ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Indépendance linéaire et algébrique de fonctions liées à la fonction q-dzeta

Tome XVII, n° 1 (2008), p. 23-36.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_1_23_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVIi, n° 1, 2008
pp. 23–36

Indépendance linéaire et algébrique de fonctions liées à la fonction q-dzeta(*)

Jean-Paul Bézivin[1]

Résumé. — Pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, on définit la q-analogue de la fonction zeta de Riemann par les égalités $\zeta_q(k) = \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{k-1}q^n}{1-q^n}$.
Dans [8], W. Zudilin énonce deux questions à propos de ces fonctions de q. La première concerne l'indépendance linéaire sur $\mathbb{C}(q)$ des fonctions $\zeta_q(k)$, pour $k \geqslant 1$, et la seconde l'indépendance algébrique sur $\mathbb{C}(q)$ des fonctions $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$, et des fonctions $\zeta_q(2k+1)$, $k \geqslant 0$. Dans [5], Y. Pupyrev répond positivement à la première question, et donne des résultats partiels pour la seconde.
Dans cet article, nous considérons la fonction $L(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{y^n x^n}{1-x^n}$, et, avec $\tau = y\frac{d}{dy}$, les fonctions $\tau^j(L)(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} n^j \frac{y^n x^n}{1-x^n}$. Pour des valeurs $a_k, k = 1, ..., s$, soumises à quelques conditions techniques, nous démontrons des résultats d'indépendance linéaire et algébrique pour les fonctions $\tau^j(L)(x, a_k)$.

Abstract — For $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, one extends the Riemann Zeta function in the following way: $\zeta_q(k) = \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{k-1}q^n}{1-q^n}$.
In the paper [8], W. Zudilin has formulated two questions about these functions. The first one is about the linear independence over $\mathbb{C}(q)$ of the functions $\zeta_q(k)$, $k \geqslant 1$, and the second one about the algebraic independence over $\mathbb{C}(q)$ of $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$, and $\zeta_q(2k+1)$, $k \geqslant 0$.
In the paper [5], Y. Pupyrev has positively answered the first question, and has given partial results for the second.

(*) Reçu le 9 novembre 2006, accepté le 31 janvier 2007
(1) Université de Caen, Département de Mathématiques et Mécanique, Laboratoire N.Oresme, Campus II, Boulevard du Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen Cedex, France.
bezivin@math.unicaen.fr

In this paper, we consider the function $L(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{y^n x^n}{1-x^n}$, and, with $\tau = y\frac{d}{dy}$, the functions $\tau^j(L)(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} n^j \frac{y^n x^n}{1-x^n}$. For complex values $a_k, k = 1, ..., s$, satisfying some technical conditions, we show linear and algebraic independence results for the functions $\tau^j(L)(x, a_k)$.

1. Introduction et résultats

Soit $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$; une manière possible pour définir une q-analogue de la fonction dzeta de Riemann est ($k \geqslant 1$) :

$$\zeta_q(k) = \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{k-1} q^n}{1-q^n}$$

Dans [8], W. Zudilin énonce deux questions à propos de ces fonctions de q :

Question 1 : *Montrer que les fonctions $\zeta_q(1)$, $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(3)$, ... sont $\mathbb{C}(q)$-linéairement indépendantes.*

Question 2 : *Montrer que l'ensemble des fonctions définies par $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(6)$, et $\zeta_q(2k+1)$, $k \geqslant 0$, est formé de fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(q)$.*

On renvoie à [8] pour plus de détails concernant le contexte de ces deux questions.

Dans [5], Y. Pupyrev répond positivement à la première question :

Théorème 1.1 (Pupyrev). — *Soit m un entier non nul. Les fonctions de $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ définies par $\zeta_q(k)$, $k = 1, \cdots, m$ sont linéairement indépendantes sur le corps $\mathbb{C}(q)$.*

Dans le même article, Y. Pupyrev donne également des résultats partiels pour la seconde question.

Nous noterons aussi un lien avec d'autres conjectures :

Soit $x \in \mathbb{C}$, et cette fois-ci $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$. On définit la fonction q-logarithme $L_q(x)$ par :

$$L_q(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{q^n - 1}$$

Ces fonctions sont intervenues récemment dans plusieurs articles (voir [1][2],[5][8] par exemple), et il existe une conjecture sur la nature arithmétique des valeurs prises par cette fonction aux points rationnels dans le cas où on suppose $q \in \mathbb{Z}$ (voir P. Bundschuh et K. Väänänen, [1]) :

Conjecture 1.2. — *Soient $q \in \mathbb{Z}$, tel que $|q| > 1$, $l \in \mathbb{N}$, et $x_1, \ldots, x_m$ des nombres rationnels non nuls, avec $|x_k| < |q|$ pour $k = 1, \cdots, m$. On suppose que $\frac{x_k}{x_{k'}} \notin q^{\mathbb{Z}}$ pour $k \neq k'$.*

Alors les nombres $1, L_q^{(j)}(x_1), \cdots, L_q^{(j)}(x_m)$ $j = 0, \cdots, l$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Dans ce contexte, le résultat de Y. Pupyrev prend la forme :

Théorème 1.3 (Pupyrev). — *Soit m un entier non nul. Les fonctions de $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$ définies par $1, L_q^{(j)}(1)$, $k = 1, \cdots, m$ sont linéairement indépendantes sur le corps $\mathbb{C}(q)$.*

Dans ce résultat, les symboles de dérivations sont effectués par rapport à la variable x.

Nous allons introduire des fonctions L liées aux fonctions q-dzeta :

$$L(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{y^n x^n}{1 - x^n}$$

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, le symbole de dérivation est considéré par rapport à la variable y. On aura donc pour $j \geqslant 0$:

$$L^{(j)}(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} n(n-1) \cdots n - j + 1) \frac{y^{n-j} x^n}{1 - x^n}$$

Nous utiliserons la dérivation τ définie par $\tau = y \dfrac{d}{dy}$. On a alors

$$\tau^j(L)(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} n^j \frac{y^n x^n}{1 - x^n}$$

et pour $y = 1$, on retrouve les fonctions considérées par W. Zudilin et Y. Pupyrev.

Dans cet article, nous allons donner des résultats dans la direction considérée par Y. Pupyrev :

Théorème 1.4. — *Soient $a_1, \cdots, a_s$ des nombres complexes non nuls et distincts, vérifiant $|a_k| < 1$ pour tout $k = 1, \cdots, s$, et multiplicativement indépendants. Soit $m \in \mathbb{N}$. Les fonctions définies par $1, L^{(j)}(x, 1)$, $L^{(j)}(x, a_k), k = 1, \cdots, s, j = 0, \cdots, m$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$.*

On peut aussi donner des résultats d'indépendance algébrique, mais avec des hypothèses plus restrictives :

Théorème 1.5. — *Soient $a_1, \cdots, a_s$ des nombres complexes non nuls et distincts, vérifiant $|a_k| < 1$ pour tout $k = 1, \cdots, s$. On suppose que ces nombres sont multiplicativement indépendants. Alors les fonctions $L(x, a_k), k = 1, \cdots, m$, sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$.*

Théorème 1.6. — *Soient $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, et s_1, s_2 deux entiers tels que $s_2 > s_1 \geqslant 1$. Alors les fonctions $L(x, a), \tau^{s_1}(L)(x, a)$, $\tau^{s_2}(L)(x, a)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$.*

On peut aussi définir pour $j \geqslant 1$ les fonctions

$$\tau^{-j}(L)(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^j} \frac{y^n x^n}{1 - x^n}$$

Dans ce cas, on peut aussi donner un résultat d'indépendance algébrique :

Théorème 1.7. — *Soient $s \geqslant 1$, $a_1, \cdots, a_s$ des nombres complexes non nuls, de module < 1, algébriquement indépendants. Alors si $m \geqslant 0$, les fonctions $\tau^{-j}(L)(x, a_k)$, $1 \leqslant k \leqslant s$ et $0 \leqslant j \leqslant m$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$.*

L'auteur remercie vivement le Referee pour une lecture attentive du texte et des remarques constructives.

2. Résultats techniques

Soient f, g deux fonctions. On note par $\asymp$ quand $x \to a$ la relation suivante : Il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que, si $x \to a$, on a $c_1|f(x)| \leqslant |g(x) \leqslant c_2|f(x)$.

Nous aurons tout d'abord besoin du résultat suivant dû à Y. Pupyrev, [5] :

Lemme 2.1. — *Soient ζ une racine de l'unité, et $r \in]0,1[$. On a :*

a) Si $s \in \mathbb{N}, s > 0$, on a $\tau^s(L)(r\zeta, 1) \asymp \dfrac{1}{(1-r)^{s+1}}$, si $r \to 1$;

b) Si $s = 0$, on a $L(r\zeta, 1) \asymp -\dfrac{\log(1-r)}{1-r}$, si $r \to 1$.

Nous aurons aussi besoin d'un résultat général sur le comportement au bord des séries de Lambert, dû à K.Knopp [4], Satz 3, page 292 :

Théorème 2.2. — *Soit a_n une suite de nombres complexes, on suppose que l'entier $v \geqslant 1$ est tel que les v séries de termes généraux $\dfrac{a_{nv+r}}{nv+r}$, $n \geqslant 1$, où $r \in \{0, \cdots, v-1\}$ sont toutes convergentes.*

La série de Lambert F définie par $F(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ vérifie alors la propriété suivante : Soit $x_0 = \exp(2i\pi\theta)$, où $\theta = \dfrac{u}{v}$ avec $u \in \{0, \cdots, v-1\}$ premier à v, alors :

$$\lim (1 - \frac{x}{x_0}) F(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_{nv}}{nv}$$

où la limite se fait quand x tend vers x_0 sur le rayon $[0, x_0]$.

Nous aurons aussi besoin des résultats suivants :

Lemme 2.3. — *Pour tout entier m positif, la série $P_m(z) = \sum_{n \geqslant 1} n^m z^n$ est de la forme $P_m(z) = z \dfrac{A_m(z)}{(1-z)^{m+1}}$, où A_m est un polynôme non nul, de degré m, à coefficients positifs, et tel que $A_m(1) = m!$*

Démonstration. — Ceci vient des calculs faits dans [5], Lemma 1, page 564. □

LEMME 2.4. — *Soient $s \geqslant 1$, et $a_1, \cdots, a_s$ des nombres complexes non nuls et multiplicativement indépendants, de modules < 1. Soient N un entier naturel, et θ_k, $k = 0, \cdots, N$, des fonctions analytiques de s variables complexes, convergentes dans le polydisque unité. On suppose que, pour tout v entier assez grand, on a*

$$\sum_{k=0}^{N} \theta_k(a_1^v, \cdots, a_s^v) v^k = 0$$

Alors les fonctions θ_k sont toutes nulles.

Démonstration. — Posons $\theta_k(x) = \sum b_{k,\underline{l}} x_1^{l_1} \cdots x_s^{l_s}$, avec $\underline{l} = (l_1, ..., l_s) \in \mathbb{N}^s$. L'hypothèse s'écrit

$$\sum_{k,\underline{l}} b_{k,\underline{l}} a_1^{l_1 v} \cdots a_s^{l_s v} v^k = \sum_{\underline{l}} a_1^{l_1 v} \cdots a_s^{l_s v} (\sum_k b_{k,\underline{l}} v^k) = 0$$

pour tout v assez grand, ou encore que $c_v = \sum_{\underline{l}} a_1^{l_1 v} \cdots a_s^{l_s v} S_{\underline{l}}(v) = 0$, où on a posé $S_{\underline{l}}(v) = \sum_k b_{k,\underline{l}} v^k$.

On majore facilement les coefficients $b_{k,\underline{l}}$. En effet, soit r un nombre réel strictement inférieur à 1, et strictement supérieur aux modules des a_j, que l'on fixe dans toute la suite de la preuve. On a alors en notant $|\theta_k|(r)$ le module maximal de $\theta_k(x_1, \cdots, x_s)$ sur le polydisque de centre l'origine et rayon r, par les inégalités de Cauchy la majoration $|b_{k,\underline{l}}| \leqslant \dfrac{|\theta_k|(r)}{r^{l_1 + \cdots + l_s}}$. Il existe donc une constante M_1 (qui sera le maximum des $|\theta_k|(r), k = 0, \cdots, N$, ne dépendant donc que de r, des θ_k et de N), telle que pour tout k et $\underline{l}$, on ait $|b_{k,\underline{l}}| \leqslant \dfrac{M_1}{r^{l_1 + \cdots + l_s}}$.

Soit $g(z) = \sum_{v \geqslant 1} c_v z^v$. Puisque c_v est nulle pour tout v assez grand, g est un polynôme.

D'autre part, on a en appliquant le lemme 2.3, on a, si $S_{\underline{l}}$ est non nul,

$$\sum_{v \geqslant 1} S_{\underline{l}}(v) z^v = \sum_{k=0}^{N} b_{k,\underline{l}} z \frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}} = z \frac{B_{\underline{l}}(z)}{(1-z)^{d_{\underline{l}}+1}}$$

avec les $B_{\underline{l}}$ polynômes, vérifiant $B_{\underline{l}}(1) \neq 0$. Le degré de $B_{\underline{l}}$ est majoré par le degré $d_{\underline{l}}$ de $S_{\underline{l}}$, qui est borné par N. Ses coefficients sont des formes linéaires en les coefficients de $S_{\underline{l}}$; il en résulte que les coefficients de $B_{\underline{l}}$ sont majorés par $\dfrac{M_2}{r^{l_1+\cdots+l_s}}$ où M_2 est une nouvelle constante, ne dépendant également que de r, des θ_k et de N.

Soit $R > 0$, et $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant R$; on a pour tout $\underline{l}$ sauf un nombre fini d'entre eux $|a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s}|R \leqslant \dfrac{1}{2}$, de sorte que $|a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s}||z| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit que sous ces conditions,

$$|B_{\underline{l}}(a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)| \leqslant (N+1)\frac{M_2}{r^{l_1+\cdots+l_s}} = \frac{M_3}{r^{l_1+\cdots+l_s}}$$

On a donc sous ces hypothèses que

$$|a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z \frac{B_{\underline{l}}(a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)}{(1-a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)^{d_{\underline{l}}+1}}| \leqslant |a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z| \frac{M_3}{r^{l_1+\cdots+l_s}} 2^{N+1}.$$

Si on pose $M_4 = RM_3 2^{N+1}$, constante indépendante de $\underline{l} = (l_1, \cdots, l_s)$, il vient

$$|a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z \frac{B_{\underline{l}}(a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)}{(1-a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)^{d_{\underline{l}}+1}}| \leqslant |a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s}| \frac{M_4}{r^{l_1+\cdots+l_s}}$$

Il résulte alors du fait que $r > |a_j|$ pour tout j et de cette majoration que la famille des fonctions $a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z \dfrac{B_{\underline{l}}(a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)}{(1-a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)^{d_{\underline{l}}+1}}$ est sommable, et aussi que la fonction

$$g(z) = \sum_{\underline{l}} a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z \frac{B_{\underline{l}}(a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)}{(1-a_1^{l_1} \cdots a_s^{l_s} z)^{d_{\underline{l}}+1}}$$

est une fonction méromorphe dans tout $\mathbb{C}$, qui admet $a_1^{-l_1} \cdots a_s^{-l_s}$ comme pôle si le polynôme $S_{\underline{l}}$ est non nul (ce qui équivaut à dire que le polynôme $B_{\underline{l}}$ est non nul). En effet les éléments $a_1^{-l_1} \cdots a_s^{-l_s}$ sont distincts pour des $\underline{l} = (l_1, \cdots, l_s)$ distincts en raison de l'hypothèse faite d'indépendance multiplicative des nombres $a_1, .., a_s$. Comme g est un polynôme, on a donc $S_{\underline{l}} = 0$ pour tout $\underline{l}$, donc $b_{k,\underline{l}} = 0$ pour tout k et $\underline{l}$, et par suite les fonctions θ_k sont toutes nulles. $\square$

On note enfin par Li_k pour $k \geqslant 1$ la fonction polylogarithme $Li_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^k}$. On a alors le résultat suivant :

LEMME 2.5. — *Soit $s \geqslant 1$. Les fonctions $Li_k(z)$, $k = 1, \cdots, s$, sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$.*

Démonstration. — Voir [3], [6] ou [7]. □

3. Démonstration des résultats

3.1. Preuve du théorème 1.4

Nous allons raisonner par l'absurde, en suivant d'assez près la démonstration de Y. Pupyrev. Tout d'abord, on remarque que les dérivées $L^{(j)}(x,y)$ et les expressions $\tau^j(L)(x,y)$ s'expriment l'une en fonction de l'autre par des formules $\mathbb{C}(y)$-linéaires inversibles : on a $\tau(L)(x,y) = yL'(x,y)$, (on rappelle que les dérivées sont prises par rapport à y sauf mention expresse du contraire) et $\tau^2(L)(x,y) = yL'(x,y) + y^2L''(x,y)$, etc. On peut donc, puisque l'on ne prendra jamais $y = 0$, au lieu de travailler avec les $L^{(j)}(x,y)$, le faire avec les $\tau^j(L)(x,y)$. Soit donc

$$\mu(x) + \sum_{j=0}^{t} \mu_{j,0}(x)\tau^j(L)(x,1) + \sum_{j,k} \mu_{j,k}(x)\tau^j(L)(x,a_k) = 0$$

une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{C}(x)$ pour ces fonctions ; on peut supposer que les $\mu_{j,k}$ sont des polynômes.

Soit tout d'abord x_0 une racine de l'unité, $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$, avec u et v dans $\mathbb{N}$ v non nul, u et v premiers entre eux.

On remarque tout d'abord que si $k \in \{1, \cdots, s\}$ et j est fixé, $\tau^j(L)(x,a_k) = \sum_{n\geqslant 1} n^j a_k^n \frac{x^n}{1-x^n}$ est une série de Lambert de la forme $\sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{x^n}{1-x^n}$ avec $b_n = n^j a_k^n$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Par le théorème de Knopp (théorème 2.2), l'expression $(1 - \frac{x}{x_0})\tau^j(L)(x,a_k)$ converge vers $\sum_{n\geqslant 1} (nv)^j \frac{a_k^{nv}}{nv}$ si x tend radialement vers x_0.

Nous allons tout d'abord démontrer que les $\mu_{j,0}(x)$ sont tous nuls.

S'il existe des $\mu_{j,0}(x)$ qui sont non nuls, on peut supposer que $\mu_{t,0}(x)$ est non nul et on choisit une racine primitive v-ième de l'unité $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$ telle que $\mu_{t,0}(x_0) \neq 0$. On multiplie alors l'expression par $(1-\dfrac{x}{x_0})^{t+1}$ et on fait tendre x radialement vers x_0.

Si t est non nul, par le lemme 2.1, chaque terme $(1-\dfrac{x}{x_0})^{t+1}\mu_{j,0}(x)\tau^j(L)(x,1)$ converge vers 0 si $j < t$, et le terme $(1-\dfrac{x}{x_0})^{t+1}\mu_{t,0}(x)\tau^t(L)(x,1)$ est $\asymp \mu_{t,0}(x_0)$. Comme les termes $(1-\dfrac{x}{x_0})^{t+1}\mu_{j,k}(x)\tau^j(L)(x,a_k)$ ont tous une limite nulle par ce qui précède, ainsi que le terme $(1-\dfrac{x}{x_0})^{t+1}\mu(x)$, on obtient que $0 \asymp \mu_{t,0}(x_0)$, ce qui est absurde.

Si $t = 0$, on obtient en multipliant par $1-\dfrac{x}{x_0}$ et en faisant tendre x radialement vers x_0 que le terme $(1-\dfrac{x}{x_0})\mu(x)$ tend vers 0, chaque terme $(1-\dfrac{x}{x_0})\mu_{j,k}(x)\tau^j(L)(x,a_k)$ admet une limite finie, et si x_0 est choisi de façon que $\mu_{0,0}(x_0)$ est non nul, le terme $(1-\dfrac{x}{x_0})\mu_{0,0}(x)L(x,1)$ est $\asymp -\log(1-r)$, donc aussi l'expression totale, ce qui est absurde puisqu'elle est nulle.

On a donc démontré que les $\mu_{j,0}$ sont tous nuls. Il ne reste donc qu'une égalité de la forme

$$\mu(x) + \sum_{j,k} \mu_{j,k}(x)\tau^j(L)(x,a_k) = 0$$

Nous allons maintenant réutiliser le théorème de K. Knopp pour terminer la démonstration.

On multiplie par $1-\dfrac{x}{x_0}$ l'expression précédente, on a donc :

$$\begin{aligned}(1-\frac{x}{x_0})(\mu(x) + \sum_{j,k} \mu_{j,k}(x)\tau^j(L)(x,a_k))\\ = (1-\frac{x}{x_0})\mu(x) + \sum_{j,k} \mu_{j,k}(x)(1-\frac{x}{x_0})\tau^j(L)(x,a_k)\end{aligned}$$

et on fait tendre x radialement vers x_0.

Le terme $(1-\dfrac{x}{x_0})\mu(x)$ converge vers 0. Chaque terme $(1-\dfrac{x}{x_0})\tau^j(L)(x,a_k)$ converge vers $\sum_{n\geqslant 1}(nv)^j\dfrac{a_k^{nv}}{nv}$. Il en résulte que l'expression :

$$\sum_{j,k}\mu_{j,k}(x)(1-\frac{x}{x_0})\tau^j(L)(x,a_k)$$

converge vers $\sum_{j,k}\mu_{j,k}(x_0)\sum_{n\geqslant 1}(nv)^j\dfrac{a_k^{nv}}{nv}$, qui est donc nulle, et ceci pour toute valeur de $v\geqslant 1$ et tout $x_0=\exp(2i\pi u/v)$ avec u et v premiers entre eux.

Soit d le maximum des degrés des $\mu_{j,k}(x)$. Si on choisit v assez grand, on aura un nombre de valeurs x_0 possibles strictement plus grand que d. Il en résulte que le polynôme $\sum_{j,k}\mu_{j,k}(x)\sum_{n\geqslant 1}(nv)^j\dfrac{a_k^{nv}}{nv}$ est identiquement nul. En appelant $\mu_{j,k,m}$ le coefficient de x^m dans $\mu_{j,k}(x)$, il en résulte que pour tout m, et v assez grand, on a $\sum_{j,k}\mu_{j,k,m}\sum_{n\geqslant 1}(nv)^j\dfrac{a_k^{nv}}{nv}=0$. En multipliant par v, cette expression s'écrit aussi :

$$\sum_{j,k}\mu_{j,k,m}\sum_{n\geqslant 1}v^jn^{j-1}a_k^{nv}=\sum_j\sum_k\mu_{j,k,m}(\sum_{n\geqslant 1}n^{j-1}a_k^{nv})v^j=\sum_j\sum_k\theta_{j,k}(a_k^v)v^j$$

avec $\theta_{k,j}(x)=\mu_{j,k,m}\sum_{n\geqslant 1}n^{j-1}x^n$ qui est analytique dans le disque unité de $\mathbb{C}$.

Nous sommes dans les conditions d'application du lemme 2.4, ce qui fournit que tous les $\mu_{j,k,m}$ sont nuls. Finalement, tous les $\mu_{j,k}(x)$ sont nuls, et il en est de même de $\mu(x)$, ce qui termine la démonstration.

3.2. Preuve du théorème 1.5

On se donne une relation de dépendance algébrique entre $1, L(x,a_k), k=1,\cdots,s$. On a donc un polynôme non nul $Q(Y,X_1,\cdots,X_s)$, à coefficients dans $\mathbb{C}$, tel que $Q(x,L(x,a_1),\cdots,L(x,a_s))=0$ pour tout $x\in D(0,1)$. On peut considérer la décomposition de Q en polynômes homogènes relativement aux variables X_k, on écrit donc $Q=\sum_{h=1}^{m}Q_h$, le polynôme Q_h étant homogène de degré h, et Q_m est non nul. Nous allons utiliser le théorème de Knopp.

Considérons un monôme $X_1^{l_1}\cdots X_s^{l_s}$ et posons $w = l_1+\cdots+l_s$. Par le théorème de Knopp, que nous pouvons utiliser puisque tous les a_k sont de modules strictement inférieurs à 1, si x_0 est une racine de l'unité de la forme $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$, avec u premier à v, et si x tend radialement vers x_0, l'expression

$$(1-\frac{x}{x_0})^w(L(x,a_1)^{l_1}\cdots(L(x,a_s)^{l_s} = ((1-\frac{x}{x_0})L(x,a_1))^{l_1}\cdots((1-\frac{x}{x_0})L(x,a_s))^{l_s}$$

converge vers $(\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_1^{nv}}{nv})^{l_1}\cdots(\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_s^{nv}}{nv})^{l_s}$.

Si on multiplie $Q(x,L(x,a_1),\cdots,L(x,a_s))$ par $(1-\frac{x}{x_0})^m$, et que l'on fait tendre radialement x vers x_0, chaque terme $(1-\frac{x}{x_0})^m Q_h(x,L(x,a_1),\cdots,$ $L(x,a_s))$ aura si $h<m$ une limite nulle. Pour ce qui concerne le terme

$$(1-\frac{x}{x_0})^m Q_m(x,L(x,a_1),\cdots,L(x,a_s)),$$

qui est égal à

$$\sum_{|\underline{l}|=m}\mu_{\underline{l}}(x)((1-\frac{x}{x_0})L(x,a_1))^{l_1}\cdots((1-\frac{x}{x_0})L(x,a_s))^{l_s}$$

il converge vers l'expression

$$\sum_{|\underline{l}|=m}\mu_{\underline{l}}(x_0)(\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_1^{nv}}{nv})^{l_1}\cdots(\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_1^{nv}}{nv})^{l_s}.$$

Comme l'expression est homogène, on peut faire disparaître le terme v en dénominateur, et comme $-\log(1-x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$, il vient que

$$Q_m(x_0,-\log(1-a_1^v),\cdots,-\log(1-a_s^v)) = 0$$

pour tout v, et tout x_0 de la forme $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$ avec u premier à v.

Soit d le degré en Y de Q_m. Si l'on choisit v assez grand, le polynôme $Q_m(Y,-\log(1-a_1^v),\cdots\cdots,-\log(1-a_s^v))$ aura plus de racines distinctes que son degré, il sera donc identiquement nul.

Si l'on écrit maintenant $Q_m(Y,X_1,\cdots,X_s) = \sum Y^l A_l(X_1,\cdots,X_s)$, il vient que $A_l(-\log(1-a_1^v),\cdots,-\log(1-a_s^v)) = 0$ pour tout v assez grand. Le lemme 2.4 s'applique et montre que $A_l(-\log(1-x_1),\cdots,-\log(1-x_s))$ est une fonction identiquement nulle sur le polydisque unité, puis que $A_l(X_1,\cdots,X_s)$ est nul pour tout l, et donc Q_m est le polynôme nul, contrairement à l'hypothèse faite, ce qui termine la démonstration.

3.3. Preuve du théorème 1.6.

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant l'existence d'un polynôme non nul $Q(X, Y_0, Y_1, Y_2)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que

$$Q(x, L(x,a), \tau^{s_1}(L)(x,a), \tau^{s_2}(L)(x,a)) = 0$$

On décompose encore Q en ses parties homogènes par rapport à Y_0, Y_1, Y_2, et soit Q_m le polynôme homogène de plus haut degré.

On va utiliser le théorème de Knopp, on multiplie donc par $(1 - \frac{x}{x_0})^m$, où x_0 est une racine de l'unité de la forme $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$, u et v entiers premiers entre eux. Par le théorème de Knopp, on trouve ainsi que nous l'avons déjà vu que

$$Q_m(x_0, (\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^{nv}}{nv}), (\sum_{n\geqslant 1}(nv)^{s_1-1}a^{nv}), (\sum_{n\geqslant 1}(nv)^{s_2-1}a^{nv})) = 0$$

pour tout v. En choisissant encore v assez grand par rapport aux degrés des coefficients (polynômes) de Q_m, on voit que pour tout v assez grand, on a

$$Q_m(X, (\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^{nv}}{nv}), (\sum_{n\geqslant 1}(nv)^{s_1-1}a^{nv}), (\sum_{n\geqslant 1}(nv)^{s_2-1}a^{nv})) = 0$$

Posons $Q_m(X, Y_0, Y_1, Y_2) = \sum_{|\underline{l}|=m} \mu_{\underline{l}}(X) Y_0^{l_0} Y_1^{l_1} Y_2^{l_2}$. On a donc

$$\sum_{|\underline{l}|=m} \mu_{\underline{l}}(X) v^{-l_0+(s_1-1)l_1+(s_2-1)l_2} (\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^{nv}}{n})^{l_0} (\sum_{n\geqslant 1} n^{s_1-1}a^{nv})^{l_1} (\sum_{n\geqslant 1} n^{s_2-1}a^{nv})^{l_2})$$
$$= 0$$

pour tout v assez grand.

On introduit les fonctions $f_0(x) = -\log(1-x)$, $f_1(x) = \sum_{n\geqslant 1} n^{s_1-1}x^n$, $f_2(x) = \sum_{n\geqslant 1} n^{s_2-1}x^n$, qui sont analytiques dans le disque unité. Après multiplication éventuelle par une puissance de v, de sorte que les exposants de v soient positifs, on trouve que l'expression est de la forme $\sum \theta_k(X, a^n)v^k$ (somme finie), où les θ_k sont des polynômes en $X, f_0(x), f_1(x), f_2(x)$. On s'est placé dans les conditions où l'on peut utiliser le lemme 2.4.

Il en résulte que, en remplaçant la variable entière v par Z, on a :

$$\sum_{|\underline{l}|=m} \mu_{\underline{l}}(X) Z^{-l_0+(s_1-1)l_1+(s_2-1)l_2}(-\log(1-x))^{l_0}(P_{s_1-1}(x))^{l_1}(P_{s_2-1}(x))^{l_2}) = 0$$

Comme la fonction $\log(1-x)$ est transcendante sur $\mathbb{C}(x)$, il vient

$$\sum_{|\underline{l}|=m} \mu_{\underline{l}}(X) Z^{-l_0+(s_1-1)l_1+(s_2-1)l_2} Y_0^{l_0}(P_{s_1-1}(x))^{l_1}(P_{s_2-1}(x))^{l_2}) = 0$$

Fixons l_0, ainsi que $-l_0 + (s_1-1)l_1 + (s_2-1)l_2$, et on tient compte de $l_0 + l_1 + l_2 = m$. On voit alors qu'il n'y a qu'un seul couple (l_2, l_3) qui correspond. Donc comme la fonction $(P_{s_1-1}(x))^{l_1}(P_{s_2-1}(x))^{l_2}$ n'est pas nulle, on a $\mu_{\underline{l}}(X)$ qui est nul, et finalement le polynôme Q_m est nul, ce qui est contraire à l'hypothèse faite, et ceci termine la démonstration.

3.4. Preuve du théorème 1.7

On va suivre le schéma de démonstration des résultats précédents. On raisonne par l'absurde, on suppose donc qu'il existe un polynôme $Q(X, Y_{j,k})$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, non identiquement nul tel que $Q(x, \tau^{-j}(L)(x, a_k)) = 0$. On le décompose en ses parties homogènes en $Y = (Y_{j,k})$, et on note Q_m la partie homogène de plus haut degré.

On note que la série de Lambert $\tau^{-j}(L)(x, a_k)$ vérifie pour tout (j,k) les hypothèses du théorème de Knopp, et que l'on a donc, pour tout $x_0 = \exp(2i\pi u/v)$, u, v entiers premiers entre eux que $(1 - \dfrac{x}{x_0})\tau^{-j}(L)(x, a_k)$ converge vers $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_k^{nv}}{(nv)^{j+1}} = v^{-j-1} Li_{j+1}(a_k^v)$. De manière analogue aux raisonnements précédents, on trouve donc que l'on a $Q_m(x_0, v^{-j-1}Li_{j+1}(a_k^v)) = 0$ pour tout v, puis que pour tout v assez grand, on a $Q_m(X, v^{-j-1}Li_{j+1}(a_k^v)) = 0$. Comme les fonctions $Li_{j+1}(x_k)$ sont analytiques dans le disque unité, on peut appliquer le lemme 2.4 qui montre que l'on a $Q_m(X, Z^{-j-1}L_{j+1}(x_k)) = 0$, où on a remplacé la variable entière v par Z. Le lemme 2.5 fournit alors, en travaillant variable par variable, que $Q_m(X, Z^{-j+1}Y_{j,k}) = 0$, et donc finalement le polynôme Q_m est nul, contrairement à l'hypothèse faite, ce qui termine la démonstration.

Remarque 3.1. — L'hypothèse que les a_k sont multiplicativement indépendants dans les énoncés qui précèdent paraît uniquement de nature technique. On pourrait peut-être avoir les mêmes énoncés en faisant simplement l'hypothèse que ces nombres sont distincts.

Bibliographie

[1] Bundschuh (P.) and Väänänen (K.). — Linear independence of q-analogues of certain classical constants, Results Math. 47, p. 33-44 (2005).

[2] Bundschuh (P.) and Zhou (P.). — Arithmetical results on certain multivariate power series. Bull London Math Soc, 38, n 2, p. 192-200 (2006).

[3] Hoang Ngo Minh, Petitot (M.). — Lyndon words, polylogarithm and Riemann's zeta-function. Discrete Math, 217, no 1-3, p. 273-292 (2000).

[4] Knopp (K.). — Uber Lambertsche Reihen. J. für die reine angewandte Math, 142, 4, p. 283-315 (1913).

[5] Pupyrev (Y.). — Linear and algebraic independence of q-zeta values. Mathematical notes, 78, no. 4, p. 563-568 (2005).

[6] Shidlovskii (A.B.). — Transcendence and algebraic independence values of some E-functions. Moscow Univ Math Bull, 5, p. 44-59 (1961).

[7] Ulanskii (E.A.). — Identities for generalized polylogarithm. Math Notes, 73, no 4, p. 571-581 (2003).

[8] Zudilin (W.). — Diophantine problems for q-values, Math. Notes 72, no. 5-6, p. 858-862 (2002).