SANDRINE LAGAIZE

Taux de croissance d'un subordinateur à double indice

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 8, no 4 (1999), p. 561-578

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_4_561_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 4, 1999
pp. 561–578

Taux de croissance d'un subordinateur à double indice (*)

SANDRINE LAGAIZE (1)

RÉSUMÉ. — Nous étudions le taux de croissance asymptotique des trajectoires d'un subordinateur à double indice en chaque point et à l'infini.

ABSTRACT. — We study the asymptotic rate of growth of the sample paths of two-parameter subordinators at every point and at infinity.

1. Introduction

On appelle subordinateur un processus dont les accroissements sont stationnaires, indépendants et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Comme les trajectoires d'un tel processus X sont croissantes, Fristedt [6, 7] puis récemment Bertoin [4, 5] ont étudié le comportement local de $X_t/h(t)$ pour des fonctions h définies sur $\mathbb{R}^+$, positives et croissantes. En nous inspirant de leurs travaux, nous nous intéressons au cas d'un subordinateur à double indice $\{X_t \ ; \ t \in (\mathbb{R}^+)^2\}$ en étudiant le comportement du taux $X_t/h(t_1t_2)$ au voisinage de l'origine, d'une part et au voisinage de l'infini, d'autre part. Par ailleurs, contrairement au cas mono-indice, l'étude au voisinage d'un point t autre que l'origine demande un traitement spécial et la quantité considérée est alors $|X_{t+u} - X_t|/h(||u||)$ où $||.||$ est la norme du maximum et où u est un

(*) Reçu le 31 mars 1999, accepté le 7 décembre 1999
(1) UMR 6628-MAPMO, Université d'Orléans et CNRS, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France.
Adresse actuelle: Université du Littoral, Centre universitaire de la Mi-voix, bâtiment Henri Poincaré, 50, rue F. Buisson, B.P. 699, 62228 Calais cedex, France.
E-mail: lagaize@lma.univ-littoral.fr

point de $\mathbb{R}^2$ voisin de $(0,0)$. Dans les trois cas, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de convergence vers 0. Puisqu'un subordinateur est un champ de Lévy particulier, nous commençons par définir un tel processus et nous poursuivons en établissant quelques résultats préliminaires. Ensuite, chacune des trois situations fait l'objet d'un paragraphe.

2. Définitions

Pour une fonction f définie sur $(\mathbb{R}^+)^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, comment remplacer la notion de continuité à droite et limite à gauche des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$? Un instant $t = (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ détermine les quadrants suivants.

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 \ ; \ s_1 \geqslant t_1, \ s_2 \geqslant t_2\} \\ Q_2(t) &= \{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 \ ; \ s_1 < t_1, \ s_2 \geqslant t_2\} \\ Q_3(t) &= \{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 \ ; \ s_1 < t_1, \ s_2 < t_2\} \\ Q_4(t) &= \{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 \ ; \ s_1 \geqslant t_1, \ s_2 < t_2\} \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.1.— *On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions f définies sur $(\mathbb{R}^+)^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, $f(s)$ admette une limite quand $s \to t$, $s \in Q_i(t)$ et*

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \in Q_1(t)}} f(s) = f(t).$$

Remarque.— Cet espace peut être muni d'une topologie de type Skorohod (*cf.* Straf [11]).

Notations.— Définissons dans $(\mathbb{R}^+)^2$ l'ordre suivant. Pour $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$, on note $a \leqslant b$ lorsque $a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 \leqslant b_2$ et $a < b$ lorsque $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$.

De plus, pour deux points $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ tels que $a < b$, on désigne par $]a, b]$ le rectangle $]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$ et de la même façon pour les autres cas de figures, selon le sens des crochets.

DÉFINITION 2.2.— *Soit f une fonction définie sur $(\mathbb{R}^+)^2$. On appelle accroissement de f sur le rectangle $]a, b]$, noté $f(]a, b])$, la quantité*

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) - f(b_1, a_2) + f(a_1, a_2)$$

et pour une famille finie de rectangles disjoints $(A_i \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant n)$, on définit

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i).$$

DÉFINITION 2.3.— *Pour tout rectangle A et tout $p \in (\mathbb{R}^+)^2$, on définit le translaté de A, noté $A+p$, par*

$$A + p = \{t + p \ ; \ t \in A\}.$$

DÉFINITION 2.4.— *Soit un processus $X = (X_t \ ; \ t \in (\mathbb{R}^+)^2)$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \ \mathcal{F}, \ P)$. On dit que X est à accroissements indépendants si, pour toute famille finie (A_i) de rectangles disjoints, les variables aléatoires $X(A_i)$ sont mutuellement indépendantes.*

On dit que X est à accroissements stationnaires si, pour tout rectangle A et tout $p \in (\mathbb{R}^+)^2$, les variables aléatoires $X(A+p)$ et $X(A)$ ont même loi.

DÉFINITION 2.5.— *On appelle champ de Lévy un processus à accroissements stationnaires et indépendants dont les trajectoires sont à valeurs dans $\mathcal{D}$ et nulles sur les bords du quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$.*

DÉFINITION 2.6.— *On appelle subordinateur à double indice un champ de Lévy dont les accroissements sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*

Notation.— Si X est un champ de Lévy, on note ΔX le processus des sauts, défini par

$$\Delta X_t = X_{t_1,t_2} - X_{t_1^-,t_2} - X_{t_1,t_2^-} + X_{t_1^-,t_2^-}$$

où $X_{t_1^-,t_2} = \lim\limits_{\substack{s \to t_1 \\ s < t_1}} X_{s,t_2}$ et X_{t_1,t_2^-}, $X_{t_1^-,t_2^-}$ sont définis de manière analogue.

Remarque.— Par analogie avec le cas mono-indice, un subordinateur à paramètre double est caractérisé par son *exposant de Laplace* ϕ, défini, pour tout $u \geqslant 0$, par

$$E(e^{-uX_t}) = \exp(-t_1 t_2 \phi(u))$$

et donné par la formule de Lévy-Khintchine

$$\phi(u) = \mathrm{d}u + \int_{]0,\infty[} (1 - e^{-ux}) \pi(dx)$$

où le *drift* d est positif et la mesure de Lévy π vérifie $\int_{]0,\infty[} (1 \wedge x) \pi(dx) < \infty$.

3. Préliminaires

Considérons un subordinateur à double indice $\{X_t \ ; \ t \in (\mathbb{R}^+)^2\}$ de mesure de Lévy π. Notons

$$\bar{\pi}(u) = \pi(]u, \infty[)$$

et

$$I(x) = \int_0^x \bar{\pi}(u)du.$$

On a alors

$$\frac{\phi(u)}{u} = \mathrm{d} + \int_0^\infty e^{-ux}\bar{\pi}(x)dx. \tag{3.1}$$

Mais comme le comportement local du terme de *drift* est connu, on suppose désormais que d $= 0$. Par ailleurs, dans toute la suite, h désigne une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $h(0) = 0$ et $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

D'autre part, nous serons amenés à ajouter l'une ou l'autre des hypothèses suivantes.

(H_1) la fonction $u \mapsto h(u)/u$ est croissante,

(H_2) $\liminf_{x\to 0^+} \frac{I(2x)}{I(x)} > 1,$

(H_2') $\liminf_{x\to\infty} \frac{I(2x)}{I(x)} > 1.$

LEMME 3.1. — *Sous l'hypothèse* (H_1), *les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) $\int_0^1 \ln(1/u)\bar{\pi}(h(u))du < \infty$

b) $\int_0^1 \ln(1/u)\Big(\phi(1/h(u)) - (1/h(u))\phi'(1/h(u))\Big)du < \infty.$

Démonstration. — D'après (3.1),

$$\begin{aligned}\phi(1/h(u)) - (1/h(u))\phi'(1/h(u)) &= \frac{1}{h(u)^2}\int_0^\infty xe^{-(x/h(u))}\bar{\pi}(x)dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-x}\bar{\pi}(xh(u))dx.\end{aligned}$$

Or, lorsque $x < 1$,

$$\bar{\pi}(xh(u)) \geqslant \bar{\pi}(h(u)).$$

On en déduit que

$$(1 - 2e^{-1})\bar{\pi}(h(u)) \leqslant (\phi(1/h(u)) - (1/h(u))\phi'(1/h(u)))$$

et donc b) implique a). D'autre part, en utilisant (H_1) et la décroissance de $\bar{\pi}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln(1/u)\Big(\int_0^\infty xe^{-x}\bar{\pi}(xh(u))dx\Big)du \\
&\leqslant \int_0^1 \ln(1/u)\Big(\int_0^1 xe^{-x}\bar{\pi}(h(ux))dx\Big)du + \int_1^\infty xe^{-x}dx \int_0^1 \ln(1/u)\bar{\pi}(h(u))du \\
&= \int_0^1 e^{-x}\Big(\int_0^x \ln(x/u)\bar{\pi}(h(u))du\Big)dx + \int_1^\infty xe^{-x}dx \int_0^1 \ln(1/u)\bar{\pi}(h(u))du \\
&\leqslant C\int_0^1 \ln(1/u)\bar{\pi}(h(u))du
\end{aligned}$$

qui termine la démonstration. □

Notation. — Si f et g sont des fonctions positives, on écrira $f \asymp g$ si il existe une constante positive C telle que $Cf(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)/C$ pour tout x.

Rappelons le résultat suivant que l'on trouve dans [4].

LEMME 3.2. — *On a*

$$\frac{\phi(x)}{x} \asymp I\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Terminons le paragraphe en montrant le résultat suivant.

LEMME 3.3. — *i) Sous l'hypothèse (H_2), on a*

$$0 < \liminf_{u\to 0} \frac{\bar{\pi}(u)}{\phi(1/u)} \leqslant \limsup_{u\to 0} \frac{\bar{\pi}(u)}{\phi(1/u)} < \infty.$$

ii) Sous l'hypothèse (H_2'), on a

$$0 < \liminf_{u\to \infty} \frac{\bar{\pi}(u)}{\phi(1/u)} \leqslant \limsup_{u\to \infty} \frac{\bar{\pi}(u)}{\phi(1/u)} < \infty.$$

Démonstration. — Par décroissance de $\bar{\pi}$,

$$I(x) \geqslant x\bar{\pi}(x).$$

D'autre part

$$I(2x) = I(x) + \int_x^{2x} \bar{\pi}(u)du \leqslant I(x) + x\bar{\pi}(x)$$

dont on déduit par hypothèse

$$\liminf_{x \to 0^+} \frac{x\overline{\pi}(x)}{I(x)} > 0.$$

Et on obtient i) à l'aide du lemme 3.2. Pour montrer ii), on raisonne de la même façon. □

4. Etude au voisinage de l'origine

En appliquant le résultat de [10] à un subordinateur à double indice X, on obtient le comportement de $X_t/(t_1t_2)^{1/\alpha}$ selon α, au voisinage de l'origine. Etendons ceci en étudiant maintenant $X_t/h(t_1t_2)$.

PROPOSITION 4.1.— *Sous l'hypothèse* (H_1), *si*

$$\int_0^1 \ln(1/u)\overline{\pi}(h(u))du = +\infty \tag{4.2}$$

alors

$$\limsup_{\max(t_1,t_2)\to 0} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} = +\infty \quad p.s.$$

Remarque.— D'après le lemme 3.1, on peut remplacer la condition intégrale (4.2) par

$$\int_0^1 \ln(1/u)\Big(\phi(1/h(u)) - (1/h(u))\phi'(1/h(u))\Big)du = +\infty.$$

Démonstration de la proposition 4.1

Pour $t \in (\mathbb{R}^+)^2$, notons $||t|| = \max(t_1, t_2)$. Pour tout $c > 1$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta \in]0, \varepsilon[$, la variable aléatoire

$$\mathrm{card}\{t \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \eta < ||t|| < \varepsilon\ ;\ \Delta X_t > ch(t_1t_2)\}$$

suit une loi de Poisson de paramètre

$$I = \int\int_{\{t\in(\mathbb{R}^+)^2,\ \eta<||t||<\varepsilon\}} \overline{\pi}(ch(t_1t_2))dt_1dt_2.$$

Or,

$$\begin{aligned} I &= 2\int\int_{\{t\in(\mathbb{R}^+)^2,\ t_1\leqslant t_2,\ t_2\in]\eta,\varepsilon[\}} \overline{\pi}(ch(t_1t_2))dt_1dt_2 \\ &= 2\int_0^{\varepsilon^2} \Big(\int_{\eta\vee\sqrt{u}}^{\varepsilon} \frac{1}{v}dv\Big)\overline{\pi}(ch(u))du, \end{aligned}$$

par le changement de variables

$$\begin{cases} t_1 t_2 = u \\ t_2 = v. \end{cases}$$

D'où

$$I = 2\int_0^{\varepsilon^2} \ln \frac{\varepsilon}{\eta \vee \sqrt{u}} \bar{\pi}(ch(u))du.$$

D'autre part, par (H_1),

$$\bar{\pi}(ch(u)) \geqslant \bar{\pi}(h(cu))$$

et d'après la condition intégrale,

$$\int_0^{\varepsilon^2} \ln \frac{\varepsilon}{\sqrt{u}} \bar{\pi}(h(cu))du = +\infty.$$

Par conséquent, presque sûrement, il existe une infinité de points s tels que $0 < ||s|| < \varepsilon$ et vérifiant

$$\Delta X_s > ch(s_1 s_2)$$

et *a fortiori*, pour un tel s,

$$X_s > ch(s_1 s_2).$$

Donc, pour tout $c > 1$,

$$\limsup_{||t|| \to 0} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} \geqslant c \quad \text{p.s.}$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque. — D'après (3.1), on sait que, puisque $\mathrm{d} = 0$, pour tout $u \geqslant 0$,

$$\lim_{\substack{\min(t_1,t_2) \to 0^+ \\ t \in]0,1]^2}} t_1 t_2 \phi(u/t_1 t_2) = 0.$$

Or, il en résulte que $X_t/t_1 t_2$ converge en probabilité vers 0 lorsque $\min(t_1, t_2) \to 0^+$, $t \in]0,1]^2$. Cependant la proposition 4.1 permet d'affirmer que, contrairement au cas des subordinateurs à indice simple, on n'a pas, en général, convergence presque sûre de $X_t/t_1 t_2$ vers 0.

PROPOSITION 4.2. — *Sous l'hypothèse (H_2), si*

$$\int_0^1 \ln(1/u) \bar{\pi}(h(u))du = +\infty, \tag{4.3}$$

alors

$$\limsup_{\max(t_1,t_2) \to 0} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} = +\infty \quad p.s.$$

Remarque. — Par le lemme 3.3, on sait que, sous l'hypothèse (H_2), la condition (4.3) est équivalente à

$$\int_0^1 \ln(1/u)\phi(1/h(u))du = +\infty. \tag{4.4}$$

Démonstration de la proposition 4.2

En utilisant la variable aléatoire

$$\mathrm{card}\{t \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \eta < ||t|| < \varepsilon\ ;\ \Delta X_t > h(t_1 t_2)\},$$

on montre, comme précédemment, que

$$\limsup_{||t|| \to 0} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} \geqslant 1 \quad \text{p.s.}$$

Or, d'après la remarque et le fait que, par concavité de ϕ, la condition (4.4) reste vraie en remplaçant h par ch avec $c > 1$, on montre en fait que, pour tout $c > 1$,

$$\limsup_{||t|| \to 0} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} \geqslant c \quad \text{p.s.},$$

qui permet de conclure. □

Demandons-nous maintenant ce qu'il advient lorsque les intégrales des conditions (4.2) et (4.4) convergent.

PROPOSITION 4.3. — *Si*

$$\int_0^1 \ln(1/u)\phi(1/h(u))du < +\infty, \tag{4.5}$$

alors

$$\lim_{\substack{\min(t_1, t_2) \to 0 \\ t \in]0,1]^2}} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} = 0 \quad \textit{p.s.}$$

Démonstration. — Pour tout $t \in (\mathbb{R}^+)^2$ et tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_t \geqslant a) &\leqslant (1 - (1/e))^{-1} E\Big(1 - \exp(-(1/a)X_t)\Big) \\ &= (1 - (1/e))^{-1}\Big(1 - \exp(-t_1 t_2 \phi(1/a))\Big) \\ &\leqslant (1 - (1/e))^{-1} t_1 t_2 \phi(1/a). \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'où, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant 0$,

$$P\Big(X_{(2^{-n+1},2^{-m+1})} \geqslant h(2^{-(n+m)})\Big) \leqslant 4(1-(1/e))^{-1}2^{-(n+m)}\phi(1/h(2^{-(n+m)})).$$

Or

$$\sum_{n,m\geqslant 0} 2^{-(n+m)}\phi(1/h(2^{-(n+m)})) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k}\phi(1/h(2^{-k}))$$

et cette somme est finie d'après (4.5). Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour n ou m assez grand,

$$X_{(2^{-n+1},2^{-m+1})} < h(2^{-(n+m)})$$

et donc, pour tout t tel que $2^{-n} \leqslant t_1 < 2^{-n+1}$ et $2^{-m} \leqslant t_2 < 2^{-m+1}$ avec n ou m assez grand,

$$X_t \leqslant X_{(2^{-n+1},2^{-m+1})} < h(2^{-(n+m)}) \leqslant h(t_1t_2).$$

Mais comme la condition (4.5) est encore vraie en remplaçant h par εh avec $0 < \varepsilon < 1$, on montre en fait que, pour $t \in]0,1]^2$ avec t_1 ou t_2 assez petit,

$$X_t < \varepsilon h(t_1t_2)$$

et le résultat s'en déduit. □

Finalement, nous avons prouvé le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Sous l'hypothèse (H_2), si* $\int_0^1 \ln(1/u)\bar{\pi}(h(u))du < \infty$, *alors*

$$\lim_{\substack{\min(t_1,t_2)\to 0\\ t\in]0,1]^2}} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} = 0 \quad p.s.$$

et sinon

$$\limsup_{\max(t_1,t_2)\to 0} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} = \infty \quad p.s.$$

5. Etude au voisinage d'un point quelconque

L'objet de ce paragraphe est d'étudier le comportement de $|X_{t+u} - X_t|$ lorsque $t \in (\mathbb{R}^+)^2$ et u est proche de $(0,0)$.

Notation. — On note $||.||$ la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par $||u|| = \max(|u_1|,|u_2|)$.

PROPOSITION 5.1.— *Sous l'hypothèse (H_1), si*

$$\int_0^1 \bar{\pi}(h(u))du = +\infty \tag{5.7}$$

alors, pour tout $t \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\limsup_{||u|| \to 0} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = +\infty \quad p.s.$$

Remarque.— D'après [4] (p. 85), on peut remplacer la condition intégrale (5.7) par

$$\int_0^1 \Big(\phi(1/h(u)) - (1/h(u))\phi'(1/h(u))\Big)du = +\infty.$$

Démonstration de la proposition 5.1

On sait, d'après les travaux de Fristedt [6], que pour un processus de Lévy $(Z_s)_{s\geqslant 0}$ de mesure de Lévy π, on a sous l'hypothèse (H_1) et sous la condition intégrale (5.7),

$$\limsup_{s \to 0} \frac{Z_s}{h(s)} = +\infty \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, pour tout $t_1 \geqslant 0$, on obtient, en considérant le processus de Lévy $(X_{t_1,u_2})_{u_2 \geqslant 0}$,

$$\limsup_{u_2 \to 0} \frac{X_{t_1,u_2}}{h(u_2)} = +\infty \quad \text{p.s.}$$

Autrement dit, pour tout $c > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe presque sûrement une infinité de points $u_2 \in]0, \varepsilon[$ tels que

$$X_{t_1,u_2} > ch(u_2).$$

Par conséquent, pour tout $c > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe presque sûrement une infinité de couples $(u_1, u_2) \in]0, \varepsilon[^2$ tels que $u_1 \leqslant u_2$ et

$$X_{t_1,u_2} > ch(u_2)$$

soit encore

$$X_{t_1,u_2} > ch(||u||).$$

Alors, comme $X_{t_1,t_2+u_2} - X_t$ a même loi que X_{t_1,u_2}, on obtient, pour tout $c > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une infinité de couples $(u_1, u_2) \in]0, \varepsilon[^2$ tels que

$$X_{t_1,t_2+u_2} - X_t > ch(||u||).$$

Or, pour tout $u \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a

$$|X_{t+u} - X_t| = X_{t+u} - X_t \geqslant X_{t_1,t_2+u_2} - X_t.$$

Donc, pour tout $c > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe presque sûrement une infinité de couple $(u_1, u_2) \in]0, \varepsilon[^2$ tels que

$$|X_{t+u} - X_t| > ch(||u||).$$

On en déduit le résultat annoncé. □

Comme précédemment, on démontre aussi le résultat suivant.

PROPOSITION 5.2.— *Sous l'hypothèse (H_2), si*

$$\int_0^1 \bar{\pi}(h(u))du = +\infty, \tag{5.8}$$

alors, pour tout $t \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\limsup_{||u|| \to 0} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = +\infty \quad p.s.$$

Remarque.— D'après [4] (p.87), on peut remplacer la condition intégrale (5.8) par

$$\int_0^1 \phi(1/h(u))du = +\infty.$$

PROPOSITION 5.3.— *Si*

$$\int_0^1 \phi(1/h(u))du < +\infty, \tag{5.9}$$

alors, pour tout $t \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{||u|| \to 0} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = 0 \quad p.s.$$

Démonstration.

Considérons un point $t \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. Nous sommes amenés à distinguer quatre cas.

— Supposons que $u \in Q_1(0,0)$.

On a alors $X_{t+u} \geqslant X_t$. Et d'après l'inégalité (4.6), il existe une constante $c_1(t) > 0$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} P\Big(X_{t+(2^{-n+1},2^{-n+1})} - X_t \geqslant h(2^{-n})\Big) \\ \leqslant (1-(1/e))^{-1}(2^{-n+1}(t^1+t^2) + 2^{-2n+2})\phi(1/h(2^{-n})) \\ \leqslant c_1(t) 2^{-n}\phi(1/h(2^{-n})). \end{aligned}$$

Or, la somme $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\phi(1/h(2^{-n}))$ est finie d'après (5.9). Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour n assez grand,

$$X_{t+(2^{-n+1},2^{-n+1})} - X_t < h(2^{-n})$$

et donc, pour tout $u \in Q_1(0,0)$ tel que $2^{-n} \leqslant ||u|| < 2^{-n+1}$ avec n assez grand,

$$X_{t+u} - X_t \leqslant X_{t+(2^{-n+1},2^{-n+1})} - X_t < h(2^{-n}) \leqslant h(||u||).$$

Mais comme la condition (5.9) est encore vraie en remplaçant h par εh avec $0 < \varepsilon < 1$ (par concativité de ϕ), on montre en fait que, pour $||u||$ assez petit,

$$X_{t+u} - X_t < \varepsilon h(||u||)$$

et par conséquent

$$\lim_{\substack{||u|| \to 0 \\ u \in Q_1(0,0)}} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = 0 \quad \text{p.s.}$$

— Supposons que $u \in Q_3(0,0)$.

On a alors $X_{t+u} \leqslant X_t$. Et d'après l'inégalité (4.6), on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} P\Big(X_t - X_{t-(2^{-n+1},2^{-n+1})} \geqslant h(2^{-n})\Big) \\ \leqslant (1-(1/e))^{-1}(2^{-n+1}(t^1+t^2) - 2^{-2n+2})\phi(1/h(2^{-n})) \\ \leqslant c_3(t) 2^{-n}\phi(1/h(2^{-n})) \end{aligned}$$

Or, la somme $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\phi(1/h(2^{-n}))$ est finie d'après (5.9). Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour n assez grand,

$$X_t - X_{t-(2^{-n+1},2^{-n+1})} < h(2^{-n})$$

et donc, pour tout $u \in Q_3(0,0)$ tel que $2^{-n} \leqslant ||u|| < 2^{-n+1}$ avec n assez grand,

$$X_t - X_{t+u} \leqslant X_t - X_{t-(2^{-n+1},2^{-n+1})} < h(2^{-n}) \leqslant h(||u||).$$

On conclut comme précédemment.

— Supposons que $u \in Q_2(0,0)$. On a alors

$$\begin{aligned} P\Big(X_{(t_1,t_2+2^{-n+1})} - X_{(t_1-2^{-n+1},t_2)} \geqslant h(2^{-n})\Big) \\ \leqslant (1-(1/e))^{-1}(2^{-n+1}(t_1+t_2))\phi(1/h(2^{-n})) \\ \leqslant c_2(t)2^{-n}\phi(1/h(2^{-n})) \end{aligned}$$

Or, la somme $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\phi(1/h(2^{-n}))$ est finie d'après (5.9). On conclut de la même façon que dans le premier cas en remarquant que, pour tout $u \in Q_2(0,0)$ tel que $2^{-n} \leqslant ||u|| < 2^{-n+1}$ avec n assez grand,

$$\begin{aligned} |X_{t+u} - X_t| &\leqslant |X_{t+u} - X_{(t_1+u_1,t_2)}| + |X_{(t_1+u_1,t_2)} - X_t| \\ &\leqslant (X_{(t_1,t_2+2^{-n+1})} - X_t) + (X_t - X_{(t_1-2^{-n+1},t_2)}) \\ &= X_{(t_1,t_2+2^{-n+1})} - X_{(t_1-2^{-n+1},t_2)} \\ &\leqslant h(2^{-n}) \\ &\leqslant h(||u||). \end{aligned}$$

— Dans le cas où $u \in Q_4(0,0)$, on raisonne de façon similaire au cas précédent.

Enfin, lorsque $t = (0,t_2)$ avec $t_2 \in \mathbb{R}_*^+$ (resp. $t = (t_1,0)$ avec $t_1 \in \mathbb{R}_*^+$), on procède comme ci-dessus en considérant seulement les cas $u \in Q_1(0,0)$ et $u \in Q_4(0,0)$ (resp. $u \in Q_1(0,0)$ et $u \in Q_2(0,0)$). □

Finalement, nous avons prouvé le résultat suivant.

THÉORÈME 5.4.— *Sous l'hypothèse* (H_2), *si* $\int_0^1 \bar{\pi}(h(u))du < \infty$, *alors, pour tout* $t \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{||u||\to 0} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = 0 \quad p.s.$$

et sinon

$$\limsup_{||u||\to 0} \frac{|X_{t+u} - X_t|}{h(||u||)} = \infty \quad p.s.$$

6. Etude au voisinage de l'infini

Lorsque $X_{(1,1)}$ est intégrable, on a $E(X_{(1,1)}) = \phi'(0)$ et en montrant que, pour tout $u \geqslant 0$,

$$\lim_{\substack{\max(t_1,t_2)\to+\infty \\ \min(t_1,t_2)\geqslant 1}} E\Big(\exp(iu\frac{X_t}{t_1t_2})\Big) = e^{iu\phi'(0)},$$

on en déduit que X_t/t_1t_2 converge en probabilité vers $E(X_{(1,1)})$ lorsque t_1t_2 tend vers l'infini. Mais le résultat suivant confirme le fait que l'intégrabilité de $X_{(1,1)}$ ne suffit pas à donner la loi forte des grands nombres.

PROPOSITION 6.1.— *Sous l'hypothèse* (H_1), *si*

$$\int_1^\infty \ln u \ \bar{\pi}(h(u))du = +\infty \tag{6.10}$$

alors

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} = +\infty \quad p.s.$$

Démonstration.— Pour tout $c > 1$ et tout N et tout M tels que $1 \leqslant N < M$, la variable aléatoire

$$\mathrm{card}\{t \in (\mathbb{R}^+)^2,\ N \leqslant t_1, t_2 \leqslant M\ ;\ \Delta X_t > ch(t_1t_2)\}$$

suit une loi de Poisson d'intensité

$$I_{M,N} = \int_N^M \int_N^M \bar{\pi}(ch(t_1t_2))dt_1dt_2.$$

Or,

$$\begin{aligned} I_{M,N} &= 2\int\int_{N\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant M} \bar{\pi}(ch(t_1t_2))dt_1dt_2 \\ &= 2\int_{N^2}^{M^2}\int_{N\vee(u/M)}^{\sqrt{u}} \frac{1}{v}\bar{\pi}(ch(u))dudv, \end{aligned}$$

par le changement de variables

$$\begin{cases} t_1t_2 = u \\ t_1 = v. \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{M\to\infty} I_{M,N} = 2\int_{N^2}^\infty \ln\frac{\sqrt{u}}{N}\bar{\pi}(ch(u))du.$$

D'autre part, par (H_1),

$$\bar{\pi}(ch(u)) \geqslant \bar{\pi}(h(cu))$$

et d'après la condition intégrale,

$$\int_{N^2}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{u}}{N} \bar{\pi}(ch(u))du = +\infty.$$

Alors, presque sûrement, il existe une infinité de points s vérifiant $\min(s_1, s_2) \geqslant N$ et

$$\Delta X_s > ch(s_1 s_2)$$

et *a fortiori*, pour un tel s,

$$X_s > ch(s_1 s_2).$$

Donc, pour tout $c > 1$,

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} \geqslant c \quad \text{p.s.}$$

ce qui permet de conclure. □

COROLLAIRE 6.2.— *Si $E(X_{(1,1)}) = +\infty$, c'est-à-dire si $\int_1^\infty \bar{\pi}(x)dx = +\infty$,*

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{t_1 t_2} = +\infty \quad p.s.$$

PROPOSITION 6.3.— *Sous l'hypothèse (H_2'), si*

$$\int_1^\infty \ln u \; \bar{\pi}(h(u))du = +\infty \tag{6.11}$$

alors

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} = +\infty \quad p.s.$$

Remarque.— Sous l'hypothèse (H_2'), la condition (6.11) est équivalente à

$$\int_1^\infty \ln u \; \phi(1/h(u))du = +\infty. \tag{6.12}$$

Démonstration de la proposition 6.3

En utilisant la variable aléatoire

$$\operatorname{card}\{t \in (\mathbb{R}^+)^2,\ N \leqslant t_1, t_2 \leqslant M\ ;\ \Delta X_t > h(t_1 t_2)\},$$

on montre comme précédemment que

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} \geqslant 1 \quad \text{p.s.}$$

Or, d'après la remarque et le fait que, par concavité de ϕ, la condition (6.11) reste vraie en remplaçant h par ch avec $c > 1$, on montre en fait que, pour tout $c > 1$,

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} \geqslant c \quad \text{p.s.},$$

qui permet de conclure. □

En revanche, lorsque les intégrales des conditions (6.10) et (6.12) convergent, on a le résultat limite suivant.

PROPOSITION 6.4. — *Si*

$$\int_1^\infty \ln u\ \phi(1/h(u))du < +\infty, \tag{6.13}$$

alors

$$\lim_{\substack{\max(t_1,t_2)\to+\infty \\ \min(t_1,t_2)\geqslant 1}} \frac{X_t}{h(t_1t_2)} = 0 \quad \textit{p.s.}$$

Démonstration de la proposition 6.4

Comme nous l'avons remarqué dans la démonstration de la proposition 4.3, pour tout $t \in (\mathbb{R}^+)^2$ et tout $a > 0$,

$$P(X_t \geqslant a) \quad \leqslant \quad (1-(1/e))^{-1} t_1 t_2 \phi(1/a).$$

D'où, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant 0$,

$$P\Big(X_{(2^{n+1},2^{m+1})} \geqslant h(2^{n+m})\Big) \leqslant 4(1-(1/e))^{-1} 2^{n+m} \phi(1/h(2^{n+m})).$$

Or

$$\sum_{n,m\geqslant 0} 2^{n+m}\phi(1/h(2^{n+m})) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^k\phi(1/h(2^k))$$

et cette somme est finie d'après (6.13). Par conséquent, d'après le lemme de Borel-Cantelli, pour n ou m assez grand,

$$X_{(2^{n+1},2^{m+1})} < h(2^{n+m})$$

et donc, pour tout t tel que $2^n \leqslant t_1 < 2^{n+1}$ et $2^m \leqslant t_2 < 2^{m+1}$ avec n ou m assez grand,

$$X_t \leqslant X_{(2^{n+1},2^{m+1})} < h(2^{n+m}) \leqslant h(t_1 t_2).$$

Mais comme la condition (6.13) est encore vraie en remplaçant h par εh avec $0 < \varepsilon < 1$, on montre en fait que, pour t tel que $\min(t_1, t_2) \geqslant 1$ et t_1 ou t_2 assez grand,

$$X_t < \varepsilon h(t_1 t_2)$$

et le résultat s'en déduit. □

Remarque. — La condition (6.13) n'est jamais vérifiée pour $h(u) = u$. En effet, au voisinage de l'infini, $\phi(1/u)$ est équivalent à $(1/u)E(X_{(1,1)})$ et l'intégrale diverge, que cette espérance soit finie ou non.

Finalement, nous avons prouvé le résultat suivant.

THÉORÈME 6.5. — *Sous l'hypothèse* (H_2'), *si* $\displaystyle\int_1^\infty \ln u \; \bar{\pi}(h(u))du < \infty$, *alors*

$$\lim_{\substack{\max(t_1,t_2)\to+\infty \\ \min(t_1,t_2)\geqslant 1}} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} = 0 \quad p.s.$$

et sinon

$$\limsup_{\min(t_1,t_2)\to\infty} \frac{X_t}{h(t_1 t_2)} = \infty \quad p.s.$$

Bibliographie

[1] ADLER (R.J.), MONRAD (D.), SCISSORS (R.H.) and WILSON (R.). — Representations, decompositions and sample function continuity of random fields with independant increments. *Stoc. Proc. and Applic.* **15**, 3-30 (1983).

[2] ADLER (R.J.) et FEIGIN (P.D.). — On the cadlaguity of random measures. *Ann. Proba.* **12**, 615-630 (1984).

[3] BASS (R.F.) and PYKE (R.). — The existence of set-indexed Lévy processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **66**, 157-172 (1984).

[4] BERTOIN (J.). — *Lévy Processes.* Cambridge University Press (1996).

[5] BERTOIN (J.). — Sample path behaviour in connection with generalized arcsine laws. *Probab. Theorie Relat. Fields* **103**, 317-327 (1995).

[6] FRISTEDT (B.E.). — Sample function behaviour of increasing processes with stationary independent increments. *Pac. J. Math.* **27**, 21-33 (1967).

[7] FRISTEDT (B.E.). — Sample function of stochastic processes with stationary independent increments. *Advances in Probability* **3**, 241-396. Dekker, New-York (1974).

[8] FRISTEDT (B.E.) and PRUITT (W.E.). — Lower functions for increasing random walks and subordinators. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **18**, 167-182 (1971).

[9] FRISTEDT (B.E.) and PRUITT (W.E.). — Uniform lower functions of subordinators. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **24**, 63-70 (1972).

[10] LAGAIZE (S.). — Hölder exponent for a two-parameter Lévy process. *A paraître* dans Journal of Multivariate Analysis (1998).

[11] STRAF (M.L.). — Weak convergence of stochastic processes with several parameters. *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.* **2**, 187-222 (1972).