JEAN-MARIE LION

Densité des ensembles semi-pfaffiens

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 7, nº 1 (1998), p. 87-92

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_1_87_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VII, n° 1, 1998

Densité des ensembles semi-pfaffiens(*)

JEAN-MARIE LION(1)

RÉSUMÉ. — À l'aide d'une formule intégrale de Cauchy-Crofton, on prouve que les ensembles semi-pfaffiens ont la propriété de densité en tout point de leur adhérence. Ceci généralise des résultats de Lelong, Kurdyka-Poly-Raby et Roche.

ABSTRACT. — Using Cauchy-Crofton's formula, we prove the existence of densities in each boundary point of a semi-pfaffian set. It is a generalisation of some results of Lelong, Kurdyka-Poly-Raby and Roche.

AMS Classification : primaire 32C05, 32C25, 58A99; secondaire 14G30, 32B20, 34C35

0. Introduction

Lelong [Lel] et Vitushkin [Vit] ont utilisé la géométrie intégrale pour prouver des propriétés des sous-ensembles analytiques. Dans cet esprit, on emploie la formule intégrale de Cauchy-Crofton pour étudier le comportement asymptotique d'un ensemble semi-pfaffien [Li2] et [LRol]. Avant d'énoncer notre résultat définissons les objets étudiés.

Densité

Soient Y un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne canonique, a un point de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier. Si $\varepsilon > 0$, on pose $Y_a^\varepsilon = \{x \in Y \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$. On suppose que si $\varepsilon > 0$ est petit, le volume k-dimensionnel $\mathrm{vol}_k(Y_a^\varepsilon)$ de Y_a^ε est bien défini et fini. Dans le cas d'une sous-variété différentiable analytique de dimension k de $\mathbb{R}^n$, ce volume coïncide

(*) Reçu le 5 janvier 1996, accepté le 12 mai 1997

(1) CNRS UMR 5584, Université de Bourgogne, B.P. 400, F-21011 Dijon Cedex (France)
e-mail : lion@u-bourgogne.fr

avec le volume riemannien usuel. Notons σ_k le volume k-dimensionnel de la boule unité de $\mathbb{R}^k$. La limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{vol}_k(Y_a^\varepsilon)/\sigma_k\varepsilon^k\,,$$

si elle existe, est appelée *densité k-dimensionnelle* de Y au point a. On dit alors que le sous-ensemble Y possède la propriété de k-densité au point a.

Lelong [Lel] montre que les sous-ensembles analytiques complexes possèdent la propriété de densité. Kurdyka, Poly et Raby ([KuRa], [KPR]) établissent que cette propriété est vérifiée par les sous-ensembles sous-analytiques de $\mathbb{R}^n$ [DS]. Roche [Roc] prouve qu'une *feuille de Rolle* possède une densité en tout point de son adhérence. Nous généralisons ce résultat aux ensembles semi-pfaffiens de $\mathbb{R}^n$ et à leurs composantes connexes. Les ensembles semi-pfaffiens forment une classe d'ensembles naturellement associés à des équations différentielles analytiques. Cette classe contient strictement celles des semi-analytiques [Loj].

Ensemble semi-pfaffien ([MR1], [MR2], [Li2], [LRol])

Dans toute la suite on désigne par M un ouvert semi-analytique M de $\mathbb{R}^n$. On étudie certains sous-ensembles de cet ouvert.

Un sous-ensemble V de M est une *feuille de Rolle* s'il vérifie les deux conditions suivantes. C'est une feuille d'un feuilletage de M induit par une 1-forme différentielle analytique, intégrable au voisinage de $\overline{M}$ et sans singularité dans M. Tout arc différentiable $\gamma : [0\,,1] \to M$ d'extrémités dans V est tangent à ce feuilletage en un point (propriété de Rolle).

Un *ensemble semi-pfaffien* est un élément de la plus petite classe de sous-ensembles de M contenant les feuilles de Rolle, les semi-analytiques de $\mathbb{R}^n$ inclus dans M, stable par intersection finie, réunion finie et différence symétrique.

La propriété de Rolle est une condition de non-spiralement [MR2] qui implique des propriétés de finitude pour les ensembles pfaffiens ([MR1] et [MR2], voir aussi [Kho]) (qui sont aux semi-pfaffiens ce que les ensembles analytiques sont aux semi-analytiques) et pour les semi-pfaffiens ([Li2], [LRol]). Plus précisément, on utilise dans cet article la propriété de finitude suivante (conséquence de la proposition 1 de [LRol] ou du théorème III.1 de [Li2]).

PROPRIÉTÉ DE FINITUDE POUR LES SEMI-PFAFFIENS [LRol]. — *Soit $W \subset M$ un ensemble semi-pfaffien relativement compact et soient f et g deux applications continues et semi-analytiques définies respectivement sur $\overline{M} \times [0,1]^N$ et $\overline{M} \times [0,1]^{N'}$ et à valeurs dans des espaces vectoriels réels de dimension finie. Il existe alors un entier B_0 majorant le nombre de composantes connexes de tout ensemble du type $\{x \in W \mid f(x,\varepsilon) > 0\,,\ g(x,\varepsilon') = 0\}$ indépendamment du choix de $\varepsilon \in [0,1]^N$ et de $\varepsilon' \in [0,1]^{N'}$.*

Un ensemble semi-pfaffien est la réunion d'une famille localement finie de sous-variétés différentiables analytiques de $\mathbb{R}^n$ (voir [Li2] ou [LRol]). En tout point de son adhérence, sa dimension est donc définie. Possède-t-il une densité finie en ces points? En utilisant la propriété de finitude précédente et en faisant un peu de géométrie intégrale, on répond positivement à cette question.

THÉORÈME. — *Un ensemble semi-pfaffien de dimension k en un point de son adhérence possède une k-densité finie en ce point.*

La preuve proposée est une adaptation au cadre de la géométrie intégrale (voir [KPR]) des preuves des théorèmes comparables de [KuRa] et [Roc]. Nous la donnerons après avoir introduit des notations et fait des rappels de géométrie intégrale ([San], [Lan]).

1. Un peu de géométrie intégrale

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la métrique euclidienne canonique. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel euclidien de $\mathbb{R}^n$. On note B_E la boule unité ouverte de E. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. On note $\mathcal{G}_k$ la grassmannienne des k-plans vectoriels euclidiens de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{B}_k$ l'espace $\mathbf{B}_k\{(y, B_E) \mid y \in B_E\,,\ E \in \mathcal{G}_k\}$. Les espaces $\mathcal{G}_k$ et $\mathbf{B}_k$ sont munis de mesures canoniquement obtenues à partir de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété différentiable analytique de dimension k et soit $E \in \mathcal{G}_k$ un k-plan vectoriel. On note π la projection orthogonale sur E. La sous-variété V est munie de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif. On pose $V^\varepsilon = \{x \in V \mid \|x\| < \varepsilon\}$. On définit les fonctions $\underline{\theta}^\varepsilon_{V,E}$, $\theta^\varepsilon_{V,E}$, et $\overline{\theta}^\varepsilon_{V,E}$ suivantes. S'il existe un entier qui majore le cardinal de toute fibre $\pi^{-1}(z) \cap V^\varepsilon$ avec $z \in E \setminus \{0\}$, on pose

$$\forall\, y \in B_E \setminus \{0\}\,, \quad \begin{aligned} \theta^\varepsilon_{V,E}(y) &= \operatorname{Card}\big(\pi^{-1}(\varepsilon y) \cap V^\varepsilon\big)\,, \\ \underline{\theta}^\varepsilon_{V,E}(y) &= \inf\big\{\theta^t_{V,E}(y) \mid 0 < t \leq \varepsilon\big\}\,, \\ \overline{\theta}^\varepsilon_{V,E}(y) &= \sup\big\{\theta^t_{V,E}(y) \mid 0 < t \leq \varepsilon\big\}\,. \end{aligned}$$

Sinon on pose $\underline{\theta}^\varepsilon_{V,E} \equiv \theta^\varepsilon_{V,E} \equiv \overline{\theta}^\varepsilon_{V,E}$. On note $\underline{\Theta}^\varepsilon_V$, Θ^ε_V et $\overline{\Theta}^\varepsilon_V$ les fonctions définies sur $\mathbf{B}_k$ par

$$\underline{\Theta}^\varepsilon_V(y, B_E) = \underline{\theta}^\varepsilon_{V,E}(y)\,, \quad \Theta^\varepsilon_V(y, B_E) = \theta^\varepsilon_{V,E}(y) \quad \text{et} \quad \overline{\Theta}^\varepsilon_V(y, B_E) = \overline{\theta}^\varepsilon_{V,E}(y)\,.$$

Les fonctions $\underline{\Theta}^\varepsilon_V$, Θ^ε_V et $\overline{\Theta}^\varepsilon_V$ sont mesurables. Si elles sont bornées, elles sont sommables. C'est ce que nous supposons. D'après la formule de Cauchy–Crofton (voir [San] ou [Lan]), le volume k-dimensionnel $\operatorname{vol}_k(W^\varepsilon)$ de l'ensemble W^ε, image de V^ε par l'homothétie de rapport $1/\varepsilon$ et de centre l'origine vérifie l'égalité

$$\operatorname{vol}_k(W^\varepsilon) = c_k \int_{\mathbf{B}_k} \Theta^\varepsilon_V$$

où c_k est une constante universelle. Or le volume $\operatorname{vol}_k(V^\varepsilon)$ est égal à $\varepsilon^k \operatorname{vol}_k(W^\varepsilon)$. Ainsi en intégrant les inégalités $\underline{\Theta}^\varepsilon_V \leq \Theta^\varepsilon_V \leq \overline{\Theta}^\varepsilon_V$, on obtient

$$0 \leq \int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}^\varepsilon_V \leq \frac{\operatorname{vol}_k(V^\varepsilon)}{c_k \varepsilon_k} = \int_{\mathbf{B}_k} \Theta^\varepsilon_V \leq \int_{\mathbf{B}_k} \overline{\Theta}^\varepsilon_V < +\infty\,.$$

Pour que la sous-variété $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k possède la propriété de k-densité à l'origine, il suffit donc que les limites quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0 des intégrales $\int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}^\varepsilon_V$ et $\int_{\mathbf{B}_k} \overline{\Theta}^\varepsilon_V$ existent et soient finies et égales.

2. Preuve du théorème

Nous allons appliquer ces résultats à la situation semi-pfaffienne pour prouver la propriété de densité.

Tout semi-pfaffien est une réunion localement finie disjointe de composantes connexes de semi-pfaffiens relativement compacts qui sont des sous-variétés différentiables analytiques (voir [Li2] ou [LRol]). Pour prouver le théorème il suffit donc de prouver qu'une composante connexe V d'un semi-pfaffien relativement compact qui est une sous-variété différentiable analytique possède la propriété de densité à l'origine de $\mathbb{R}^n$. On considère une telle composante connexe V. On note k sa dimension.

D'après la propriété de finitude pour les semi-pfaffiens, il existe un entier indépendant de $\varepsilon > 0$ qui majore les fonctions sommables $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$, Θ_V^ε et $\overline{\Theta}_V^\varepsilon$.

Or les fonctions $\underline{\Theta}_V^\varepsilon$ et $\overline{\Theta}_V^\varepsilon$ convergent simplement, lorsque ε tend vers 0, vers deux fonctions notées $\underline{\Theta}_V$ et $\overline{\Theta}_V$. Ces dernières sont donc sommables et uniformément bornées.

Soit $E \in \mathcal{G}_k$ un k-plan et soit $\overrightarrow{u} \in E$ un vecteur unitaire. Supposons les applications $\underline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon$, $\Theta_{V,E}^\varepsilon$ et $\overline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon$ non identiquement nulles pour $\varepsilon > 0$ petit. Le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}\big(\{t\overrightarrow{u} \mid 0 < t < \varepsilon\}\big) \cap V^\varepsilon$ est un entier p indépendant de $\varepsilon > 0$ petit. D'après le lemme de sélection de courbes de la géométrie pfaffienne [Li1], [Li2] et [LRoc], chaque composante C_i^ε, $i = 1, \ldots, p$, est une courbe analytique qui aboutit à l'origine avec une tangente $\overrightarrow{v}_i\big(\|\overrightarrow{v}_i\| = 0\big)$ et la projection $\pi : C_i^\varepsilon \to \mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ est un plongement. Pour $i = 1, \ldots, p$, on note t_i le réel vérifiant $\pi(\overrightarrow{v}_i) = t_i\overrightarrow{u}$. Si $t \in \,]0\,,1\,[$ est différent de $t_1, \ldots, t_p$, alors les nombres $\underline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon(t\overrightarrow{u})$, $\Theta_{V,E}^\varepsilon(t\overrightarrow{u})$ et $\overline{\Theta}_{V,E}^\varepsilon(t\overrightarrow{u})$ sont égaux et indépendants de $\varepsilon > 0$ petit (voir un argument analogue chez [KuRa], [KPR] et [Roc]). En appliquant le théorème de Fubini, on déduit alors que les fonctions $\underline{\Theta}_V$ et $\overline{\Theta}_V$ coïncident en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Il en découle, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et de la double inégalité $\underline{\Theta}_V^\varepsilon \leq \Theta_V^\varepsilon \leq \overline{\Theta}_V^\varepsilon$ que la somme $\int_{\mathbf{B}_k} \Theta_V^\varepsilon$ qui est égale à $\mathrm{vol}_k(V^\varepsilon)/c_k\varepsilon^k$, converge quand ε tend vers 0 vers les sommes $\int_{\mathbf{B}_k} \underline{\Theta}_V$ et $\int_{\mathbf{B}_k} \overline{\Theta}_V$ qui sont égales. Ceci prouve la propriété de densité et conclut la preuve. □

En adaptant la preuve précédente, on prouve facilement le corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Soit W un ensemble semi-pfaffien de $\mathbb{R}^{n+m}$. Si la restriction de la projection canonique π de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$ à $\overline{W}$ est propre, alors l'ensemble $\pi(W)$ possède la propriété de densité en tout point de son adhérence. C'est vrai en particulier pour un sous-analytique.*

Remarque. — La technique proposée ici peut certainement servir à prouver d'autres propriétés des ensembles semi-pfaffiens. En particulier elle doit permettre de retrouver la finitude homologique de ces ensembles [LRol].

Remerciements

Je remercie O. Couture, R. Langevin et C. A. Roche qui m'ont aidé à rendre ces propos exacts.

Bibliographie

[DS] DENKOWSKA (S.) et STASICA (J.) .— *Ensembles sous-analytiques à la polonaise*, preprint (1985).

[Kho] KHOVANSKII (A. G.) .— *Real analytic varieties with finiteness property and complex abelian integrals*, Funct. Anal. and Appl. **18** (1984), pp. 119-127.

[KPR] KURDYKA,(K.), POLY (J.-B.) et RABY (G.) .— *Moyennes des fonctions sous-analytiques, densité, cône tangent*, L.N.M. 1420 (proceedings Trento 1988), pp. 170-177.

[KuRa] KURDYKA (K.) et RABY (G.) .— *Densité des ensembles sous-analytiques*, Ann. Institut Fourier **39**, n° 3 (1989), pp. 753-771.

[Lan] LANGEVIN (R.) .— *Un peu de géométrie intégrale*, Images des Mathématiques, CNRS (1995), pp. 58-67.

[Lel] LELONG (P.) .— *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), pp. 239-262.

[LRoc] LION (J.-M.) et ROCHE (C.-A.) .— *Topologie des hypersurfaces pfaffiennes*, Bull. Soc. math. France, **124** (1996), pp. 35-59.

[LRol] LION (J.-M.) et ROLIN (J.-P.) .— *Homologie des ensembles semi-pfaffiens*, Ann. Institut Fourier **46**, n° 3 (1996), pp. 723-741.

[Li1] LION (J.-M.) .— *Partitions normales de Lojasiewicz et hypersurfaces pfaffiennes*, C.R.A.S. de Paris, Série I, **311** (1990), pp. 453-456.

[Li2] LION (J.-M.) .— *Étude des hypersurfaces pfaffiennes*, Thèse de l'Université de Bourgogne, novembre 1991.

[Loj] LOJASIEWICZ (S.) .— *Ensembles semi-analytiques*, Preprint I.H.E.S. (1965).

[MR1] MOUSSU (R.) et ROCHE (C.-A.) .— *Théorie de Hovanskii et problème de Dulac*, Invent. Math. **105** (1991), pp. 431-441.

[M-R1] MOUSSU (R.) et ROCHE (C.-A.) .— *Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle*, Ann. Institut Fourier **42**, n° 1-2 (1992), pp. 393-420.

[Roc] ROCHE (C.-A.) .— *Densities for certain leaves of real analytic foliations*, Astérisque **222** (1994), pp. 373-387.

[San] SANTALÓ (L. A.) .— *Integral geometry and geometric probability* dans "Encyclopedia of mathematics and its applications", Addison-Wesley, Reading, **1** (1976),

[Vit] VITUSHKIN (A. G.) .— *Variation multidimensionnelle*, Go. Tekh. Izdat Moscou, 1955 (en russe).