ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ALBERT RAUGI

Dépassement des sommes partielles de v.a.r. indépendantes équidistribuées sans moment d'ordre 1

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, nº 4 (2000), p. 723-734

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_4_723_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse
Vol. IX, n° 4, 2000
pp. 723–734

Dépassement des sommes partielles de v.a.r. indépendantes équidistribuées sans moment d'ordre 1 [(*)]

ALBERT RAUGI [(1)]

RÉSUMÉ. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes positives de loi commune μ. Nous étudions la nature de la série $\sum 1_{\{X_{n+1}>F(S_n)\}}$, pour une fonction strictement croissante et non bornée F sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, pour la fonction $F(x) = cx$, $c > 0$, nous montrons que cette série est convergente ou divergente, $\mathbb{P}-$p.s., selon que μ possède ou non un moment d'ordre 1. Nous établissons aussi une "loi forte des grands nombres" pour certaines marches aléatoires sans moment d'ordre 1.

ABSTRACT. — Let $(X_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence of independant non negative real valued random variables with a common law μ. Let F be an increasing and unbounded function on $\mathbb{R}_+$. We study the convergence of the series $\sum 1_{\{X_{n+1}>F(S_n)\}}$. In particular, for the function $F(x) = cx$, $c > 0$, we prove that this series converges $\mathbb{P}-$a.s. if $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$ and diverges $\mathbb{P}-$a.s. if $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$. We also establish a "law of large numbers" for some random walks with undefined mean.

1. Introduction

Soit μ une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}_+$, différente de la mesure de Dirac en zéro. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes positives de loi commune μ, définie sur un espace probabilisé

(*) Reçu le 26 avril 1999, accepté le 20 décembre 2000
(1) IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
raugi@univ-rennes1.fr

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Nous désignons par H et Γ les fonctions sur $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$H(t) = \mu(]t, +\infty[) \quad \text{et} \quad \Gamma(t) = \int_0^t H(u)\, du = \mathbb{E}[\min\{X_1, t\}].$$

Dans [1], il est montré que lorsque H est de l'ordre de $\frac{1}{t}$ au voisinage de l'infini, alors les séries $\sum_{n \geqslant 1} 1_{\{X_{n+1} > S_n\}}$ et $\sum_{n \geqslant 1} H(S_n)$ divergent.

Nous considérons une fonction strictement croissante et non bornée F sur $\mathbb{R}_+$ et nous nous intéressons à la divergence presque sûre des séries

$$\sum_{n \geqslant 1} 1_{\{X_{n+1} > F(S_n)\}}, \quad \sum_{n \geqslant 1} H \circ F(S_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{E}[H \circ F(S_n)]. \tag{1}$$

2. Enoncés des résultats

• Nature des séries (1).

(2.1) THÉORÈME. — *Avec les notations précédentes, nous avons :*

i) Les séries (1) *sont de même nature.*

ii) Si $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$, *les séries* (1) *convergent ou divergent,* $\mathbb{P}$*–p.s., selon que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} H \circ F(t)\, dt$ *est finie ou pas.*

iii) Si $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$, *les séries* (1) *convergent ou divergent,* $\mathbb{P}$*–p.s., selon que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{H \circ F(t)}{\Gamma(t)} \left(1 - \frac{tH(t)}{\Gamma(t)}\right) dt$ *est finie ou pas.*

(2.2) COROLLAIRE. — *Pour tout réel* $c > 0$, *les séries*

$$\sum_{n \geqslant 1} 1_{\{X_{n+1} > cS_n\}}, \quad \sum_{k \geqslant 0} H(cS_n) \quad \textit{et} \quad \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}[H(cS_n)]$$

convergent ou divergent, $\mathbb{P}$*–p.s., selon que* $\mathbb{E}[X_1]$ *est finie ou pas.*

• Loi forte des grands nombres.

(2.3) *Hypothèse.* — Nous introduisons la condition suivante :

$$\text{il existe un réel } a \in]0,1[\text{ tel que } \int_0^{+\infty} \frac{t\, H^2(t)}{\left(\Gamma(t)\right)^{2(1-a)}}\, dt < +\infty. \tag{C_1}$$

L'inégalité

$$\int_t^{2t} u\ H^2(u)\Gamma^{-2}(u)\ du \geqslant H^2(2t)\Gamma^{-2}(2t) \int_t^{2t} u\ du \geqslant 3/2\ t^2 H^2(2t)\Gamma^{-2}(2t)$$

montre que cette condition est plus forte que la condition

$$\lim_{t\to+\infty} t\ H(t)/\Gamma(t) = 0 \qquad (C_2)$$

qui est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une loi faible des grands nombres pour le processus $(S_n)_{n\geqslant 1}$ (cf. [4], VII.7, p.236 ; [5]). La condition (C_2) assure que la fonction Γ est à variation lente au sens de Karamata (i.e. $\Gamma(rt)/\Gamma(t)$ tend vers 1, pour tout $r > 0$, quand t tend vers $+\infty$). Il suffit de remarquer que :

$$\Gamma(x) = \Gamma(1)\ \exp\Big(\int_1^x \frac{H(t)}{\Gamma(t)} dt\Big) = \Gamma(1)\ \exp\Big(\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\Big)\ ;$$

$$\text{où } \varepsilon(t) = t\ H(t)/\Gamma(t).$$

On notera aussi que, sous la condition (C_2), l'intégrale de l'assertion *iii*) du théorème (2.1) peut être remplaçée par l'intégrale $\int_1^{+\infty} H \circ F(t)/\Gamma(t)\ dt$.

Pour $H(t) \underset{+\infty}{\sim} \exp\ \big(\int_2^t \frac{1}{u\ \mathrm{Log\,log}\ u}\ du\big)/t\mathrm{LogLog}t$ la condition (C_2) est satisfaite alors que la condition (C_1) ne l'est pas.

(2.4) THÉORÈME. — *Supposons que $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$ et que la condition (C_1) soit satisfaite. Pour tout $\alpha \in [0,1]$, appelons $(T_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ le processus défini par :*

$$T_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \min\{X_k, n\ \Gamma^{1-\alpha}(n)\}.$$

Alors : i) Pour tout $\alpha \in]0,1]$, le processus $(T_n(\alpha)/n\Gamma(n))_{n\geqslant 1}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers 1, quand n tend vers $+\infty$.

ii) Pour tout $\alpha \in [0,a]$, $T_n(\alpha) \leqslant S_n \leqslant \max\{X_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} + T_n(\alpha)$.

3. Démonstration des résultats

• Démonstration des assertions *i*) et *ii*) du théorème (2.1).

Le fait que les séries (1) soient de même nature découle des deux lemmes suivants. Le premier est une extension classique du lemme de Borel-Cantelli (cf [6], corollaire de la proposition IV-6-3).

(3.1) LEMME. — *Soit* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$. *Soit* $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de v.a.r., à valeurs dans* $[0,1]$, *adaptée à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ *(i.e. pour tout entier* $n\geqslant 1$, *la v.a.r.* Z_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable).*

Alors $$\{\sum_{n\geqslant 1} Z_n < +\infty\} = \{\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] < +\infty\},\ \mathbb{P}-p.s.$$

(3.2) LEMME. — *Considérons l'espace produit* $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ *muni de la probabilité produit* $\mathbb{P} = \bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mu$. *Nous désignons par* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *les applications coordonnées de* Ω *et par* θ *l'opérateur de décalage sur* Ω *(i.e.* $\forall n\geqslant 1$, $X_n\circ\theta = X_{n+1}$*). Pour tout entier* $n\geqslant 1$, *nous notons* $\mathcal{F}_n$ *la tribu engendrée par les v.a.r.* X_k, $1\leqslant k\leqslant n$. *Soit* $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de v.a.r. à valeurs dans* $[0,1]$, *adaptée à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ *et vérifiant* $\forall n\geqslant 1, Z_n\circ\theta\geqslant Z_{n+1}$.

$$Si\ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] = +\infty\ alors\ \limsup_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^n Z_k/\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k]\Big)\geqslant 1, \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

Preuve. — Pour tout entier $n\geqslant 1$, posons $F_n = \sum_{k=1}^n Z_k/\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k]$. La v.a.r. $F = \limsup_{n\to+\infty} F_n$ est θ-sous-invariante (i.e. $F\circ\theta\geqslant F$) et par suite θ-presque sûrement invariante (i. e. $F\circ\theta = F, \mathbb{P}$-p.s.). Noter que, pour tout réel positif a, la v.a.r. $\mathbb{P}$-intégrable $F_a = F\wedge a$ est θ-sous-invariante et vérifie $\mathbb{E}[F_a\circ\theta] = \mathbb{E}[F_a]$ grâce à l'invariance de $\mathbb{P}$ par θ. D'après la loi 0-1 de Kolmogorov, la v.a.r. F est donc $\mathbb{P}$-p.s. constante.

Il suffit alors de montrer que la suite de v.a.r. $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est équi-intégrable ; en effet dans ce cas on sait que l'on a l'inégalité de Fatou-Lebesgue

$$\mathbb{E}[\limsup_{n\to+\infty} F_n]\geqslant \limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}[F_n] = 1.$$

Pour cela nous montrons que $\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[F_n^2] < +\infty$. Pour tous entiers ℓ et k supérieurs ou égaux à 1, nous avons :

$$\mathbb{E}[Z_\ell Z_{\ell+k}]\leqslant \mathbb{E}[Z_\ell Z_k\circ\theta^\ell] = \mathbb{E}[Z_\ell]\mathbb{E}[Z_k]$$

et par suite

$$\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^n Z_k)^2]\leqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k] + 2\sum_{1\leqslant\ell<k\leqslant n}\mathbb{E}[Z_\ell]\mathbb{E}[Z_{k-\ell}]\leqslant 3(\sum_{k=1}^n\mathbb{E}[Z_k])^2,$$

pour n assez grand pour que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k]\geqslant 1$. D'où le résultat. □

Lorsque $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$, il résulte de la loi forte des grands nombres et de la décroissance de la fonction $H\circ F$ que : pour tout $\varepsilon > 0$, pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que pour tout entier $n \geqslant N(\omega)$,

$$H \circ F\big(n(\mathbb{E}[X_1] + \varepsilon)\big) \leqslant H \circ F(S_n(\omega)) \leqslant H \circ F\big(n(\mathbb{E}[X_1] - \varepsilon)\big).$$

Or, pour tout réel $r > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1} H \circ F(rn)$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} H \circ F(t)\ dt$. D'où la seconde assertion du théorème (2.1). □

• **Préparatifs au cas $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$.**

(3.3). — Dorénavant nous supposons que $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$. Nous considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{\Gamma(x)} = \frac{t}{\mathbb{E}[\min\{X_1, x\}]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\min\{X_1/x, 1\}]}.$$

La dernière égalité montre que : la fonction φ peut être prolongée par continuité en zéro par $\varphi(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

La fonction H est positive, décroissante et continue à droite sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction Γ est croissante, continue, dérivable à droite et à gauche, avec

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma_d'(x) = H(x) \quad \text{ et } \quad \Gamma_g'(x) = H(x - 0).$$

L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+ : H(x-0) < H(x)\}$ est dénombrable. La fonction Γ est donc Lebesgue-presque partout dérivable. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = \mathbb{E}[X] = +\infty$. La fonction φ est continue, dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_d'(x) = \frac{\Gamma(x) - x\ H(x)}{\Gamma^2(x)} = \frac{\mathbb{E}[X_1 1_{\{X_1 \leqslant x\}}]}{\Gamma^2(x)}.$$

On en déduit donc que la fonction φ est croissante et même strictement croissante sur un intervalle $[s, +\infty[$, $s > 0$. De plus $\forall x \geqslant 0$, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi_d'(t) dt$.

• **Démonstration de l'assertion *iii*) du théorème (2.1) .**

L'assertion *iii*) du théorème (2.1) résulte de l'encadrement classique suivant concernant la mesure "potentiel" (cf. [3], lemme 1).

(3.4) LEMME. — *Pour tout entier $k \geqslant 1$, nous notons μ^{k*} la k-ième convolée de μ et nous appelons G la mesure "potentiel" $\sum_{k \geqslant 0} \mu^{k*}$, où μ^0 est la mesure de Dirac δ_0 en zéro.*

Alors, pour tout réel strictement positif t, $\varphi(t) \leqslant G([0,t]) \leqslant 2\varphi(t)$.

Preuve. — De la relation $(\delta_0 - \mu) * G = \delta_0$, il s'ensuit que

$$\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x \big((\delta_0 - \mu) * G\big)([0,t])\ dt = \int_0^x \delta_0([0,t])\ dt\ ;$$

c'est-à-dire $\forall x \geqslant 0$, $\int_0^x \int_0^{+\infty} 1_{[0,t]}(u)\ H(t-u)\ dG(u)\ dt = x$. Par application du théorème de Fubini et changement de variable $v = t - u$, il vient, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x = \int_0^{+\infty} 1_{[0,x]}(u)\Big(\int_u^x H(t-u)\ dt\Big)\ dG(u) = \int_0^{+\infty} 1_{[0,x]}(u)\ \Gamma(x-u)\ dG(u).$$

De la croissance de la fonction Γ, il résulte alors que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\Gamma(x/2)G([0,x/2]) \leqslant \int_0^{+\infty} 1_{[0,x/2]}(u)\ \Gamma(x-u)\ dG(u) \leqslant x \leqslant \Gamma(x)G([0,x]).$$

D'où le résultat. $\square$

En posant $S_0 = 0$, nous avons, via le théorème de Fubini,

$$\sum_{n\geqslant 0} I\!\!E[H \circ F(S_n)] = \int_0^{+\infty} H \circ F(t)\ dG(t) = \int_0^{+\infty} G([0, F^{-1}(u)[)\ d\mu(u)$$

et par suite, en tenant compte du lemme (3.4),

$$\int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u)/2)\ d\mu(u) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} I\!\!E[H \circ F(S_n)] \leqslant 2\int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u))\ d\mu(u).$$

Or $\quad \varphi(x/2) = \varphi(x)\big(\Gamma(x)/2\Gamma(x/2)\big) \geqslant \varphi(x)\big(\Gamma(x/2)/2\Gamma(x/2)\big) = \varphi(x)/2$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \varphi(F^{-1}(u))\ d\mu(u) &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty}\int_0^{F^{-1}(u)} \varphi'_d(y)\ dy\ d\mu(u)\\ &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} H \circ F(y)\ \varphi'_d(y)\ dy.\end{aligned}$$

D'où l'assertion *iii)* du théorème (2.1). $\square$

• Démonstration du corollaire (2.2) .

Nous venons de montrer que les séries (1) convergent, $\mathbb{P}$-p.s., si et seulement si $\mathbb{E}[\varphi(F^{-1}(X_1))] < +\infty$. Pour $F(t) = ct$ avec $c > 0$, les séries (1) convergent si et seulement si $\mathbb{E}[\varphi(c^{-1}X_1)] < +\infty$. Le corollaire résulte alors du lemme suivant.

(3.5) LEMME. — *Soit X une variable aléatoire réelle. Si $\mathbb{E}[X] = +\infty$, alors $\mathbb{E}\big[\varphi(X)\big] = +\infty$.*

Preuve. — Nous avons :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)]-\varphi(0) = \int_0^{+\infty} H(u)\,\varphi'_d(t)\,dt = \int_0^{+\infty} H(t)\Gamma^{-1}(t)\big(1-tH(t)\Gamma^{-1}(t)\big)\,dt.$$

Si la mesure de probabilité μ vérifie l'hypothèse (C_2), la dernière intégrale est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} H(t)\Gamma^{-1}(t)\,dt$ qui diverge. Si μ ne vérifie pas la condition (C_2), alors l'inégalité

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}[\varphi(X)1_{\{X>t\}}] \geqslant H(t)\varphi(t) = tH(t)\Gamma^{-1}(t)$$

montre que nécessairement $\mathbb{E}[\varphi(X)] = +\infty$. □

• Démonstration du théorème (2.4) .

Cette démonstration résultera de trois lemmes.

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, nous posons :

$$\varphi_\alpha(t) = t^\alpha(\varphi(t))^{1-\alpha}.$$

Les fonctions φ_α sont strictement croissantes sur un intervalle $[s,+\infty[$, $s > 0$. Nous notons β_α la fonction réciproque de φ_α et nous supposons que s est assez grand pour que $\Gamma(s) > 1$. Pour tout $t \geqslant s$, $\varphi(t) \leqslant t$; il s'ensuit que $\varphi_\alpha(t)$ croît en α et $\beta_\alpha(t)$ décroît en α. Pour alléger l'écriture, nous notons β la fonction β_0.

(3.6) LEMME. — *Nous avons :*

i) Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et tout réel $t > s$, $\beta_\alpha(t) = t\,\big(\Gamma(\beta_\alpha(t))\big)^{1-\alpha}$.

ii) Sous l'hypothèse (C_1) de (2.3), pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\Gamma(\beta_\alpha(t)) \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(t)$.

iii) Appelons G_α la fonction $x \to x^{-2}\Gamma^{-2}(x)\displaystyle\int_{\beta_\alpha(s)}^{\beta_\alpha(x)} u\,H(u)\,du$. La fonction G_1 est intégrable sur $[s,+\infty[$. Sous l'hypothèse (C_1), la fonction G_α est intégrable sur $[s,+\infty[$, pour tout $\alpha \in]0,1]$.

iv) Sous l'hypothèse (C_1), *pour tout* $r > 0$, *la fonction* $t\, H^2(r\, \beta_a(t))$ *est intégrable sur* $[s, +\infty[$.

Preuve. — La première assertion est évidente.

Des diverses monotonies soulignées auparavant, il résulte que

$$1 \leqslant \Gamma(\beta_\alpha(t))/\Gamma(t) \leqslant \Gamma(\beta(t))/\Gamma(t).$$

Il suffit donc de montrer l'assertion *ii*), pour $\alpha = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} \frac{\Gamma\big(\beta(t)\big)}{\Gamma(t)} &= \int_t^{\beta(t)} \frac{H(u)}{\Gamma(u)}\, du \\
&\leqslant \sqrt{\int_t^{\beta(t)} \frac{u\, H^2(u)}{\Gamma^{2(1-a)}(u)}\, du}\ \sqrt{\int_t^{\beta(t)} \frac{\Gamma^{-2a}(u)}{u}\, du} \\
&\leqslant C\, \Gamma^{-a}(t)\, \sqrt{\operatorname{Log} \frac{\beta(t)}{t}} \qquad \text{(hypothèse } (C_2)) \\
&\leqslant C\, \Gamma^{-a}(t)\, \sqrt{\operatorname{Log} \Gamma\big(\beta(t)\big)} \\
&\leqslant C\, \Gamma^{-a}(t)\, \sqrt{\operatorname{Log} \frac{\Gamma\big(\beta(t)\big)}{\Gamma(t)} + \operatorname{Log} \Gamma(t)}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $g(t) = \operatorname{Log} \frac{\Gamma(\beta(t))}{\Gamma(t)}$. Soit $(t_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle tendant vers $+\infty$ tels que $\lim_{n \to +\infty} g(t_n) = \lambda \in [0, +\infty]$ et $g(t_n) > 0$, pour tout $n \geqslant 0$. L'inégalité précédente, nous donne

$$\forall n \geqslant 0,\ \sqrt{g(t_n)} \leqslant C \sqrt{\frac{1}{\Gamma^{2a}(t_n)} + \frac{\operatorname{Log} \Gamma(t_n)}{\Gamma^{2a}(t_n) g(t_n)}}$$

qui implique $\lambda = 0$. On en déduit que $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$. D'où l'assertion *ii*).

Nous montrons la seconde affirmation de *iii*) ; la première se démontrant de la même façon. D'après les assertions *i*) et *ii*), $\Gamma(t) \sim \Gamma(\beta_\alpha(t))$. Nous sommes donc amenés à prouver l'intégrabilité de la fonction

$$L(t) = t^{-2}\, \Gamma^{-2}(\beta_\alpha(t)) \int_{\beta_\alpha(s)}^{\beta_\alpha(t)} u\, H(u)\, du.$$

Notons tout d'abord que l'égalité de définition de φ_α nous donne, en prenant les dérivées logarithmiques :

$$\frac{\varphi_\alpha'(t)}{\varphi_\alpha(t)} = \frac{\alpha}{t} + (1-\alpha)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leqslant \frac{\alpha}{t} + (1-\alpha)\frac{H(t)}{t} \leqslant 1/t.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_s^{+\infty} L(t)\,dt &= \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{\int_{\beta_\alpha(s)}^t u\,H(u)\,du}{\Gamma^2(t)\,\varphi_\alpha^2(t)}\,\varphi'_\alpha(t)\,dt \\ &\leqslant \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{\int_{\beta_\alpha(s)}^t u\,H(u)\,du}{t^2\,\Gamma^{1+\alpha}(t)}\,dt \\ &\leqslant \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} u\,H(u) \int_u^{+\infty} \frac{dt}{t^2\,\Gamma^{1+\alpha}(t)}\,du \\ &\leqslant \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{u\,H(u)}{\Gamma^{1+\alpha}(u)} \int_u^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\,du \\ &\leqslant \int_{\beta_\alpha(s)}^{+\infty} \frac{H(u)}{\Gamma^{1+\alpha}(u)}\,du = \frac{1}{\alpha}\,\Gamma^{-\alpha}(\beta_\alpha(s)) < +\infty.\end{aligned}$$

L'assertion $iv)$ résulte de :

$$\int_s^{+\infty} u\,H^2(r\,\beta_a(u))\,du \leqslant \int_{\beta_a(s)}^{+\infty} \frac{u\,H^2(ru)}{\Gamma^{2-2a}(u)}\,du < +\infty \qquad \square.$$

Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et tout réel $t \geqslant s$, posons :

$$T_t(\alpha) = \sum_{k=1}^{[t]} X_k \wedge \beta_\alpha(t) + \{t\}\; X_{[t]+1} \wedge \beta_\alpha(t);$$

où $[t]$ et $\{t\}$ désigne respectivement les parties entière et fractionnaire de t. Alors nous avons le résultat suivant :

(3.7) LEMME. — *Supposons que $I\!E[X_1] = +\infty$. Si la condition (C_1) est satisfaite, alors pour tout $\alpha \in]0,1]$, le processus $\big(T_t(\alpha)/t\Gamma(t)\big)_{t\geqslant s}$ converge $I\!P$-p.s. vers 1, quand t tend vers $+\infty$. Lorsque seulement la condition (C_2) est satisfaite, cette convergence a lieu pour $\alpha = 1$.*

Preuve. — Pour $t \geqslant s$, nous avons :

$$E[T_t] = t\; I\!E[X_1 \wedge \beta_\alpha(t)] = t\;\Gamma(\beta_\alpha(t)).$$

Pour $\alpha = 1$, $E[T_t] = t\Gamma(t)$. Pour $\alpha \in [0,1[$, $I\!E[T_t] \underset{+\infty}{\sim} t\Gamma(t)$, d'après les assertions $i)$ et $ii)$ du lemme (3.6).

De même, nous avons :

$$\operatorname{var}(T_t) = t\,\operatorname{var}(X_1 \wedge \beta_\alpha(t)) \leqslant t\; I\!E[X_1^2 \wedge \beta_\alpha^2(t)] = t\int_0^{\beta_\alpha(t)} 2uH(u)\,du.$$

D'où la majoration,

$$\operatorname{var}\Big(\frac{T_t}{t\Gamma(t)}\Big) \leqslant 2\ t\ \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u\ H(u)\ du}{t^2\Gamma^2(t)}.$$

Pour tout réel $r > 1$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\Big(\frac{T_{r^n}}{r^n\Gamma(r^n)}\Big) &\leqslant 2\ r^n\ \frac{\int_0^{\beta_\alpha(r^n)} u\ H(u)\ du}{r^{2n}\Gamma^2(r^n)} \\
&\leqslant \frac{2}{r-1}\ \frac{r^{2(n+1)}\Gamma^2(r^{n+1})}{r^{2n}\Gamma^2(r^n)} \int_{r^n}^{r^{n+1}} \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u\ H(u)\ du}{t^2\Gamma^2(t)}\ dt. \\
&\leqslant \frac{2r^2}{r-1}\ \frac{\Gamma^2(r^{n+1})}{\Gamma^2(r^n)} \int_{r^n}^{r^{n+1}} \frac{\int_0^{\beta_\alpha(t)} u\ H(u)\ du}{t^2\Gamma^2(t)}\ dt.
\end{aligned}$$

Lorsque la condition (C_2) est satisfaite, Γ est une fonction à variation lente. De l'assertion *iii*) du lemme (3.6), il résulte alors que la série $\sum \operatorname{var}\big(\frac{T_{r^n}}{r^n\Gamma(r^n)}\big)$ converge pour tout $r > 1$. D'où l'on déduit la convergence $I\!\!P$−p.s. vers 1 de la suite de v.a.r. $\big(T_{r^n}/r^n\Gamma(r^n))\big)_{n\geqslant 1}$, pour tout $r > 1$.

Pour tout réel $t \geqslant s$, considérons l'entier $n = \big[\frac{\mathrm{Log} t}{\mathrm{Log} r}\big]$. Nous avons $r^n \leqslant t \leqslant r^{n+1}$ et par suite

$$\frac{T(r^n)}{r^{n+1}\Gamma(r^{n+1})} \leqslant \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leqslant \frac{T(r^{n+1})}{r^n\Gamma(r^n)}.$$

Comme Γ est une fonction à variation lente, la convergence précédente montre que, $I\!\!P$−p.s.,

$$\frac{1}{r} \leqslant \liminf_{t\to+\infty} \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leqslant \limsup_{t\to+\infty} \frac{T(t)}{t\Gamma(t)} \leqslant r.$$

On obtient le résultat voulu, en faisant tendre r vers 1. □

Le lemme suivant est inspiré du lemme 2 de [2].

(3.8) LEMME. — *Plaçons nous sous les hypothèses du théorème (2.4). Soit $\alpha \in [0, a]$. Pour $I\!\!P$−presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N(\omega)$, il existe au plus un entier k de $\{1, \dots, n\}$ pour lequel $X_k > \beta_\alpha(n)$.*

Preuve. — Soit $r \in]0, 1[$. Pour tout entier $p \geqslant 1$, posons :

$$A_p = \bigcup_{1\leqslant \ell < k \leqslant p} \{X_\ell > r\ \beta_\alpha(p)\} \cap \{X_k > r\ \beta_\alpha(p)\}.$$

Nous avons

$$\mathbb{P}[A_p] \leqslant \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant p} H^2\big(r\ \beta_\alpha(p)\big) \leqslant p^2\ H^2\big(r\ \beta_\alpha(p)\big).$$

Or, pour tout entier m, nous avons

$$2^{2m}\ H^2(r\ \beta_\alpha(2^m)) \leqslant 2^2 \int_{2^{m-1}}^{2^m} t\ H^2(r\ \beta_\alpha(t))\ dt.$$

D'après l'assertion *iv*) du Lemme (3.6), la série $\sum_{m\geqslant 0}\mathbb{P}[A_{2^m}]$ est convergente et, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, il existe un entier $N_1(\omega) \geqslant \log_2 s$ tel que, pour tout entier $m \geqslant N_1(\omega)$, il existe au plus un entier k de $\{1,\ldots,2^m\}$ pour lequel $X_k \geqslant r\ \beta_\alpha(2^m)$. Il s'ensuit que pour tout entier $n > 2^{N_1(\omega)}$, il existe au plus un entier k de $\{1,\ldots,2^{[\log_2 n]+1}\}$ pour lequel $X_k \geqslant r\ \beta_\alpha(2^{[\log_2 n]+1})$. Ce qui implique qu'il existe au plus un entier k de $\{1,\ldots,n\}$ tel que $X_k \geqslant r'\ \beta_\alpha(n)$, avec $r' = r\ \sup_{p\geqslant s}\beta(2\ p)/\beta(p)$. On notera que, comme $\beta(t) \sim t\ \Gamma(t)$ et Γ est à variation lente, la quantité $\sup_{p\geqslant s}\beta(2\ p)/\beta(p)$ est finie. On obtient le résultat voulu, en choisissant r de façon que $r' \leqslant 1$. $\square$

L'assertion *i*) du théorème (2.4) résulte des lemmes (3.6) et (3.7), en notant que, pour tous réels $\alpha_1, \alpha, \alpha_2$ vérifiant $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$,

$$X_1 \wedge \beta_{\alpha_2}(t) \leqslant X_1 \wedge t\ \Gamma^{1-\alpha}(t) \leqslant X_1 \wedge \beta_{\alpha_1}(t),$$

pour t suffisamment grand. L'assertion *ii*) résulte du lemme (3.8).

(3.9) *Remarques.*

1) Si la mesure de probabilité μ vérifie l'hypothèse (C_2), alors on vérifie facilement que la mesure de probabilité $\varphi(\mu)$ vérifie l'hypothèse (C_1).

2) Sous l'hypothèse (C_1), on peut obtenir l'assertion *iii*) du théorème (2.1) à partir du théorème (2.4). Soit $\alpha \in]0,a]$. D'après les assertions *i*) et *ii*), pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\omega)$,

$$\frac{1}{2}\ \beta(n) \leqslant S_n(\omega) \leqslant \max\{X_k(\omega) : 1 \leqslant k \leqslant n\} + 2\ \beta(n).$$

On voit facilement que, pour tout $r > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} H\circ F(r\beta(n))$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} H\circ F(t)/\Gamma(t)\ dt$. Lorsque cette intégrale converge, de la décroissance de $H\circ F$, il résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1} H\circ F(S_n)$ converge, $\mathbb{P}$-presque sûrement. Lorsque l'intégrale diverge, nous montrons la divergence, $\mathbb{P}$-p.s., de la série $\sum_{n\geqslant 1} H\circ F(M_n+2\beta(n))$, où $M_n = \max\{X_k : 1\leqslant k\leqslant n\}$.

Pour tout entier n, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} H\circ F\big(M_k+2\beta(k)\big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} H\circ F\big(4\beta(k)\big)\ 1_{\{M_k\leqslant 2\beta(k)\}}$$

Appelons Z la v.a.r. positive $\sum_{k\geqslant 1} H\circ F\big(4\beta(k)\big)\ 1_{\{M_k\leqslant 2\beta(k)\}}$. Pour tout entier naturel p, nous avons :

$$\mathbb{E}[Z1_{\{Z\leqslant p\}}] = \sum_{k\geqslant 1} H\circ F(4\beta(k))\ \mathbb{P}[\{M_k\leqslant 2\beta(k)\}\cap\{Z\leqslant p\}].$$

Or

$$\mathbb{P}[\{M_k\leqslant 2\beta(k)\}] = \big(1-H(2\ \beta(k))\big)^k \geqslant 1-kH(2\beta(k))$$

et $kH(2\beta(k)) = \beta(k)H(2\ \beta(k))/\Gamma(\beta(k))$ tend vers zéro quand k tend vers l'infini, car Γ est à variation lente et la condition C_2 est satisfaite. On en déduit que $\mathbb{P}[\{M_k\leqslant 2\ \beta(k)\}\cap\{Z\leqslant p\}]$ tend vers $\mathbb{P}[\{Z\leqslant p\}]$ quand k tend vers l'infini. Comme la série $\sum_{k\geqslant 1} H\circ F\big(4\beta(k)\big)$ diverge, nous avons nécessairement $\mathbb{P}[\{Z\leqslant p\}] = 0$, pour tout entier naturel p. D'où le résultat. $\square$

Bibliographie

[1] Conze (J.-P.), Guivarc'h (Y.), Raugi (A.). — *Dépassement des sommes partielles pour des v.a. sans moment*, Séminaire de Rennes, 1998.

[2] Diamond (H.-G.), Vaaler (J.-D.). — *Estimates for partial sums of continued fraction partial quotients*, Pacific J. of Math, Vol. 122, No 1, 1986.

[3] Erickson (K.-B.). — *The strong law of large number when the mean is undefined*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 185, 1973, p. 371-381.

[4] Feller (W.). — *An introduction to probability Theory and its applications*, vol II, John Wiley & Sons, 1971.

[5] Kesten (H.), Maller (R.-A.). — *Ratios of trimmed sums and order statistis*, Ann. Probab., 20, 1992, p. 1805-1842.

[6] Neveu (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1970.