v(T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}t < \infty\,. \tag{H}$$

On considère le problème $\mathrm{PC} = \mathrm{PC}(f, \beta, v, u_0)$

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \beta(u)_{xx} + v & \text{sur } Q \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{PC}$$

DÉFINITION 8.— *On appelle solution généralisée (resp. solution généralisée locale) du problème de Cauchy (PC), toute solution généralisée (resp. solution généralisée locale) u de $E(f, \beta, Q, v)$ telle que $u(t) \to u_0$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$ essentiellement.*

Dans cette section, on établit un résultat d'existence et d'unicité de solution généralisée locale du problème de Cauchy. Plus précisément, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 9.— *Étant donné (v, u_0) vérifiant (H) :*

1) *il existe une unique fonction $u \in L^\infty(Q)$ solution généralisée locale de $\mathrm{PC} = \mathrm{PC}(f, \beta, v, u_0)$; de plus, $u \in C\big([\,0\,,T\,]\,,\,L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$, vérifie*

$$\|u(T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^t \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

pour tout $t \in [\,0\,,T\,]$ et est solution généralisée du problème $\mathrm{PC} = \mathrm{PC}(f, \beta, Q, v, u_0)$;

2) *soient u, $\widehat{u}$ les solutions généralisées locales correspondant à (v, u_0) et $(\widehat{v}, \widehat{u}_0)$ respectivement; on a*

$$\begin{aligned} &\Big\|\big(u(t) - \widehat{u}(t)\big)^+\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \\ &\quad \le \Big\|\big(u_0 - \widehat{u}_0\big)^+\Big\|_{L^1(\mathbb{R})} + \int_0^t \Big\|\big(v(s) - \widehat{v}(s)\big)^+\Big\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{12}$$

pour tout $t \in [\,0\,,T\,]$.

Pour un problème de premier ordre ($\beta(k) \equiv 0$), il y a unicité des solutions entropiques ([KrA], [KrP], [Be]). Dans le cas des problèmes du second ordre, lorsque β est constante sur certains intervalles de l'ensemble des valeurs de u, nous ignorons s'il y a unicité des solutions entropiques. C'est ce qui a motivé l'introduction de la notion de solution généralisée locale.

La preuve du théorème s'obtiendra à l'aide du résultat qui suit.

PROPOSITION 10.— *Étant donné $C > 0$, considérons X l'ensemble des fonctions (v, u_0) de $L^1(Q) \times L^1(\mathbb{R})$, vérifiant (H) avec*

$$\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^T \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \,\mathrm{d}t \leq C\,,$$

muni de la topologie de $L^1(Q) \times L^1(\mathbb{R})$.

1) *Il existe une unique application continue $\mathcal{F}$ de $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times X$ dans $C([0, T], L^1(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $(f, \beta, v, u_0) \in C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times X$, $u = \mathcal{F}(f, \beta, v, u_0)$ soit une solution généralisée de* $\mathrm{PC}(f, \beta, Q, v, u_0)$ *vérifiant*

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq C\,.$$

2) *Soient Q_1 une partie ouverte de Q, $(f, \beta, \widehat{v}) \in C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times C(Q_1)$, $u = \mathcal{F}(f, \beta, v, u_0)$ avec $(v, u_0) \in X$ et $\widehat{u}$ une solution classique de $E(f, \beta, D_1, \widehat{v})$, alors*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(u - \widehat{u})^+ + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathrm{sign}_0^+(u - \widehat{u})\big(f(u) - f(\widehat{u})\big)\Big) \leq \\ &\qquad \leq \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\beta(u) - \beta(\widehat{u})\big)^+ + (v - \widehat{v})^+ \quad \textit{dans } D'(Q_1)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Nous allons démontrer ce résultat plus loin; nous en déduisons avant, comme conséquence principale, la preuve du théorème. Établissons tout d'abord quelques résultats préliminaires.

LEMME11.— *Soient $C \geq 0$, et $w \in L^\infty(Q)$, $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $c \in L^1(Q)$, $\omega \in C(\mathbb{R})$ des fonctions positives telles que ω soit croissante, $\omega(0) = 0$,*

$$\iint_Q \{\xi_t w + C|\xi_{xx}| + \omega(w)|\xi_x| + c(t, x)\xi\} \geq 0\,, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(Q)\,,\ \xi \geq 0$$

et $w(t) \to w_0$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, quand $t \to 0^+$ essentiellement. Alors

$$\sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}} w(t,x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} w_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} c(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{14}$$

Preuve.— Nous adaptons ici, la preuve du lemme 4 de [Ba] (cf. aussi [KrA]). Pour tout $0 < s \le t < T$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\xi \ge 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} w(t,x)\xi\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} w(s,x)\xi\,\mathrm{d}x + \iint_Q \Big\{C|\xi_{xx}| + \omega(w)|\xi_x| + c(t,x)\xi\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \tag{15}$$

Soit ξ une fonction test vérifiant : $\xi(x) \equiv 1$ sur $[0\,,1]$ et $\xi(x) = 0$ sur $[2\,,\infty[$. Considérons $\xi_n(x) = \xi\big(|x|/n\big)$, alors $\xi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $0 \le \xi_n \le 1$, $\xi_n' \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \big\{x \in \mathbb{R} \mid n \le |x| \le 2n\big\}$. Injectant ξ_n dans (15) et faisant tendre s vers 0^+, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|x|\le n\}} w(t,x)\,\mathrm{d}x \le \\
&\quad\le \int_{\{|x|\le 2n\}} w_0(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n^2}\int_0^T \int_{\{n\le|x|\le 2n\}} C\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\, + \\
&\qquad + \frac{1}{n}\int_0^T \int_{\{n\le|x|\le 2n\}} \omega(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\{|x|\le 2n\}} c(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Il résulte de (16) que $w(t,\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $\delta > 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\{n\le|x|\le 2n\}} \omega(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \int_0^T \int_{\{n\le|x|\le 2n,\ w(t,x)\le\delta\}} \omega(\delta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\{n\le|x|\le 2n,\ w(t,x)>\delta\}} \omega(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

On a $\omega(w) \le C_w$ où C_w est une constante positive, puisque $w \in L^\infty(Q)$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\int_0^T \int_{\{n\le|x|\le 2n\}} \omega(w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\qquad\qquad \le 2\omega(\delta)T + \frac{T}{n} C_w \frac{1}{\delta} \int_{\{n\le|x|\le 2n\}} w(t,x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Puisque $w(t) \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{n\leq|x|\leq 2n\}} w(t,x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Faisant tendre n vers l'infini, ensuite δ vers 0^+ dans (17), et en passant à la limite, lorsque n tend vers l'infini dans (16), on obtient le résultat. □

LEMME 12.— *Étant donné v_n, $\widehat{v}_n$ vérifiant (H) et u_n, $\widehat{u}_n$ des fonctions de $L^1_{\mathrm{loc}}([0\,,T]\times\mathbb{R})\cap L^\infty(Q)$ telles que (u_n, v_n), $(\widehat{u}_n, \widehat{v}_n)$ vérifient l'inégalité de Kato (4) et*

$$\|u_n(t)\|_{L^\infty(Q)} + \|\widehat{v}_n\|_{L^\infty(Q)} + \int_0^T \Big(\|v_n(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\widehat{v}_n(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big)\,\mathrm{d}s < C$$

(u_n, v_n), $(\widehat{u}_n, \widehat{v}_n)$ convergent respectivement vers (u, v), $(\widehat{u}, \widehat{v})$ dans

$$L^1_{\mathrm{loc}}([0\,,T]\times\mathbb{R})\cap L^1_{\mathrm{loc}}(Q)\,,$$

alors

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \int \big(u(t) - \widehat{u}(t)\big)^+ \xi\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int \big(u_0 - \widehat{u}_0\big)^+ \xi\,\mathrm{d}x + \qquad\qquad (18)\\
&\quad + \int_0^T \int \Big\{ \big|f(u) - f(\widehat{u})\big|\,|\xi_x| + \big(\beta(u) - \beta(\widehat{u})\big)^+ |\xi_{xx}| + \big(v - \widehat{v}\big)^+ \xi \Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geq 0$, et où on a noté $u(0) = u_0$, $\widehat{u}(0) = \widehat{u}_0$.

Preuve.— Soient $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \xi \geq 0$ et $t \in\ ]0\,,T]$; intégrons l'inégalité (4) entre 0 et t; on a

$$\begin{aligned}
&\int \big(u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\big)^+ \xi\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int \big(u_n(0) - \widehat{u}_n(0)\big)^+ \xi\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int \Big\{ \mathrm{sign}^+(u_n - \widehat{u}_n)\big(f(u_n) - f(\widehat{u}_n)\big)\xi_x + \\
&\quad + \big(\beta(u_n) - \beta(\widehat{u}_n)\big)^+ \xi_{xx} \Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t \int \big(v_n - \widehat{v}_n\big)^+ \xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,. \qquad (19)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int\big(u_n(t)-\widehat{u}_n(t)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x &= \int\big(u(t)-\widehat{u}(t)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\ \sup_{t\in[0,T]}\int\big(u_n(t)-\widehat{u}_n(t)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Compte tenu de (19), on a

$$\begin{aligned}&\int\big(u_n(t)-\widehat{u}_n(t)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\le\\ &\le\int\big(u_n(0)-\widehat{u}_n(0)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int\Big\{\big|f(u_n)-f(\widehat{u}_n)\big|\,|\xi_x|+ \qquad (20)\\ &\quad+\big(\beta(u_n)-\beta(\widehat{u}_n)\big)^+|\xi_{xx}|\Big\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\int_0^T\int\big(v_n-\widehat{v}_n\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Faisant tendre n vers l'infini dans cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{t\in[0,T]}\int\big(u_n(t)-\widehat{u}_n(t)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\le\\ &\le\int\big(u_0-\widehat{u}_0\big)^+\xi\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int\big|f(u)-f(\widehat{u})\big|\,|\xi_x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+ \qquad (21)\\ &\quad+\int_0^T\int\big(\beta(u)-\beta(\widehat{u})\big)^+|\xi_{xx}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\int_0^T\int\big(v-\widehat{v}\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

D'où le lemme. □

3.1 Preuve du théorème 9

Fixons

$$C>\big\|u_0\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\int_O^T\big\|v(t)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}t\,.$$

1) Existence.— Posons

$w^{n,m}(x)=w^+\chi_{[-n\,,\,n]}(x)-w^-\chi_{[-m\,,\,m]}(x)$ et $u_{n,m}=\mathcal{F}(f,\beta,v^{n,m},u_0^{n,m})$;

alors

$$\begin{cases}u_{n,m}\uparrow u^m & \text{quand } n\to\infty \text{ et } u^m\downarrow\overline{u}\\ u_{n,m}\downarrow u_n & \text{quand } m\to\infty \text{ et } u^n\uparrow\underline{u}.\end{cases}$$

En effet, $\|u_{n,m}\|_{L^\infty(Q)} < C$ puisque $(v^{n,m}, u_0^{n,m}) \in X$. Utilisant l'inégalité (14), les suites $(u_{n,m})_m$ et $(u_{n,m})_n$ sont monotones bornées, de même pour $(u^m)_m$ et $(u^n)_n$. On obtient alors $\overline{u} = \lim_{m\to\infty} u^m$ et $\underline{u} = \lim_{n\to\infty} u_n$ qui sont solutions généralisées de $E(f,\beta,Q,v)$ par fermeture de la notion de solution généralisée.

Montrons que $\underline{u} \in C\big([0\,,T]\,, L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\big)$. Il résulte de (18) appliquée au couple $(u_{n,m}, u_{n,q})$ que, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \le \xi \le 1$, $t \in \,]0\,,T[$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \big(u_{n,m}(t) - u_{n,q}(t)\big)^+ \xi \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \big(u_0^{n,m} - u_0^{n,q}\big)^+ \xi \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big\{ \big|f(u_{n,m}) - f(u_{n,q})\big|\,|\xi_x| + \qquad (22)\\
&\quad + \big(v_{n,m} - v_{n,q}\big)^+ \xi + \big(\beta(u_{n,m}) - \beta(u_{n,q})\big)^+ |\xi_{xx}| \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

En échangeant le rôle de $u_{n,m}$ et $u_{n,q}$ et en sommant les inégalités obtenues, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \big|u_{n,m}(t) - u_{n,q}(t)\big| \xi \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \big|u_0^{n,m} - u_0^{n,q}\big| \xi \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big\{ 2\big|f(u_{n,m}) - f(u_{n,q})\big|\,|\xi_x| + \qquad (23)\\
&\quad + \big|v_{n,m} - v_{n,q}\big| \xi + \big|\beta(u_{n,m}) - \beta(u_{n,q})\big|\,|\xi_{xx}| \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

En faisant tendre q vers l'infini, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0\,,T]} \int_{\mathbb{R}} \big|u_{n,m}(t) - u_n(t)\big| \xi \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \big|u_0^{n,m} - u_0^{n}\big| \xi \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Big\{ 2\big|f(u_{n,m}) - f(u_n)\big|\,|\xi_x| + \\
&\quad + \big|v_{n,m} - v_n\big| \xi + \big|\beta(u_{n,m}) - \beta(u_n)\big|\,|\xi_{xx}| \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}
$$

Faisant maintenant $m \to \infty$, il en résulte

$$
\limsup_{m\to\infty} \bigg\{ \sup_{t\in[0\,,T]} \int_{\mathbb{R}} \big|u_{n,m} - u_n\big| \xi \,\mathrm{d}x \bigg\} \le 0\,.
$$

Et donc $u_{n,m} \to u_n$ dans $C([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ quand m tend vers l'infini, en particulier u_n est dans $C([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$.

Reprenant le raisonnement précédent avec la suite $(u_n)_n$, il en résulte aussi

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}}\left|u_n(t)-\underline{u}(t)\right|\xi\,\mathrm{d}x\right\}\leq 0\,.,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \xi \leq 1$. On a alors $\underline{u} \in C([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ et donc $\underline{u}$ est solution généralisée locale de $\mathrm{PC}(f,\beta,Q,v,u_0)$. Notons que d'après le procédé diagonale, il existe $(v_n, u_0^n) \in X$ tel que $u_n \to \overline{u}$ dans $C([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$.

2) Unicité.— D'après le lemme 11, il suffit de montrer qu'étant donné $(\widehat{v},\widehat{u}_0)$ vérifiant (H) et $\widehat{u}$ solution généralisée locale de $\mathrm{PC}(f,\beta,Q,\widehat{v},\widehat{u}_0)$, alors $(\underline{u},\widehat{u})$ vérifie (18). D'après le procédé diagonale, il existe $(v_n,u_0^n) \in X$ tel que $u_n = \mathcal{F}(f,\beta,v_n,u_0^n) \to \underline{u}$ dans $C([0,T], L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$, où on a noté $v_n = v^{n,m(n)}$ et $u_0^n = u_0^{n,m(n)}$. Appliquant le lemme 12 à la suite $(\widehat{u},u_n)$, on obtient (18) ce qui entraîne donc l'unicité et la propriété de contraction L^1. □

Maintenant, nous nous attaquons à la preuve de la proposition 10, pour cela rappelons tout d'abord les résultats développés dans [BT] et [T] pour l'étude du problème de Cauchy $\mathrm{PC}(f,\beta,Q,v,u_0)$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1.

On définit l'opérateur $A = A_{f,\beta}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ par $Au = \Big(f(u)-\beta(u)_x\Big)_x$ sur le domaine $D(A)$ des fonctions $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, $\beta(u) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $h = f(u) - \beta(u)_x \in \mathrm{AC}(\mathbb{R})$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\left[u(x^+)-u(x^-)\right]\left[h - f\big(\lambda u(x^+)+(1-\lambda)u(x^-)\big)\right] \leq 0\,.$$

On a alors le résultat suivant.

LEMME 13.— *L'opérateur $A = A_{f,\beta}$ vérifie*

1) A est T-accrétif dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}}(u-\widehat{u})^+\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}}\big(u-\widehat{u}+\lambda(Au-A\widehat{u})\big)^+\,\mathrm{d}x$$

pour tout u, $\widehat{u} \in D(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$;

2) $R(I+\lambda A) \supset L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{R}) \supset D(A)$, $\forall\, \lambda \geq 0$;

3) $D(A)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$;

4) étant donné une suite $(f_n, \beta_n) \in C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R})$ convergente dans $C^2(\mathbb{R})$ vers (f,β), alors $\left(I+\lambda A_{f_n,\beta_n}\right)^{-1} u \to \left(I+\lambda A_{f,\beta}\right)^{-1} u$ dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque n tend vers l'infini pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Preuve de la proposition 10

D'après la théorie générale des équations d'évolution dans un espace L^1, l'existence d'une fonction $\mathcal{F}$ continue de $C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times X$ dans $C\big([0\,,T]\,, L^1(\mathbb{R})\big)$ découle du lemme 13, compte tenu du lemme 11 et du lemme 12, l'unicité de $\mathcal{F}$ découle en fait du point 2); établissons donc le point 2) de cette proposition.

On peut se ramener au cas d'un rectangle $Q_1 = \,]\sigma_1\,, \sigma_2[\, \times \,]x_1\,, x_2[$, nous notons $I = \,]x_1\,, x_2[$. Étant donné $\varepsilon > 0$ fixé, considérons la suite (u_i, v_i) telle que, pour tout $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T \leq t_{n+1}$ avec $t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $\underline{u}_0$ dans $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big\|v(t) - v_i\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \mathrm{d}t \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \big\|u_0 - \underline{u}_0\big\| \leq \varepsilon\,,$$

on ait

$$\big\|u(t) - u_i\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \delta(\varepsilon) \quad \text{pour tout } t \in \,]t_{i-1}\,, t_i]$$

où u_i est définie par récurrence par

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + A_{f,\beta} u_i \ni v_i$$

et $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue avec $\delta(0) = 0$.

De plus, pour tout u, $\widehat{u}$ correspondant à (v, u_0) et $(\widehat{v}, \widehat{u}_0)$ respectivement, on a l'égalité (12); et si (v, u_0) vérifie (H), alors u satisfait à l'estimation (11) par la théorie et posons $u_\varepsilon(t) = u_i$, $v_\varepsilon(t) = v_i$ sur $]t_{i-1}\,, t_i[$. On a alors

$$Au_i = v_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\,.$$

D'autre part, $\widehat{u}$ est solution classique et donc pour tout $s \in \,]\sigma_1\,, \sigma_2[$, $\widehat{u}(s) \in C(\mathbb{R})$ et

$$-\beta\big(\widehat{u}(s)\big)_{xx} + f\big(\widehat{u}(s)\big)_x = \widehat{v}(s) - \widehat{u}_s(s) \quad \text{sur } I\,.$$

Utilisant la proposition 1.1 de [T], on a pour tout $\xi \in \mathcal{D}(I)$, $\xi \geq 0$,

$$\int_I \operatorname{sign}_0^+(u_i - \widehat{u}(s)) \left\{ \Big(f(u_i) - f(\widehat{u}(s))\Big)\xi_x - \Big(\beta(u_i)_x - \beta(\widehat{u}(s))_x\Big)\xi_x + \right.$$
$$\left. + \left(v_i - \widehat{v}(s) - \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \widehat{u}_s(s)\right) \xi \right\} \mathrm{d}x \geq 0\,.$$

Intégrons cette inégalité en t sur $]\,t_{i-1}\,,\,t_i\,[$ pour obtenir

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_I \operatorname{sign}_0^+(u_i - \widehat{u}(s)) \left\{ \Big(f(u_i) - f(\widehat{u}(s))\Big)\xi_x - \Big(\beta(u_i) - \beta(\widehat{u}(s))\Big)_x \xi_x + \right.$$
$$\left. + \left(v_i - \widehat{v}(s) - \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \widehat{u}_s(s)\right) \xi \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq 0\,. \qquad (24)$$

Notons que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(Q)$, on a

$$\operatorname{sign}_0^+(w(t) - k)\big(w(t) - w(t')\big) \geq (w(t) - k)^+ - (w(t') - k)^+\,,$$

et donc

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_I \operatorname{sign}_0^+(u_i - \widehat{u}(s)) \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq$$
$$\geq \int_I (u_i - \widehat{u}(s))^+ \xi\,\mathrm{d}x - \int_I (u_{i-1} - \widehat{u}(s))^+ \xi\,\mathrm{d}x\,.$$

Il en résulte

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_I \operatorname{sign}_0^+(u_\varepsilon(t) - \widehat{u}(s)) \left\{ \Big(f(u_\varepsilon(t)) - f(\widehat{u}(s))\Big)\xi_x + \right.$$
$$\left. - \Big(\beta(u_\varepsilon(t)) - \beta(\widehat{u}(s))\Big)_x \xi_x + \big(v_\varepsilon(t) - \widehat{v}(s)\big) \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_I (u_\varepsilon(t_{i-1}) - \widehat{u}(s))^+ \xi\,\mathrm{d}x$$
$$\geq \int_I (u_\varepsilon(t_i) - \widehat{u}(s))^+ \xi\,\mathrm{d}x - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_I \operatorname{sign}_0^+(u_\varepsilon(t) - \widehat{u}(s))\widehat{u}(s)\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,. \qquad (25)$$

Étant donnés $\sigma_1 < a \leq b < \sigma_2$ et $\sigma_1 < c \leq d < \sigma_2$, intégrons l'inégalité précédente en s sur $]\,c\,,\,d\,[$. Notant que p.p. $s \in\,]\,\sigma_1\,,\,\sigma_2\,[$, on a

$$-\int_I \operatorname{sign}_0^+(u_\varepsilon(t) - \widehat{u}(s))\widehat{u}(s)\xi\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_I (u_\varepsilon(t) - \widehat{u}(s))^+ \xi\,\mathrm{d}x\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{]c,d[\times I} \operatorname{sign}_0^+\big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(s)\big)\Big\{\Big(f\big(u_\varepsilon(t)\big)-f\big(\widehat{u}(s)\big)\Big)\xi_x + \\
&\quad - \Big(\beta\big(u_\varepsilon(t)\big)-\beta\big(\widehat{u}(s)\big)\Big)_x\xi_x + \big(v_\varepsilon(t)-\widehat{v}(s)\big)\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_{]c,d[\times I}\big(u_\varepsilon(t_{i-1})-\widehat{u}(s)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \geq \\
&\geq \int_{]c,d[\times I}\big(u_\varepsilon(t_i)-\widehat{u}(s)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_I \big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(d)\big)^+ - \big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(c)\big)^+\xi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}\tag{26}$$

Il existe des indices i et j tels que $t_{i-1} < b \leq t_i$ et $t_{j-1} < a \leq t_,$. Sommons l'inégalité précédente entre i et j pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{t_j}^{t_i}\int_{]c,d[\times I} \operatorname{sign}_0^+\big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(s)\big)\Big\{\Big(f\big(u_\varepsilon(t)\big)-f\big(\widehat{u}(s)\big)\xi_x + \\
&\quad - \Big(\beta\big(u_\varepsilon(t)\big)-\beta\big(\widehat{u}(s)\big)\Big)_x\Big)\,\xi_x + \big(v_\varepsilon(t)-\widehat{v}(s)\big)^+\xi\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_c^d \mathrm{d}s\int_I\Big\{\big(u_\varepsilon(a)-\widehat{u}(s)\big)^+ - \big(u_\varepsilon(b)-\widehat{u}(s)\big)^+\Big\}\xi\,\mathrm{d}x \geq \\
&\geq \int_{t_j}^{t_i}\mathrm{d}t\int_I\Big\{\big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(d)\big)^+ - \big(u_\varepsilon(t)-\widehat{u}(c)\big)^+\Big\}\xi\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}\tag{27}$$

Puisque $(v, u_0) \in X$, on a (cf. [T])

$$\big\|\beta(u_\varepsilon)_x\big\|_{L^2(Q)} + \big\|u_\varepsilon\big\|_{L^\infty(Q)} \leq C\,,$$

où C est une constante indépendante de $\varepsilon > 0$. Faisant tendre ε vers 0^+ dans (27), il en résulte

$$\begin{aligned}
&\int_{]a,b[\times]c,d[}\int_I \operatorname{sign}_0^+\big(u(t)-\widehat{u}(s)\big)\Big\{\Big(f\big(u(t)\big)-f\big(\widehat{u}(s)\big)\Big)\xi_x + \\
&\quad - \Big(\beta\big(u(t)\big)-\beta\big(\widehat{u}(s)\big)\Big)_x\xi_x + \big(v(t)-\widehat{v}(s)\big)\xi\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_c^d \mathrm{d}s\int_I\Big\{\big(u(a)-\widehat{u}(s)\big)^+ - \big(u(b)-\widehat{u}(s)\big)^+\Big\}\xi\,\mathrm{d}x \geq \\
&\geq \int_a^b \mathrm{d}t\int_I\Big\{\big(u(t)-\widehat{u}(d)\big)^+ - \big(u(t)-\widehat{u}(c)\big)^+\Big\}\xi\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}\tag{28}$$

Posons

$$\phi(s,t) = \int_I (u(t) - \widehat{u}(s))^+ \,\mathrm{d}x$$

et

$$\begin{aligned}\psi(s,t) = \int_I \Big\{ &\operatorname{sign}_0^+(u(t) - \widehat{u}(s)) \Big(\Big(f(u(t)) - f(\widehat{u}(s)) \Big) + \\ &- \Big(\beta(u_\varepsilon(s)) - \beta(\widehat{u}(s)) \Big)_x \Big) \xi_x + (v(t) - \widehat{v}(s))^+ \xi \Big\} \mathrm{d}x \,.\end{aligned}$$

L'inégalité devient

$$\int_a^b \int_c^d \psi(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int_c^d (\phi(s,a) - \phi(s,b))\,\mathrm{d}s \geq \int_a^b (\phi(d,t) - \phi(c,t))\,\mathrm{d}t$$

qui entraîne (cf. [Be], [BCP]), pour tout $\sigma_1 < s \leq t < \sigma_2$,

$$\phi(s,s) + \int_s^t \psi(\tau,\tau)\,\mathrm{d}\tau \geq \phi(t,t)\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\int_s^t \int_I \operatorname{sign}_0^+(u_\varepsilon(\tau) - \widehat{u}(\tau)) \Big\{ \Big(\Big(f(u(\tau)) - f(\widehat{u}(\tau)) \Big) \xi_x + \\ &\quad - \Big(\beta(u(\tau)) - \beta(\widehat{u}(\tau)) \Big)_x \Big) \xi_x + (v(t) - \widehat{v}(\tau))^+ \xi \Big\} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_I (u(s) - \widehat{u}(s))^+ \xi \,\mathrm{d}x \leq \int_I (u(t) - \widehat{u}(t))^+ \xi \,\mathrm{d}x \,.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de cette proposition. □

Étant donnée une fonction w localement lipschitzienne, on notera

$$\|w\|_{\mathrm{Lip}(|x| \leq R)} = \sup \left\{ \frac{|w(x) - w(y)|}{|x - y|} \;\middle|\; x \neq y\,,\ |x| \leq R\,,\ |y| \leq R \right\} .$$

Sous l'hypothèse complémentaire f, β localement lipschitzienne, la solution généralisée locale dépend continûment des données, plus précisément on a le résultat suivant.

PROPOSITION 14.— *Étant donné* $(f_n, \beta_n, v_n, u_{0,n}) \in C(\mathbb{R}) \times C_m(\mathbb{R}) \times L^1_{\text{loc}}(Q) \times L^\infty(\mathbb{R})$ *avec* f_n, β_n, f, β *localement lipschitziennes telles que*

$$\begin{cases} f_n \to f \,,\ \beta_n \to \beta & \textit{dans } C(\mathbb{R}) \\ (v_n, u_{0,n}) \to (v, u_0) & \textit{dans } L^1_{\text{loc}}(Q) \times L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

vérifiant

$$\left\|u_{0,n}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \int_0^T \left\|v_n(s)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \mathrm{d}s \le C$$

et

$$\forall\ R > 0\,,\ \exists\ \omega_R > 0 \ \textit{tel que}\ \left\|f_n\right\|_{\text{Lip}(|x|\le R)} + \left\|\beta_n\right\|_{\text{Lip}(|x|\le R)} \le \omega_R\,, \quad \text{(H')}$$

alors $u_n \to u$ *dans* $C\big([0\,,T]\,, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})\big)$ *où* u_n, u *sont les solutions généralisées locales correspondant respectivement à* $(f_n, \beta_n, v_n, u_{0,n})$ *et* (f, β, v, u_0).

Preuve.— Soient $R > 0$, $\varepsilon > 0$ fixés, il existe $(\widehat{v}, \widehat{u}_0) \in X$ tels que $u_n = \mathcal{F}(f, \beta, v_n, \widehat{u}_0^n) \to u$ dans $C\big([0\,,T]\,, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})\big)$,

$$\int_{|x|\le R} |u_0 - \widehat{u}_0|\,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{|x|\le R} |v - \widehat{v}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon}{4} \tag{29}$$

et

$$\sup_{t\in[0\,,T]} \int_{|x|\le R} \big|u(t) - \widehat{u}(t)\big|\,\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{30}$$

où $\widehat{u} = \mathcal{F}(f, \beta, \widehat{v}, \widehat{u}_0)$ et où u est la solution généralisée locale correspondant à (f, β, v, u_0). Notons $\widehat{u}_n = \mathcal{F}(f_n, \beta_n, \widehat{v}, \widehat{u}_0)$; par continuité de $\mathcal{F}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0\,,T]} \int_{\mathbb{R}} \big|\widehat{u}_n(t) - \widehat{u}(t)\big|\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{31}$$

D'autre part,

$$\int_{|x|\le R} \big|u_n(t) - u(t)\big|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_{|x|\le R} \big|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\big|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\le R} \big|\widehat{u}_n(t) - \widehat{u}(t)\big|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\le R} \big|\widehat{u}(t) - u(t)\big|\,\mathrm{d}x\,.$$

Compte tenu de (29) et (30), pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0\,,T]} \int_{|x|\le R} \big|u_n(t) - u(t)\big|\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

il suffit d'établir qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{|x|\leq R} \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Par le lemme 12, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\xi \geq 0$ et $0 < t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} &\int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \xi \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int \left|u_n^0 - \widehat{u}_0\right| \xi \,\mathrm{d}x + 2\int_0^t \int \left|f_n(u_n) - f_n(\widehat{u}_n)\right| |\xi_x| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\ &+ 2\int_0^t \int \left|\beta_n(u_n) - \beta_n(\widehat{u}_n)\right| |\xi_{xx}| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^T \int |v_n - \widehat{v}| \xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Par approximation prenons $\xi(x) = 1/\big(1 + |x|\big)^2$, on a alors $\left|\xi_x(x)\right| \leq 2\xi$ et $\left|\xi_{xx}(x)\right| \leq 6\xi$. L'inégalité précédente devient, compte tenu de (H')

$$\begin{aligned} &\int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \xi \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int \left|u_0^n - \widehat{u}_0\right| \xi \,\mathrm{d}x + 6\omega_c \int_0^t \int \left|u_n - \widehat{u}_n\right| \xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \\ &\quad + \int_0^T \int |v_n - \widehat{v}| \xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} &e^{-6\omega_c T} \int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \xi \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int \left|u_0^n - \widehat{u}_0\right| \xi \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int |v_n - \widehat{v}| \xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Choisissant R_ε assez grand tel que $R_\varepsilon > R$ et $\int_{|x|\geq R_\varepsilon} \xi \,\mathrm{d}x < \varepsilon/4C$, il résulte

$$\begin{aligned} &e^{-6\omega_c T} \int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \xi \,\mathrm{d}x \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{|x|\leq R_\varepsilon} \left|u_0^n - \widehat{u}_0\right| \xi \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{|x|\leq R_\varepsilon} |v_n - \widehat{v}| \xi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

En utilisant (25), pour N assez grand, on a

$$e^{-6\omega_c T} \int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \xi \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [\,0\,,T\,]\,;$$

d'où, puisque $1/\left(1+|R|\right)^2 \leq \xi(x) \leq 1$ pour $|x| \leq R$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \int \left|u_n(t) - \widehat{u}_n(t)\right| \mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N$$

d'où le résultat. □

Références

[Ar] ARENDT (W.) .— *Kato's inequality: a characterisation of generators of positive semigroups*, Proc. Roy. Irish. Acad. **84A**, n° 2 (1982), pp. 155-174.

[Ba] BARTHÉLEMY (L.) .— *Problème d'obstacle pour une équation quasi linéaire du premier ordre*, Ann. Fac. Sc. de Toulouse **IX**, n° 2 (1988), pp. 137-160.

[BCP] BÉNILAN (PH.), CRANDALL (M. G.) et PAZY (A.) .— *Evolution equation governed by accretive operators*, (livre à paraître).

[Be] BÉNILAN (PH.) .— *Equation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse de Doctorat d'État, Orsay (1972).

[BT] BÉNILAN (PH.) et TOURÉ (H.) .— *Sur l'équation générale $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$*, C.R. Acad. Sc. Paris, série I, **299**, n° 18 (1984).

[C1] CARRILLO (J.) .— *Unicité des solutions du type Kruskhov pour les problèmes elliptiques avec des termes de transport non linéaires*, C.R. Acad. Sc. Paris, série I, **33**, n° 5 (1986).

[C2] CARRILLO (J.) Communication personnelle.

[C3] CARRILLO (J.) .— *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*, Nonlinear Analysis J. **22**, n° 5 (1994), pp. 573-607.

[Di] DIBENEDETTO (E.) .— *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation* , I.N.D. Univ. Math. J. **32**, n° 1 (1983).

[DK] DIAZ (J.-I.) et KERSNER (R.) .— *On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration of evaporation*, J. Diff. Equ. **69** (1987), pp. 368-403.

[DT] DIAZ (J.-I.) et DE THELIN (F.) .— *On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows*, to appear in SIAM J. Math. Analysis.

[G] GILDING (B. H.) .— *Hölder continuity of solutions of parabolic equations*, J. London Math. Soc. **13**, n° 2 (1976).

[GT] GAGNEUX (G.) et MADAUNE-TORT (M.) .— *Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion convection*, C.R. Acad. Sc. Paris, série I, **318** (1994), pp. 919-924.

[Ka] KATO (T.) .— *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. **13** (1972), pp. 135-148.

[KrA] KRUSKHOV (S. N.) et ANDREJANOV (P. A.) .— *On the nonlocal theory of the Cauchy problem for quasi-linear equations of first order in the class of locally sommable functions*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. **220**, n° 1, pp. 23-26; english traduction in Soviet Math. Dokl. **16** (1985).

[Kr] KRUSKHOV (S. N.) .— *Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications*, Math. Zam. **6**, n° 1 (1969), pp. 517-523.

[KrP] KRUSKHOV (S. N.) et PANOV (E. YU.) .— *Conservative quasilinear first order laws with an infinite domain of dependence of the initial data*, Societ. Math. Dokl. **42**, n° 2 (1991).

[LSU] LADYZENSKAJA (O. A), SOLONNIKOV (V. A.) et URAL'CEVA (N. N.) .— *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. of Math. Monographs **23** (1968).

[O] OLEINIK (O. A.) .— *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Amer. Math. Transl. **26**, n° 2 (1963), pp. 95-172.

[Si] SIMONDON (F.) .— *Strong solution for* $u_t = \varphi(u)_{xx} - f(t)\psi(u)_x$, Comm. in P.D.E. **13**, n° 11 (1988), pp. 1337-1354.

[T] TOURÉ (H.) .— *Étude des équations générales* $u_t - \varphi(u)_{xx} + f(u)_x = v$ *par la théorie des semi-groupes non linéaires dans* L^1, Thèse de 3ème cycle, Université de Franche-Comté (1982).