

MICHÈLE AUDIN

**Exemples de hamiltoniens non intégrables en  
mécanique analytique réelle**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 12,  
n° 1 (2003), p. 1-23

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2003\\_6\\_12\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2003_6_12_1_1_0)

© Université Paul Sabatier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Exemples de hamiltoniens non intégrables en mécanique analytique réelle<sup>(\*)</sup>

MICHÈLE AUDIN (†)

---

**RÉSUMÉ.** — Je donne des applications des théorèmes de non-intégrabilité méromorphe de Ziglin et Morales-Ramis à la non-intégrabilité *réelle* de certains systèmes hamiltoniens.

**ABSTRACT.** — I show some ways of applying the meromorphic non-integrability theorems of Ziglin and Morales-Ramis to the *real* non-integrability of some Hamiltonian systems.

---

### Introduction

Dans cet article, je donne des exemples d'applications des théorèmes de non-intégrabilité méromorphes de Ziglin [13] et de Morales et Ramis [10], [9] à la non-intégrabilité *réelle* de certains systèmes hamiltoniens.

La non-intégrabilité à la Ziglin utilise le groupe de monodromie de l'équation linéarisée le long d'une trajectoire, donc le groupe fondamental d'une courbe complexe, susceptible de recéler plus de non-commutativité que celui d'une courbe réelle.

La non-intégrabilité à la Morales-Ramis utilise, elle, la théorie de Galois différentielle, ou de Picard-Vessiot, qui ne fonctionne vraiment bien que sur un corps algébriquement clos.

---

(\*) Reçu le 22 octobre 2002, accepté le 27 mars 2003

(†) Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.  
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr  
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>

Voilà donc deux raisons pour lesquelles les résultats de non-intégrabilité sont en général complexes.

Je vais illustrer le fait que le caractère « local » du groupe de Galois permet souvent de conclure à la non-intégrabilité réelle. D'autre part, certaines courbes ont un groupe fondamental très concentré près de leur partie réelle, ce qui peut aussi permettre de conclure (cette idée a déjà été utilisée par Ziglin dans [15]).

Dans la plupart de ces exemples, les trajectoires considérées sont des courbes elliptiques et les équations aux variations normales sont des équations « de Lamé ». J'ai donc consacré un paragraphe, généralisant des méthodes de [6] et [15], à l'étude de ces équations.

Je remercie tous ceux qui m'ont fait découvrir des fautes de frappe ou des erreurs dans une version préliminaire de cet article et notamment Andrzej Maciejewski qui l'a lue particulièrement attentivement.

## 1. Du réel au complexe et retour

On étudie ici un hamiltonien *analytique réel*, c'est-à-dire une fonction analytique réelle

$$H : W \longrightarrow \mathbf{R}$$

définie sur une variété analytique réelle  $W$  munie d'une forme symplectique  $\omega$ , elle aussi analytique réelle. Le *champ hamiltonien*  $X_H$  associé à  $H$  par la relation

$$i_{X_H}\omega = -dH$$

est un champ de vecteurs analytique réel. Le système différentiel qu'il définit est le système hamiltonien dont on souhaite étudier l'intégrabilité : on dira qu'il est *intégrable* s'il est intégrable au sens de Liouville avec des intégrales premières *analytiques réelles*.

Les théorèmes de non-intégrabilité que je veux illustrer ici sont des théorèmes *analytiques*. On ne sait pas les faire fonctionner dans un cadre  $\mathcal{C}^\infty$ . Ce sont aussi des théorèmes *complexes*, ils utilisent soit la monodromie, soit le groupe de Galois différentiel. Cet aspect complexe est moins strict : on peut espérer en tirer des résultats en complexifiant des données réelles.

### 1.1. Complexification

Il n'est pas très difficile de construire une complexification  $W^*$  d'une variété analytique réelle  $W$ . C'est une variété analytique complexe munie

d'un isomorphisme analytique réel de  $W$  sur une sous-variété analytique réelle de  $W^*$ . On peut même construire  $W^*$  de façon qu'elle soit munie d'une involution anti-holomorphe dont l'ensemble des points fixes soit isomorphe à  $W$ . De plus, le germe de  $W^*$  le long de  $W$  est unique — il n'y a pas d'unicité globale, bien entendu. Voir, par exemple, [11].

Pour la construction, on peut utiliser un atlas analytique réel identifiant les ouverts d'un recouvrement de  $W$  à des ouverts de  $\mathbf{R}^m$ . Les changements de cartes sont prolongés analytiquement en isomorphismes d'ouverts de  $\mathbf{C}^m$ , qu'on utilise pour construire  $W^*$ .

Dans le cas où  $W$  est, en plus, une variété symplectique, on peut partir d'un atlas dont les applications « cartes » identifient la forme symplectique  $\omega$  sur les ouverts de cartes à la forme symplectique standard  $\sum dp_i \wedge dq_i$  de  $\mathbf{R}^{2n}$ . L'existence de telles cartes est assurée par le théorème de Darboux — un théorème dont la plupart des démonstrations fonctionnent dans la catégorie analytique réelle. La variété analytique complexe  $W^*$  construite par la méthode de [11] est automatiquement munie d'une forme symplectique complexe qui prolonge la forme  $\omega$ . Le hamiltonien  $H$  se prolonge à un voisinage convenable de  $W$  dans  $W^*$  en une fonction analytique complexe, laquelle fonction a un champ hamiltonien, un champ de vecteurs complexes qui prolonge  $X_H$ .

**Trajectoire de  $X_H$ .** Pour appliquer les théorèmes de [13], [10], la première chose à faire est de choisir une trajectoire non stationnaire de  $X_H$ . Il importe ici de préciser ce que « non stationnaire » veut dire : je vais utiliser, dans les exemples, des trajectoires qui ont bien l'air d'être stationnaires ! Il s'agira ici de trajectoires complexes du champ complexe  $X_H$  sur  $W^*$  qui ne sont pas réduites à un point (ce qui n'empêchera pas leurs parties réelles d'avoir des composantes réduites à un point).

Attention donc : ce qu'on complexifie, c'est la variété  $W$  et la fonction  $H$ , pas la trajectoire réelle  $\Gamma_{\mathbf{R}}$ . Rappelons que la trajectoire réelle d'un point  $x_0$  est la courbe intégrale de  $X_H$  passant par  $x_0$ , en particulier les trajectoires réelles sont connexes.

## 1.2. Théorèmes de non-intégrabilité

On utilise deux corollaires immédiats des théorèmes de Morales-Ramis et Ziglin. Il s'agit bien ici d'intégrabilité analytique réelle. Les théorèmes complexes interdisent les intégrales méromorphes complexes, mais n'interdisent pas des intégrales analytiques réelles qui auraient des singularités essentielles non réelles. Dans cet article, nous dirons qu'un système hamil-

tonien est *intégrable au sens analytique (resp. méromorphe) réel* s'il admet  $n = \frac{1}{2} \dim W$  intégrales premières analytiques (resp. méromorphes) réelles en involution.

**PROPOSITION 1.1.** — *Soit  $x$  un point réel d'une trajectoire  $\Gamma$  du champ complexifié  $X_H$  sur une complexification  $W^*$  de  $W$ . Si le groupe de Galois local en  $x$  de l'équation aux variations normales le long de  $\Gamma$  n'est pas virtuellement<sup>(1)</sup> abélien, le système réel n'est pas intégrable.*

**PROPOSITION 1.2.** — *Si, pour toute complexification  $W^*$  de  $W$ , il existe une trajectoire du champ complexifié  $X_H$  telle que la monodromie de l'équation aux variations le long de cette trajectoire contienne deux éléments non résonants qui ne commutent pas, le système réel n'est pas intégrable.*

*Remarque 1.3.* — Ces propositions donnent la non-intégrabilité du hamiltonien  $H$

- sur la variété analytique  $W$
- voire sur un voisinage de la partie réelle du niveau de  $H$  complexifié dans lequel se trouve la trajectoire considérée
- ou encore sur un voisinage de la partie réelle de la trajectoire complexe de  $X_H$

suivant qu'on applique une version globale, locale (voire rationnelle) du théorème de Morales-Ramis (voir [10], [9], [1], [2]). Mais elles ne donnent pas forcément le résultat analogue au voisinage du niveau réel de  $H$  ou de la trajectoire réelle de  $X_H$ . À propos de cette remarque, voir l'exemple traité au § 2.2.a.

### 1.3. Les exemples

Dans les exemples que je vais considérer, la variété symplectique est tout simplement  $W = \mathbf{R}^4$  (ou un ouvert de  $\mathbf{R}^4$ ) avec la forme symplectique  $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ . On peut donc utiliser n'importe quel voisinage de  $\mathbf{R}^4$  dans  $\mathbf{C}^4$  comme complexifiée  $W^*$ . On considère un hamiltonien «classique», c'est-à-dire de la forme

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2)$$

(on peut penser à l'énergie totale, énergie cinétique, plus énergie potentielle, en considérant les  $q_i$  comme des positions et les  $p_i$  comme des impulsions).

---

<sup>(1)</sup> On appelle groupe *virtuellement abélien* un groupe de Lie dont la composante neutre est un groupe abélien.

Le système hamiltonien est

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}.$$

Dans cette théorie (et c'est une de ses difficultés), la première chose à faire est de choisir une trajectoire convenable. Pour spécifier les trajectoires utilisées, je vais supposer que le champ  $X_H$  a un plan symplectique invariant, le plan  $P$  d'équations  $q_1 = p_1 = 0$ . Cette condition d'invariance s'écrit

$$X_H(0, q_2, 0, p_2) = \left( 0, p_2, 0, -\frac{\partial V}{\partial q_2}(0, q_2) \right),$$

c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}(0, q_2) = 0.$$

En développant  $V$  comme fonction analytique de  $q_1$ , c'est encore dire que

$$V = \frac{1}{2} (a(q_2) + b(q_2)q_1^2 + c(q_1, q_2)q_1^3)$$

pour certaines fonctions analytiques  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les trajectoires contenues dans le plan  $P$  ont pour supports les courbes d'équations

$$C_h : \quad p_2^2 = 2h - a(q_2), \quad p_1 = q_1 = 0.$$

*Remarque 1.4.* — Si  $a$  est un polynôme, il s'agit d'une famille de courbes hyperelliptiques. Si son degré est au moins 3, le groupe fondamental de ces courbes complexes n'est pas commutatif et on peut espérer obtenir des groupes de monodromie assez non abéliens.

Le système hamiltonien est de la forme

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = -q_1 b(q_2) - q_1^2 d(q_1, q_2), \quad \dot{p}_2 = -\frac{1}{2} a'(q_2) + q_1 e(q_1, q_2).$$

La réduction symplectique du fibré normal est identifiée au fibré trivial  $(\mathbf{C}^2 \times \{0\}) \times C_h$ . Appelons  $(Q, P)$  les variables « tangentes » correspondant à  $(q_1, p_1)$ . L'équation aux variations normales<sup>(2)</sup> est l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{Q} + b(q_2(t))Q = 0$$

pour  $q_2(t)$  solution du système

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -\frac{1}{2} a'(q_2).$$

---

(2) Je renvoie aux articles et ouvrages originaux [13], [10], [9] et à [1], [2], dont j'utilise les notations, pour cette notion.

Les sous-exemples que je vais considérer sont les suivants :

- Les potentiels

$$V = \frac{1}{2} (q_2^{2m} + q_1^2 q_2^k \beta(q_2) + q_1^3 c(q_1, q_2)),$$

où  $m$  et  $k$  sont à préciser et où il y a, parmi les trajectoires contenues dans le plan  $P$ , une trajectoire réelle réduite à un point (§ 3.1).

- Cette famille contient un des potentiels étudiés par Ziglin [14] sous le nom de « Yang-Mills avec groupe de jauge  $SU(2)$  », où la famille de courbes  $C_h$  est une famille de courbes elliptiques et l'équation aux variations normales une équation « de Lamé » (§ 2.2.b).
- Je considérerai aussi les potentiels de Hénon-Heiles

$$V = \frac{1}{2} \left( q_1^2 + B q_2^2 - 2 q_1^2 q_2 - \frac{2\lambda}{3} q_2^3 \right)$$

correspondant à

$$a(q_2) = q_2^2 \left( B - \frac{2\lambda}{3} q_2 \right), \quad b(q_2) = 1 - 2q_2$$

qui donnent lieu, eux aussi, à une famille de courbes elliptiques et à des équations de Lamé (§ 2.2.a). Cet exemple est traité dans [15], essentiellement par la même méthode. Je le reprends ici pour illustrer la remarque 1.3.

- Je montrerai aussi (§ 2.2.d) que les méthodes utilisées ici ne donnent rien pour les potentiels dits « de Hénon-Heiles homogènes », où

$$V = \frac{1}{2} \left( -2q_1^2 q_2 - \frac{2\lambda}{3} q_2^3 \right).$$

Un autre problème dans lequel les méthodes présentées ici permettent de conclure à la non-intégrabilité réelle est celui des oscillations d'un satellite sur une orbite circulaire (voir [3]).

## 2. Courbes elliptiques lisses et équations de Lamé

### 2.1. Groupes de Galois de certaines équations de Lamé réelles

Les équations de Lamé sont étudiées depuis le dix-neuvième siècle, voir [12]. Un rappel exhaustif des propriétés de leurs groupes de Galois est fait dans le chapitre 2 du livre de Morales [9]. Ici, je vais m'inspirer des

méthodes utilisées dans les articles de Ziglin [14] et Ito [6] pour démontrer quelques résultats simples sur certaines équations de Lamé réelles qui suffisent à calculer les groupes de Galois dans les exemples ci-dessous (§§ 2.2.a et 2.2.b).

Soit  $P$  un polynôme de degré 3

$$P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$$

dont les racines sont supposées simples, de sorte la courbe  $C$  d'équation  $y^2 = P(x)$  est une courbe elliptique lisse (privée d'un point). On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{P'(x)}{2P(x)} \frac{dQ}{dx} - \frac{Ax + B}{P(x)} Q = 0$$

où  $A$  et  $B$  sont des paramètres. Appelons  $\wp$  la fonction de Weierstrass associée à la courbe  $C$  et faisons le changement de variable  $x = \wp(t)$ . Notre équation devient

$$\ddot{Q} - (A\wp(t) + B)Q = 0 \tag{2.1}$$

(les coefficients dépendent du polynôme  $P$  à travers la fonction  $\wp$ ). Ces équations (sous l'une ou l'autre forme) sont appelées «équations de Lamé».

Notons que la singularité en  $t = 0$  (ou  $x = \infty$ ) est régulière en application du critère de Fuchs (la fonction  $\wp$  a un pôle double en 0). Le groupe de Galois de l'équation (2.1) est donc l'adhérence de Zariski de son groupe de monodromie. D'autre part, le changement de variable  $x = \wp(t)$  induit un revêtement double

$$\mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

( $t \mapsto x$ ) ramifié en les trois racines de  $P$  et à l'infini. Ainsi les composantes neutres des groupes de Galois de nos deux équations sont isomorphes.

Le groupe fondamental de la courbe affine  $C$  est engendré par les classes d'homotopie de deux lacets  $\alpha$  et  $\beta$  — une base du parallélogramme des périodes — leur commutateur  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  est un lacet  $\gamma$  autour du point à l'infini ( $t = 0$ ).

Ici, je vais supposer que l'équation est réelle, c'est-à-dire que les coefficients du polynôme  $P$ , ainsi que les paramètres  $A$  et  $B$ , sont des nombres réels.

### La monodromie autour de 0

Remarquons d'abord :

PROPOSITION 2.1. — *La monodromie autour de 0 ne dépend que de  $A$  (et pas de  $B$  ni de  $P$ ). Si  $A$  n'est pas de la forme  $\frac{m^2 - 1}{4}$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont  $-\exp(\pm i\pi\sqrt{1 + 4A})$ .*

Remarque 2.2. — Si  $1 + 4A < 0$ , les valeurs propres sont donc réelles et négatives.

Remarque 2.3. — Quand  $\sqrt{1 + 4A} \notin \mathbf{Q}$ , la monodromie en 0 est un élément non résonant de  $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ .

Démonstration. — On cherche des solutions de la forme  $t^s f(t)$  pour un certain  $s \in \mathbf{C}$  et une fonction  $f$  analytique au voisinage de 0. En reportant  $Q(t) = t^s f(t)$  dans l'équation différentielle, on voit que  $s$  doit être solution de l'équation du second degré

$$s(s - 1) - A = 0$$

(ici  $A = \lim_{t \rightarrow 0} t^2(A\wp(t) + B)$ ). Si la différence  $\sqrt{1 + 4A}$  entre les deux racines  $s_1$  et  $s_2$  de cette équation n'est pas un nombre entier, on peut déterminer les développements convergents en 0 de deux fonctions analytiques  $f_1$  et  $f_2$  (voir [12, p.~198] pour ces résultats classiques sur les équations différentielles). On a ainsi deux solutions indépendantes  $t^{s_1} f_1(t)$  et  $t^{s_2} f_2(t)$ . La monodromie le long d'un lacet  $\gamma$  faisant le tour de l'origine transforme ces solutions par

$$t^s f(t) \longmapsto e^{2i\pi s} t^s f(t).$$

Elle est donc diagonale dans cette base et ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \exp 2i\pi \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 4A}}{2} \right) = -\exp \left( \pm i\pi\sqrt{1 + 4A} \right).$$

□

### La monodromie le long d'un lacet réel

Rappelons que l'équation est réelle, c'est-à-dire que  $A, B \in \mathbf{R}$  et que  $P \in \mathbf{R}[x]$ . Supposons de plus (voir la figure 1) que

- les coefficients  $g_2$  et  $g_3$  sont des fonctions analytiques réelles d'un paramètre  $h$ ,
- pour  $h$  dans un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbf{R}$ , la partie réelle de la courbe elliptique réelle a deux composantes connexes (le polynôme  $P = P_h$  a trois racines réelles  $e_1 < e_2 < e_3$ ),
- la fonction  $Ax + B$  est strictement positive sur l'ovale (composante compacte) de cette courbe, c'est-à-dire  $A > 0$  et  $-\frac{B}{A} < e_1$  ou  $A < 0$  et  $-\frac{B}{A} > e_2$  (le cas où  $A = 0$  n'est pas intéressant).

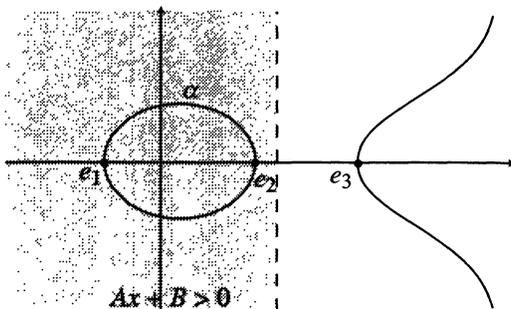


Figure 1

On peut choisir, pour représenter un des générateurs, disons  $\alpha$ , du groupe fondamental, l'ovale de cette courbe. Un théorème classique de Liapounov ([7], voir aussi [5, p. 383]) affirme alors :

**PROPOSITION 2.4.** — *Pour tout  $h \in I$ , la monodromie le long de  $\alpha$  a des valeurs propres réelles positives et distinctes.*

*Démonstration.* — Rappelons la démonstration élégante de ce résultat qui s'applique à toute équation de la forme

$$\ddot{Q} = f(t)Q$$

où  $f$  est périodique réelle de période  $2\omega$  et positive sur  $[0, 2\omega]$ . Appelons  $F$  et  $G$  une base de solutions, spécifiée par

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = 0, \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1.$$

On résout l'équation

$$\ddot{Q} = \lambda f(t)Q$$

en en cherchant les solutions sous la forme

$$F^\lambda(t) = 1 + \sum_{k \geq 1} \lambda^k F_k(t), \quad G^\lambda(t) = t + \sum_{k \geq 1} \lambda^k G_k(t).$$

Les fonctions  $F_n$  et  $G_n$  doivent alors satisfaire

$$\frac{d^2 F_n}{dt^2} = f(t)F_{n-1}(t), \quad \frac{d^2 G_n}{dt^2} = f(t)G_{n-1}(t)$$

de sorte qu'on a

$$F_n(t) = \int_0^t \left( \int_0^u f(v)F_{n-1}(v)dv \right) du \quad \text{et} \quad G_n(t) = \int_0^t \left( \int_0^u f(v)G_{n-1}(v)dv \right) du$$

avec  $F^0 \equiv 1$  et  $G^0(t) \equiv t$ . Comme  $f$  est positive, on voit de proche en proche que  $F_n, G_n$  et  $G'_n$  sont strictement positives pour  $t$  réel strictement positif.

La monodromie  $\tilde{\alpha}$  le long de  $\alpha$  s'obtient en calculant  $F(2\omega)$  et  $G(2\omega)$  :

$$\begin{cases} F(t+2\omega) = a_{1,1}F(t) + a_{1,2}G(t) \\ G(t+2\omega) = a_{2,1}F(t) + a_{2,2}G(t) \end{cases}$$

en  $t = 0$ , on obtient  $a_{1,1} = F(2\omega)$ ,  $a_{2,2} = G'(2\omega)$  et la trace de  $\tilde{\alpha}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{\alpha}) &= F(2\omega) + G'(2\omega) \\ &= 2 + \sum_{k \geq 1} (F_k(2\omega) + G'_k(2\omega)) \\ &> 2. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de  $\tilde{\alpha}$  sont réelles, positives (leur produit est 1) et distinctes.  $\square$

**COROLLAIRE 2.5.** — *Pour tout  $h \in I$ ,  $\tilde{\alpha}$  est d'ordre infini.*

*Démonstration.* — C'est une matrice diagonalisable dont les valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$  sont réelles différentes de  $\pm 1$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.6.** — *Si  $\sqrt{1+4A} \notin \mathbf{Q}$ , pour presque toute valeur réelle de  $h$ , le groupe de Galois de l'équation de Lamé (2.1) est  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$  tout entier.*

*Démonstration.* — La liste des sous-groupes algébriques de  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$  est assez courte (voir par exemple [9, p. 9]). Le nôtre contient un commutateur, la monodromie  $\tilde{\gamma}$  le long d'un lacet  $\gamma$  autour de 0, qui est d'ordre infini (pour  $\sqrt{1+4A} \notin \mathbf{Q}$ ). Il n'est donc pas abélien et contient un tore. À part le groupe  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$  tout entier, les deux seules possibilités pour le groupe  $G$  sont :

- le cas où la composante neutre est un tore et où  $G$  est conjugué à

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{array} \right) \mid \lambda, a \in \mathbf{C}^* \right\}.$$

- le cas où  $G$  est résoluble non abélien, conjugué à

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda^{-1} \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbf{C}^*, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

Remarquons d'abord que la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  a pour valeurs propres  $i$  et  $-i$ . La trace du polynôme caractéristique de  $\tilde{\alpha}$  est une fonction analytique de  $h$ . Les valeurs propres de  $\tilde{\alpha}$  sont donc, soit constantes réelles, soit non constantes et différentes de  $\pm i$  pour presque toutes les valeurs de  $h$ . On peut donc supposer que  $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ . Appelons  $\beta$  un autre générateur du groupe fondamental, choisi de façon que  $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ . Si  $\tilde{\beta}$  était diagonalisable dans la même base, elle commuterait avec  $\tilde{\alpha}$  et on aurait  $\tilde{\gamma} = \text{Id}$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $\tilde{\beta}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ . Mais alors

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $\tilde{\gamma}$  ne dépendent pas de  $h$ . Si ce sont les carrés de celles de  $\tilde{\alpha}$ , celles-ci ne dépendent pas non plus de  $h$ , donc elles sont réelles positives, mais alors celles de  $\tilde{\gamma}$  aussi. Mais l'égalité  $-\exp(i\pi\sqrt{1+4A}) = \lambda^2$  n'est possible que si  $\sqrt{1+4A} = 2k+1 \in \mathbf{Z}$ , ce qui est interdit. On exclut ainsi le premier cas.

Supposons enfin que  $G$  soit un groupe résoluble non abélien et plaçons-nous dans une base dans laquelle  $\tilde{\alpha}$  est diagonale. Alors

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \mu & a^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $\tilde{\gamma}$ , qui est diagonalisable, devrait être égale à l'identité, ce qui n'est pas. Ceci finit la démonstration du corollaire 2.6.  $\square$

*Remarque 2.7.* — Pour les applications aux systèmes hamiltoniens, le paramètre  $h$  sera, comme son nom le laisse deviner, une valeur du hamiltonien  $H$ , de sorte que l'existence d'une seule valeur de  $h$  donnant un groupe de Galois virtuellement non abélien suffit pour les applications que nous avons en vue. Il n'est donc pas nécessaire ici de rechercher un énoncé plus précis.

On peut préciser la démonstration du corollaire 2.6 pour obtenir :

**COROLLAIRE 2.8.** — *Pour tout  $h \in I$ , le groupe de Galois est un sous-tore de  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$  ou  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$  tout entier.*

*Démonstration.* — Comme  $h \in I$ ,  $\tilde{\alpha}$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles positives, il engendre un sous-tore de  $\text{SL}(2; \mathbf{C})$ . Les seules possibilités pour le groupe de Galois  $G$  sont

- $G$  est un tore,
- $G$  est conjugué à un des deux sous-groupes de la démonstration du corollaire 2.6,
- $G = \mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ .

Soit comme plus haut  $\beta$  un autre générateur du groupe fondamental, avec  $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ . Si  $\tilde{\beta}$  est diagonalisable dans la même base que  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  commutent, le groupe est abélien, c'est donc un tore. Si  $\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ , on doit avoir  $-\exp(i\pi\sqrt{1+4A}) = \lambda^2$ , ce qui oblige  $\lambda$  à être égal à  $\pm 1$ , mais alors  $\tilde{\alpha} = \pm \mathrm{Id}$ , ce qui n'est pas possible puisque  $h \in I$ . Il reste à exclure le fait que  $G$  soit un groupe résoluble non abélien. On ne suppose plus que  $\sqrt{1+4A} \notin \mathbf{Q}$  et on ne peut donc plus utiliser le fait que  $\tilde{\gamma}$  est diagonalisable. C'est quand même un commutateur et, comme plus haut, il est de la forme  $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ . Quand on cherche les solutions de la forme  $t^s f(t)$  où  $f$  est holomorphe non nulle au voisinage de 0, on trouve une solution avec  $s = \frac{m+1}{2}$  (si  $A = \frac{m^2-1}{4}$ ) et  $f$  une fonction *paire*. La monodromie le long de  $\gamma$  la transforme en

$$\tilde{\gamma} = e^{i\pi(m+1)} t^{\frac{m+1}{2}} f(t)$$

donc  $e^{i\pi(m+1)} = 1$  et  $m = 2n - 1$ , notre solution est

$$w_2(t) = t^n f(t).$$

Comme l'équation aux variations normales n'a pas de terme en  $\dot{Q}$ , le wronskien d'une base de solutions est constant. Si  $w_1$  est une solution indépendante, on a donc

$$w_2' w_1 - w_1' w_2 = C, \quad \text{et} \quad \left( \frac{w_1}{w_2} \right)' = \frac{C}{w_2^2}, \quad \text{donc} \quad w_1 = C w_2 \int \frac{dt}{w_2(t)^2}.$$

Comme  $f$  est *paire*, il en est de même de  $w_2(t)^2$ , donc

$$\frac{1}{w_2(t)^2} = \sum_{k \geq 0} b_k t^{2k-2n}, \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{w_2(t)^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{2k-2n+1} t^{2k-2n+1},$$

une fonction invariante par la monodromie autour de 0. La fonction  $w_1$  a la même propriété, ce dont on déduit que  $\tilde{\gamma} = \mathrm{Id}$ , donc que le groupe  $G$  est abélien.  $\square$

## 2.2. Exemples d'applications

### 2.2.a. Hénon-Heiles, encore

Sans beaucoup d'originalité, considérons le hamiltonien de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + Bq_2^2) - q_1^2 q_2 - \frac{\lambda}{3} q_2^3,$$

c'est-à-dire le potentiel

$$V = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{q_2^2 \left( B - \frac{2\lambda}{3} q_2 \right)}_{a(q_2)} + q_1^2 \underbrace{(1 - 2q_2)}_{b(q_2)} \right].$$

Les trajectoires contenues dans le plan  $q_1 = p_1 = 0$  sont les courbes

$$C_h : p_2^2 + q_2^2 \left( B - \frac{2\lambda}{3} q_2 \right) = 2h$$

(des courbes de genre 1 privées d'un point). Le paramétrage par le temps s'obtient en résolvant l'équation différentielle

$$\ddot{q}_2 + Bq_2 - \lambda q_2^2 = 0,$$

dont une solution est

$$q_2(t) = \frac{1}{2\lambda} (12\wp(t) + B)$$

où  $\wp$  est la fonction de Weierstrass associée à la courbe elliptique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad \text{avec } g_2 = \frac{B^2}{12} \text{ et } g_3 = \frac{B^3}{216} - \frac{h\lambda^2}{18}.$$

L'équation aux variations normales est alors

$$\ddot{Q} + (1 - 2q_2(t))Q = 0,$$

une équation de Lamé. C'est un des exemples où les méthodes de Ziglin et/ou de Morales et Ramis donnent très classiquement (voir [14], [6], [9], [1], [2]) des résultats de non-intégrabilité méromorphe complexe (le hamiltonien n'est intégrable pour presque aucune valeur de  $\lambda$  et  $B$ ) ou réelle [15].

Je m'intéresse ici à une illustration de la remarque 1.3. Je vais donc étudier la partie réelle de cette famille de courbes un peu plus en détail. Pour simplifier, supposons<sup>(3)</sup>  $\lambda > 0$ . Le polynôme

$$P(q_2) = \frac{2\lambda}{3} q_2^3 - Bq_2^2 + 2h$$

---

<sup>(3)</sup> Le cas où  $\lambda = 0$  est intéressant aussi, voir [1], [2].

Michèle Audin

a trois racines réelles pour  $h \in \left] 0, \frac{B^3}{6\lambda^2} \right[$  (pour  $B > 0$ ) ou  $h \in \left] \frac{B^3}{6\lambda^2}, 0 \right[$  (pour  $B < 0$ ). La fonction  $1 - 2q_2$  est strictement négative pour  $q_2 > \frac{1}{2}$ . L'ovale de la courbe  $C_h$  n'est jamais complètement contenu dans ce demi-plan. Mais l'« autre » générateur du groupe fondamental est porté par la composante compacte de la courbe  $(xz)^2 = P(x)$  ( $x, z \in \mathbf{R}$ ), représentée en pointillés sur la figure 2.

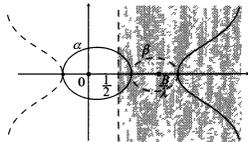


Figure 2

Pour que cet ovale soit contenu dans le demi-plan  $q_2 > \frac{1}{2}$ , il suffit que l'on ait  $P(\frac{1}{2}) > 0$  et  $P'(\frac{1}{2}) > 0$ , c'est-à-dire que  $h > \frac{B^3}{8} - \frac{B^2}{12}$  et  $\frac{3}{2} - B < 0$ . Supposons donc  $0 < \lambda < 2B$ . On applique directement le corollaire 2.6 :

**PROPOSITION 2.9.** — *Si  $0 < \lambda < 2B$  et si  $\sqrt{1 + \frac{4B}{\lambda}} \notin \mathbf{Q}$ , pour presque tout  $h$ , le groupe de Galois de l'équation aux variations normales le long de la trajectoire  $H = h$ ,  $q_1 = p_1 = 0$  est  $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$  tout entier.*

On en déduit notamment la non-intégrabilité (méromorphe) complexe du système de Hénon-Heiles sous les hypothèses  $0 < \lambda < 2B$  et  $\sqrt{1 + \frac{4B}{\lambda}} \notin \mathbf{Q}$ .

Venons-en maintenant à la non-intégrabilité réelle. Le groupe fondamental de la courbe  $C_h$  est le groupe libre engendré par un lacet  $\alpha$  porté par l'ovale réel et un lacet  $\beta$  porté par l'ovale de la courbe  $y^2 = -P(x)$  (figure 2). Il est clair qu'en choisissant  $h$  assez proche de  $\frac{B^3}{6\lambda^2}$ , on arrive à rendre cet ovale aussi petit qu'on veut. On en déduit la non-intégrabilité réelle du système sur  $\mathbf{R}^4$  et même au voisinage de la partie réelle de la courbe  $C_h$ , mais pas au voisinage de la trajectoire de  $X_H$  portée par l'ovale.

Montrons maintenant que, pour  $h > 0$  assez petit, le niveau réel  $H = h$  lui-même n'est pas connexe. En effet,  $H = h$  donne

$$h = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2(1 - 2q_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{3}q_2^3 - Bq_2^2 \right),$$

donc

$$q_1^2(1 - 2q_2) = a(q_2) - \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \leq a(q_2).$$

Pour  $h > 0$  assez petit, l'ovale de la courbe réelle est contenu dans le demi-plan  $q_2 < \frac{1}{2}$ , de sorte que la projection du niveau réel  $H = h$  sur le plan des  $(q_1, q_2)$  a deux composantes connexes. Le niveau  $H = h$  n'est donc pas connexe. C'est un exemple où l'on conclut à la non-intégrabilité (méromorphe réelle)

- sur  $\mathbf{R}^4$ ,
- au voisinage de l'hypersurface  $H = h$ , mais *pas* au voisinage de la composante connexe de cette hypersurface qui contient la trajectoire de  $X_H$ ,
- au voisinage de la partie réelle de la complexifiée de la trajectoire de  $X_H$  mais *pas* au voisinage de la trajectoire de  $X_H$ .

### 2.2.b. Un champ de Yang-Mills

Suivant Ziglin dans [13], considérons le hamiltonien<sup>(4)</sup>

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{8}(q_2^2 - q_1^2)^2.$$

On utilise toujours les courbes du plan  $q_1 = p_1 = 0$ , qui ont pour équations

$$C_h : h = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{8}q_2^4.$$

Ce sont encore des courbes de genre 1. Si  $h > 0$ ,  $C_h$  est lisse, avec une composante réelle et deux points à l'infini (non réels). Pour simplifier et n'avoir à considérer qu'un point à l'infini, on peut utiliser l'involution

$$\tau : (q_1, q_2, p_1, p_2) \longmapsto (q_1, -q_2, p_1, -p_2)$$

qui préserve la forme symplectique de  $\mathbf{R}^4$  et n'a aucun point fixe sur la courbe  $C_h$  (pour  $h \neq 0$ ). On a  $h \circ \tau = H$ . Si  $K$  est une intégrale première de  $H$ , alors  $\frac{1}{2}(K + K \circ \tau)$  est une intégrale première invariante. Pour montrer

---

<sup>(4)</sup> Le système hamiltonien associé est un cas particulier d'équation de Yang-Mills (voir [13]).

que  $H$  n'est pas intégrable, il suffit donc de montrer que  $\widehat{H}$ , l'application quotient de  $H$  par  $\tau$ , n'est pas intégrable.

La nouvelle variété symplectique est  $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{0\})/\tau$ . Le deuxième facteur s'identifie au complémentaire de 0 dans le cône quadratique  $Y^2 = XZ$  de  $\mathbf{R}^3$  (en posant  $X = q_2^2$ ,  $Y = q_2 p_2$  et  $Z = p_2^2$ ). En d'autres termes, on peut écrire l'équation de  $C_h$  sous la forme

$$(q_2 p_2)^2 = q_2^2 \left( 2h - \frac{q_2^4}{4} \right),$$

ce qui montre  $C_h$  comme un revêtement double (étale) de la courbe

$$\widehat{C}_h : Y^2 = X \left( 2h - \frac{X^2}{4} \right).$$

La partie réelle de celle-ci a deux composantes connexes et elle n'a qu'un point à l'infini. Le groupe fondamental de la courbe affine est engendré par les classes d'homotopie de deux lacets  $\alpha$  et  $\beta$  — une base du parallélogramme des périodes — leur commutateur  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  est un lacet  $\gamma$  autour du point à l'infini ( $t = 0$ ).

On vérifie immédiatement que, si  $q_2$  et  $p_2$  satisfont au système hamiltonien associé à  $H$ , les fonctions  $X$  et  $Y$  sont solutions du système différentiel

$$\dot{X} = 2Y, \quad \dot{Y} = 2h - \frac{3}{4}X^2.$$

On peut donc choisir

$$X = -4\wp(t), \quad Y = -2\wp'$$

où  $\wp$  est la fonction de Weierstrass associée à la courbe  $\widetilde{C}_h$  d'équation  $y^2 = 4x^3 - 2hx$ .

L'équation aux variations normales le long de  $C_h$  est

$$\ddot{Q} - \frac{1}{2}q_2^2 Q = 0, \text{ soit } \ddot{Q} + 2\wp(t)Q = 0,$$

à nouveau une équation de Lamé réelle qui satisfait aux hypothèses du § 2.1 puisque

- la fonction  $\frac{1}{2}q_2^2$  est positive pour tout  $t$  réel
- l'équation indicelle  $s^2 - s + 2 = 0$  a deux racines distinctes,  $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$  dont la différence n'est pas un nombre entier.

On en déduit, en utilisant le corollaire 2.6, que le groupe de Galois est  $SL(2; \mathbf{C})$  tout entier et en particulier n'est pas virtuellement abélien. Le système n'a donc pas de deuxième intégrale première qui soit méromorphe (complexe).

### Non-intégrabilité réelle

Elle est conséquence du théorème de Ziglin réel (ici la proposition 1.2). En effet, la courbe  $C_h$  est un revêtement double de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  ramifié en les quatre racines du polynôme  $h - \frac{1}{8}q_2^4$ , c'est-à-dire les  $i^k \sqrt[4]{8h}$ . Le groupe fondamental est engendré par les lacets au-dessus des segments  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  représentés sur la figure 3 et qui peuvent être rendus aussi proches qu'on veut de 0 (et donc des réels) en choisissant  $h$  assez petit.

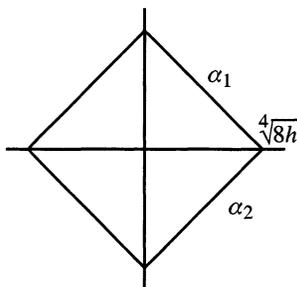


Figure 3

Ici encore, la partie réelle de  $C_h$  est connexe, on conclut à l'absence d'une deuxième intégrale première analytique (et même méromorphe) réelle au voisinage de la trajectoire choisie.

#### 2.2.c. Le problème du satellite

Ce nom désigne un système hamiltonien décrivant le mouvement d'un satellite en orbite (circulaire) autour de son centre de gravité. C'est un problème à trois degrés de liberté. On sait démontrer [4], [3] qu'il n'est pas intégrable (par des intégrales méromorphes complexes). La méthode présentée ici (c'est-à-dire la proposition 1.2) permet aussi de démontrer que ce système n'est pas intégrable par des intégrales premières méromorphes réelles (voir [3]).

#### 2.2.d. Un échec : Hénon-Heiles homogène

Considérons maintenant le cas du hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\lambda}{3}q_2^3 - q_1^2 q_2$$

obtenu en ne gardant que la partie homogène de degré 3 du potentiel de Hénon-Heiles et dit, donc « de Hénon-Heiles homogène ». Les trajectoires du plan  $q_1 = p_1 = 0$  sont les courbes elliptiques

$$C_h : p_2^2 = 2h + \frac{\lambda}{3}q_2^3$$

(privées du point à l'infini). Ici la courbe  $C_h$  est lisse pour  $h \neq 0$ , sa partie réelle n'a qu'une composante connexe (pour toutes les valeurs de  $h$ ), il n'y a pas d'ovale, donc les méthodes précédentes ne s'appliquent pas. L'équation aux variations normales est (pour  $h \neq 0$ ) comme ci-dessus, une équation de Lamé, dont on montre (voir [9, Prop. 5.4 et Prop. 6.4]) que l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie n'est un groupe abélien que pour des valeurs exceptionnelles du paramètre  $\lambda$ .

**Non-intégrabilité réelle.** Malheureusement, cette fois, le groupe fondamental de la courbe complexe n'est pas engendré par des cycles proches des réels et on ne peut pas conclure à la non-intégrabilité réelle.

L'approche par le groupe de Galois ne donne pas plus de résultats. Pour  $h \neq 0$ , l'équation aux variations normales a une singularité régulière en  $t = 0$ , donc le groupe de monodromie engendre tout le groupe de Galois. Pour  $h = 0$ , la courbe acquiert une singularité et devient rationnelle, mais l'équation aux variations normales est de la forme

$$\ddot{Q} + \frac{A}{t^2}Q = 0,$$

une équation de Cauchy, dont le groupe de Galois est abélien. La question ([9, p. 130]) de la non-intégrabilité réelle du hamiltonien homogène de Hénon-Heiles reste ouverte.

### 3. Singularités irrégulières

Dans ce paragraphe, je vais utiliser un aspect plus local du groupe de Galois : les trajectoires choisies sont singulières ou/et l'équation aux variations normales a une singularité irrégulière qui produit dans le groupe de Galois, grâce au phénomène de Stokes, une partie qui ne provient pas du groupe fondamental de la courbe mais vraiment du point singulier. Comme je l'ai signalé dans l'énoncé de la proposition 1.1, l'étude de la non-intégrabilité réelle en est facilitée.

### 3.1. Singularité de type centre

On considère ici un potentiel

$$V = \frac{1}{2} (q_2^{2m} + q_1^2 q_2^k \beta(q_2) + q_1^3 c(q_1, q_2)),$$

où  $m$  et  $k$  sont des entiers naturels (avec  $m \geq 2$ ) et  $\beta$  est une fonction analytique vérifiant  $\beta(0) \neq 0$ . Les trajectoires du plan  $P$  ont pour équations  $p_2^2 + q_2^{2m} = 2h$ . Pour  $h \neq 0$ , les trajectoires complexes sont des courbes hyperelliptiques lisses de genre  $m - 1$  (privées de deux points à l'infini). La trajectoire réelle correspondant à  $h = 0$  est réduite à un point, il s'agit d'un point double de la courbe complexifiée dont les branches sont imaginaires. Le champ hamiltonien a, dans le plan (réel)  $P$ , une singularité de type centre.

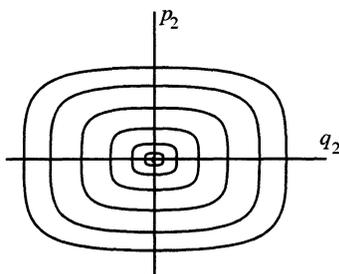


Figure 4. — Les parties réelles des courbes  $C_h$ .

L'équation aux variations normales le long de  $C_0$  est

$$\ddot{Q} + q_2(t)^k \beta(q_2(t))Q = 0,$$

pour  $q_2(t)$  solution de l'équation différentielle

$$\ddot{q}_2 = -mq_2^{2m-1}.$$

Remarquons que cette dernière équation a une unique solution de la forme  $q_2(t) = At^{-\frac{1}{m-1}}$  et paramétrons une des branches complexes de la courbe  $C_0$  par

$$q_2 = \frac{1}{v}, \quad p_2 = \frac{\varepsilon i}{v^m}.$$

Ce n'est pas le paramétrage par le temps mais, comme pour celui-ci, le point singulier est atteint pour  $v = \infty$ . Comme le paramètre  $v$  est proportionnel à  $t^{\frac{1}{m-1}}$ , on a un revêtement fini, ce qui ne change pas la composante neutre

du groupe de Galois. Écrivons maintenant l'équation différentielle satisfaite par  $Q$  comme fonction de  $v$ . Avec  $v = 1/q_2$ , on a

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\dot{q}_2}{q_2^2} = -\frac{p_2}{q_2^2} = -\frac{\varepsilon i}{v^{m-2}},$$

donc

$$\dot{Q} = -\frac{\varepsilon i}{v^{m-2}} \frac{dQ}{dv} \quad \text{et} \quad \ddot{Q} = -\frac{1}{v^{2m-4}} \left( -\frac{m-2}{v} \frac{dQ}{dv} + \frac{d^2Q}{dv^2} \right),$$

de sorte que

$$\ddot{Q} + q_2(t)^k \beta(q_2(t))Q = -\frac{1}{v^{m-4}} \left( -\frac{m-2}{v} \frac{dQ}{dv} + \frac{d^2Q}{dv^2} \right) + \frac{1}{v^k} \beta\left(\frac{1}{v}\right) Q$$

et que l'équation aux variations s'écrit

$$\frac{d^2Q}{dv^2} - \frac{m-2}{v} \frac{dQ}{dv} - v^{2m-k-4} \beta\left(\frac{1}{v}\right) Q = 0.$$

On supprime le terme en  $dQ/dv$  en posant  $Q = Yv^{\frac{m}{2}-1}$ . On obtient :

$$\frac{d^2Y}{dv^2} - D(v)Y = 0$$

avec

$$D(v) = v^{2m-k-4} \beta\left(\frac{1}{v}\right) + \frac{(m-2)(m+2)}{4v^2}$$

### Exemples

Si  $2m - k - 4 = 0$  et  $\beta$  est un polynôme de degré 2,

$$\beta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad \text{avec} \quad a_0 = \beta(0) \neq 0,$$

c'est-à-dire si

$$D(v) = a_0 + \frac{a_1}{v} + \frac{4a_2 + (m-2)(m+2)}{4v^2}.$$

C'est une équation de Whittaker, avec un point singulier irrégulier pour  $v = \infty$  (c'est-à-dire au point singulier de notre trajectoire). Le groupe de Galois n'est virtuellement abélien que si les deux nombres

$$-\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + 4a_2 - 3} - \frac{1}{2}$$

sont des entiers de signes opposés (voir par exemple [9, p. 36]). En général, ces systèmes ne sont donc pas intégrables.

*Remarque 3.1.* — Ici la partie réelle de la trajectoire complexe n'a qu'une composante connexe et le résultat obtenu est le plus fort possible, au sens où on obtient la non-intégrabilité au voisinage de la trajectoire réelle.

*Remarque 3.2.* — Le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{8}(q_2^2 - q_1^2)^2$$

considéré au § 2.2.b est du type étudié ci-dessus, avec  $m = 2$  et  $k = 2$ . En particulier, le point singulier à l'infini est régulier, l'équation aux variations normales le long de la courbe singulière est de la forme

$$\ddot{Q} - \frac{a}{t^2}Q = 0,$$

une équation de Cauchy dont le groupe de Galois est abélien.

### 3.2. Un groupe de Galois résoluble

Dans les exemples ci-dessus, le groupe de Galois est toujours, soit virtuellement abélien, soit  $SL(2; \mathbf{C})$  tout entier. En pensant au fait qu'une équation différentielle linéaire est « intégrable par quadratures » (c'est-à-dire que son extension de Picard-Vessiot est « liouvillienne ») si et seulement si son groupe de Galois différentiel est virtuellement *résoluble* (voir [8]), il m'a semblé intéressant de donner un exemple de système hamiltonien à deux degrés de liberté dont le groupe de Galois de l'équation aux variations normales est résoluble mais pas virtuellement abélien (de telle sorte que l'équation aux variations normales est intégrable par quadratures mais que le système n'est pas complètement intégrable). Il n'est sans doute pas possible de construire un exemple utilisant des fonctions elliptiques (penser à la démonstration du corollaire 2.8), de toute façon je trouve plus transparent (et plus simple) de se contenter de fonctions rationnelles<sup>(5)</sup>.

Considérons donc le hamiltonien « classique »

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{2}q_1^2(1 + q_2^2)$$

associé au système

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{p}_1 = q_1(1 + q_2^2), \quad \dot{p}_2 = q_2q_1^2.$$

Comme dans tous nos exemples, le plan  $q_1 = p_1 = 0$  est invariant, le système restreint à ce plan est particulièrement simple et s'intègre en

$$q_2 = at + b, \quad p_2 = a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

---

<sup>(5)</sup> C'est aussi une bonne propagande pour le groupe de Galois : le groupe de monodromie est trivial dans cet exemple, la courbe  $\Gamma$  étant simplement connexe.

La trajectoire  $\Gamma$  est une droite affine ( $\Gamma = \mathbf{C}$ ) que l'on complète en  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . L'équation aux variations normales est

$$\ddot{Q} - (1 + q_2^2)Q = 0.$$

Elle a une singularité irrégulière à l'infini ( $t = \infty$  cette fois). Avec  $a = 1$  et  $b = 0$ , on a  $q_2 = t$  et

$$\ddot{Q} - (1 + t^2)Q = 0$$

dont  $u = \exp \frac{t^2}{2}$  est une solution. Elle vérifie

$$\frac{\dot{u}}{u} = t$$

donc, pour tout élément  $\sigma$  du groupe de Galois,  $\sigma(u)$  satisfait à la même équation, de sorte que  $\sigma(u) = \lambda u$  pour un  $\lambda \in \mathbf{C}^*$ . On cherche une autre solution sous la forme  $v = zu$ . Alors  $\ddot{v} = (1 + t^2)zu$  d'une part et

$$\ddot{v} = \ddot{z}u + 2\dot{z}ut + z(1 + t^2)u$$

de l'autre. Ainsi  $z$  est solution de l'équation différentielle

$$\ddot{z} + 2\dot{z}t = 0$$

Fixons une primitive  $z_0$  de  $\exp(-t^2)$ . Les solutions  $z$  sont de la forme  $Az_0 + B$ . Si  $\sigma$  est un élément du groupe de Galois, on a donc aussi

$$\sigma(z_0) = Az_0 + B \text{ et } \sigma(v) = \sigma(u)\sigma(z_0) = \lambda u(Az_0 + B)$$

de sorte que le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ .

Pour vérifier qu'on a bien tout ce sous-groupe, il suffit de vérifier que l'équation différentielle n'a qu'une droite de solutions telles que  $\sigma(u) = \lambda u$ , c'est-à-dire telles que  $\dot{u}/u$  soit une fraction rationnelle. Les solutions de la forme  $\exp R(t)$  sont obtenues pour  $R$  satisfaisant à l'équation de Riccati

$$\ddot{R} + \dot{R}^2 = 1 + t^2.$$

On vérifie sans mal que les seules solutions rationnelles de cette équation sont les  $R(t) = \frac{t^2}{2} + C$  (qui donnent les multiples de  $u$ ). Le groupe de Galois est donc tout le groupe résoluble.

*Remarque 3.3.* — On en déduit que le hamiltonien  $H$  n'a pas d'intégrale première rationnelle sur  $\mathbf{C}^4$  et pas non plus sur  $\mathbf{R}^4$ .

## Bibliographie

- [1] AUDIN (M.). — *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.
- [2] AUDIN (M.). — « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001, Astérisque*, 282 (2002), 113–135.
- [3] AUDIN (M.). — « La réduction symplectique appliquée à la non-intégrabilité du problème du satellite », *ce volume*.
- [4] BOUCHER (D.), WEIL (J.-A.). — « On the applicability of the Morales-Ramis criteria for testing the non-integrability of Hamiltonian systems », *preprint* (2002).
- [5] INCE (E. L.). — *Ordinary differential Equations*, Dover, 1956.
- [6] ITO (H.). — « Non-integrability of Hénon-Heiles system and a theorem of Ziglin », *Kodai Math. J.*, 8 (1985), 120–138.
- [7] LIAPOUNOV (A.). — « Problème général de la stabilité du mouvement », *Ann. Fac. Sc. Toul.*, 9 (1907), 203–469.
- [8] MAGID (A.). — *Lectures on differential Galois theory*, University lecture series, 7, American Mathematical Society, 1994.
- [9] MORALES-RUIZ (J.). — *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.
- [10] MORALES-RUIZ (J.), RAMIS (J.-P.). — « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems », *Methods Appl. Anal.*, 8 (2001).
- [11] WHITNEY (H.), BRUHAT (F.). — « Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels », *Comment. Math. Helv.*, 33 (1959), 132–160.
- [12] WHITTAKER (E. T.), WATSON (G. N.). — *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition.
- [13] ZIGLIN (S. L.). — « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I », *Funct. Anal. Appl.*, 16 (1982), 181–189.
- [14] ZIGLIN (S. L.). — « Branching of solutions and non existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II », *Funct. Anal. Appl.*, 17 (1983), 6–17.
- [15] ZIGLIN (S. L.). — « The absence of an additional real-analytic first integral in some problems of dynamics », *Funct. Anal. Appl.*, 31 (1997), 3–9.