ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

HAJER JEBALI

Module d'Alexander et représentations métabéliennes

Tome XVII, n° 4 (2008), p. 751-764.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_4_751_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVII, n° 4, 2008
pp. 751–764

Module d'Alexander et représentations métabéliennes(*)

Hajer Jebali(1)

Résumé. — On sait, depuis des travaux de Burde et de Rham, que l'étude des représentations du groupe d'un nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre 2 permet de détecter les racines du polynôme d'Alexander du nœud. Dans ce travail, nous nous proposons de généraliser ce résultat et ce en considérant les représentations du groupe du nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n, $n \geqslant 2$. Cette approche nous permettra de retrouver la décomposition du module d'Alexander à cœfficients complexes du nœud.

Abstract. — It is known, since works of Burde and de Rham, that one can detect the roots of the Alexander polynomial of a knot by studying the representations of the knot group into the group of the invertible upper triangular 2×2 matrices. In this work, we propose to generalize this result by considering the representations of the knot group into the group of the invertible upper triangular $n \times n$ matrices, $n \geqslant 2$. This approach will enable us to find the decomposition of the Alexander module with complex cœfficients of the knot.

1. Introduction

Soient K un nœud de S^3, $V(K)$ un voisinage tubulaire de K, $X = \overline{S^3 \setminus V(K)}$ son complémentaire et $\pi = \pi_1(\overline{S^3 \setminus V(K)})$ le groupe fondamental de X. Soit μ un méridien du nœud. Notons X^∞ le revêtement cyclique infini de X correspondant au groupe des commutateurs $\pi' = [\pi, \pi]$ et $\pi/\pi' \simeq T = \langle t | - \rangle$ le groupe quotient monogène infini engendré par l'image t du méridien μ. Les groupes d'homologie $H_*(X^\infty, \mathbb{C})$ sont munis d'une structure de $\Lambda = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$-modules. Ces modules sont des modules de torsion et de type fini. Le module $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est appelé module

(*) Reçu le 12 juin 2007, accepté le 26 mai 2008
(1) Faculté des Sciences de Monastir, Boulevard de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
hajer.jebali@fsm.rnu.tn

d'Alexander à cœfficients complexes du nœud. Son idéal d'ordre est principal. Tout générateur de cet idéal est appelé polynôme d'Alexander de K et est noté $\Delta_K(t)$ (voir [Gor78]).

Le module d'Alexander à cœfficients complexes se décompose sous la forme

$$H_1(X^\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\Delta_K(\alpha)=0} \tau_\alpha, \text{ avec } \tau_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k_\alpha} \tau_\alpha^i, \text{ où } \tau_\alpha^i = \frac{\Lambda}{(t-\alpha)^{q_i}},$$

$q_i \in \mathbb{N}^*$ et $k_\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \otimes_\Lambda \mathbb{C}_\alpha)$. Ici, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on notera $\mathbb{C}_\alpha$ le Λ-module $\mathbb{C}$ dont l'action est donnée par

$$q(t) \cdot z = q(\alpha) z, \quad q(t) \in \Lambda.$$

Le Λ-module $\mathbb{C}_1$ est simplement noté $\mathbb{C}$.

Soit G_n le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n, $n \geqslant 2$. On regarde le produit semi-direct $H_1(X^\infty, \mathbb{C}) \rtimes T$, qui s'injecte dans $\displaystyle\prod_{\Delta_K(\alpha)=0} \prod_{i=1}^{k_\alpha} \frac{\Lambda}{(t-\alpha)^{q_i}} \rtimes T$. Or, un facteur de la forme $\displaystyle\frac{\Lambda}{(t-\alpha)^q} \rtimes T$ s'injecte dans G_{q+1} (voir [BF08]), d'où l'intérêt de considérer les représentations, c'est-à-dire homomorphismes de groupes, du groupe du nœud à valeurs dans G_n, $n \geqslant 2$. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude des représentations qui sont de la forme

$$\rho_n(\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha^{|\gamma|} & x_{12}(\gamma) & x_{13}(\gamma) & \dots & x_{1n}(\gamma) \\ 0 & 1 & x_{23}(\gamma) & \dots & x_{2n}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x_{n-1,n}(\gamma) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\mid \gamma \mid = p(\gamma)$, où $p \colon \pi \to \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne la projection canonique.

Ce choix a été motivé, d'une part, par les travaux de [Dwy75], [FS87] et [Mor04] qui ont établi un lien entre le produit de Massey et l'étude des homomorphismes de groupes, des suites centrales descendantes des groupes libres, du calcul différentiel libre ou encore des invariants de Milnor. Le produit de Massey est défini à l'aide des matrices triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale. D'autre part, ce choix a été motivé par les travaux de Burde et de Rham qui se sont intéressés au cas $n = 2$ [Bur67] et [dR67]. Plus précisément, ils ont séparément montré qu'il existe des représentations non abéliennes du groupe du nœud dans G_2 si et seulement si α est racine du polynôme d'Alexander. Ils ont également montré que $k_\alpha = \dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$.

Soit, pour $n \geqslant 2$, l'application ρ_n^V qui à $\gamma \in \pi$ associe la matrice

$$\rho_n^V(\gamma) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{|\gamma|} & V(\gamma) \\ \hline 0 & \phi_{n-1}(\gamma) \end{array}\right)$$

où $V = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ est un $(n-1)$-uplet de 1-cochaînes de π dans le π-module $\mathbb{C}_\alpha$ (voir paragraphe 2) et $\phi_m \colon \pi \to GL(m, \mathbb{C})$ est l'homomorphisme abélien défini par

$$\phi_m(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$C_n = \{U \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \mid \exists\, (v_2, \ldots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2}, \\ \rho_n^{(U, v_2, \ldots, v_{n-1})} \in \operatorname{Hom}(\pi, G_n)\}.$$

Nous montrerons que C_n est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ qui contient l'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Plus précisément, nous montrerons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $n \geqslant 2$, alors l'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est strictement contenu dans C_n si et seulement s'il existe $1 \leqslant i \leqslant k_\alpha$ tel que $q_i \geqslant n-1$.*

De plus, $\dim C_n = 1 + \operatorname{card}\{1 \leqslant i \leqslant k_\alpha \mid q_i \geqslant n-1\}$.

Si nous supposons que les puissances q_i sont ordonnées de sorte que

$$1 \leqslant q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_{k_\alpha}$$

alors nous obtenons le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.2. —

1. *Dans la filtration de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, on a :*

$$B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = C_{q_{k_\alpha}+2} \subsetneq C_{q_{k_\alpha}+1} \subseteq C_{q_{k_\alpha}} \subseteq \cdots \subseteq C_2 = Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha).$$

2. *La codimension du sous-espace C_p dans C_{p-1} est égale au nombre des q_i égaux à $p-2$, c'est-à-dire*

$$\dim C_{p-1} - \dim C_p = \operatorname{card}\{1 \leqslant i \leqslant k_\alpha \mid q_i = p-2\}\,,\ \forall\, p \geqslant 3\,.$$

La suite descendante des sous-espaces vectoriels $(C_p)_{p\geqslant 2}$ ainsi décrite nous permet donc de retrouver la décomposition du module d'Alexander à cœfficients complexes du nœud.

Remarquons qu'une correction de $U \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ par un cobord se traduit par une conjugaison de $\rho_n^{(U,v_2,\ldots,v_{n-1})}$ et posons

$$\overline{C}_n = \{\{U\} \in H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \mid \exists\ (v_2, \ldots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2},$$
$$\rho_n^{(U,v_2,\ldots,v_{n-1})} \in \operatorname{Hom}(\pi, G_n)\}\,.$$

Alors, on a:

Corollaire 1.3. —

1. *L'espace vectoriel $\overline{C}_n$ est non réduit à zéro si et seulement s'il existe $1 \leqslant i \leqslant k_\alpha$ tel que $q_i \geqslant n-1$.*
2. *Dans la filtration de l'espace de la première classe de cohomologie $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, on a:*

$$\{0\} = \overline{C}_{q_{k_\alpha}+2} \subsetneq \overline{C}_{q_{k_\alpha}+1} \subseteq \overline{C}_{q_{k_\alpha}} \subseteq \cdots \subseteq \overline{C}_2 = H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)\,.$$

3. *La codimension du sous-espace $\overline{C}_p$ dans $\overline{C}_{p-1}$ est égale au nombre des q_i égaux à $p-2$, c'est-à-dire*

$$\dim \overline{C}_{p-1} - \dim \overline{C}_p = \operatorname{card}\{1 \leqslant i \leqslant k_\alpha \mid q_i = p-2\}\,,\ \forall\, p \geqslant 3\,.$$

Les représentations ρ_n^V sont métabéliennes, c'est-à-dire leurs restrictions au deuxième sous-groupe des commutateurs $\pi'' = [\pi', \pi']$ sont triviales. Un travail récent de [BF08] a porté sur la classification des représentations métabéliennes irréductibles du groupe d'un nœud dans $SL(n, \mathbb{C})$ et $GL(n, \mathbb{C})$.

Remarque 1.4. — La matrice $\rho_n^V(\gamma)$, pour γ dans π, est un système de définition du produit de Massey $< U, \underbrace{h_1, \ldots, h_1}_{(n-2)} >$ (voir [Kra66] et [FS87]).

L'ensemble $\overline{C}_n$ peut être défini en fonction du produit de Massey :

$$\overline{C}_n = \{\{U\} \in H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \mid < U, \underbrace{h_1, \ldots, h_1}_{(n-2)} >= 0\}\,.$$

2. Équations d'obstruction

Soient Γ un groupe de présentation finie et M un Γ-module à gauche. L'espace des n-cochaînes $C^n(\Gamma, M)$ du groupe Γ dans le module M, pour $n \geqslant 0$, est par définiton l'espace des fonctions f de Γ^n dans M. L'opérateur δ: $C^n(\Gamma, M) \to C^{n+1}(\Gamma, M)$ est donné en petites dimensions par [Bro82]:

$$\delta a(\gamma) = \gamma \cdot a - a, \quad \forall a \in M,$$

$$\delta f(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 \cdot f(\gamma_2) - f(\gamma_1\gamma_2) + f(\gamma_1), \quad \forall f \in C^1(\Gamma, M).$$

Si U désigne un cocycle dans $Z^i(\Gamma, M)$, $i \geqslant 1$, on notera par $\{U\}$ sa classe de cohomologie dans $H^i(\Gamma, M)$.

Soient α, $\beta \in \mathbb{C}^*$, les Λ-modules $\mathbb{C}_\alpha$ et $\mathbb{C}_\beta$ sont munis de la structure de π-modules via la projection $\pi \twoheadrightarrow T$ et l'action est donnée par

$$\gamma \cdot z = \alpha^{|\gamma|} z, \quad \forall\, \gamma \in \pi \text{ et } \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Si $f \in C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et $g \in C^1(\pi, \mathbb{C}_\beta)$ désignent deux cochaînes à valeurs dans les π-modules $\mathbb{C}_\alpha$ et $\mathbb{C}_\beta$, alors on notera $f \cup g \in C^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha\beta})$ leur produit-cup donné par :

$$f \cup g(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1)\beta^{|\gamma_1|} g(\gamma_2), \; \gamma_1, \; \gamma_2 \in \pi.$$

Notons N_m le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre m avec 1 sur la diagonale. Le groupe N_m étant un groupe de Lie nilpotent, toutes les représentations de π à valeurs dans N_m sont abéliennes. Ce résultat peut être retrouvé en utilisant un résultat classique de Milnor [Mil54]. En effet, Milnor montre que la suite centrale descendante du groupe d'un nœud est stationnaire. Plus précisément, il montre que $\mathcal{C}^k\pi = \mathcal{C}^1\pi = \pi'$, pour tout $k \geqslant 1$, où $(\mathcal{C}^k\pi)_{k\geqslant 0}$ désigne la suite centrale descendante de π.

Puisque $\pi/\pi' \simeq T = \langle t | - \rangle$, toute représentation abélienne se factorise par T et est complètement déterminée par la donnée de l'image de μ. Considérons ϕ_m: $\pi \to N_m$ l'homomorphisme abélien défini par

$$\phi_m(\gamma) = \begin{pmatrix} h_0(\gamma) & h_1(\gamma) & h_2(\gamma) & \cdots & h_{m-1}(\gamma) \\ 0 & h_0(\gamma) & h_1(\gamma) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & h_2(\gamma) \\ \vdots & & \ddots & h_0(\gamma) & h_1(\gamma) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_0(\gamma) \end{pmatrix}$$

et

$$\phi_m(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_m + \mathcal{N}_m$$

où I_m désigne la matrice identité. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\phi_m(\mu^k) = (I_m + \mathcal{N}_m)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \mathcal{N}_m^p = \sum_{p=0}^{k} h_p(\mu^k)\mathcal{N}_m^p \tag{2.1}$$

où $\binom{k}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, désigne le cœfficient binomial défini par

$$\binom{k}{0} := 1 \text{ et } \binom{k}{p} := \frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!} \in \mathbb{Z}\,.$$

Les applications $h_p \colon \pi \to \mathbb{C}$, $p \geqslant 1$, sont solutions des équations d'obstruction :

$$\delta h_p + \sum_{i=1}^{p-1} h_i \cup h_{p-i} = 0$$

et $h_0 \in \mathrm{Hom}(\pi, \mathbb{C}^*)$.

Soit $n \geqslant 2$ et soit $\rho_n^V \colon \pi \to G_n$ définie par

$$\rho_n^V(\gamma) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{|\gamma|} & V(\gamma) \\ \hline 0 & \phi_{n-1}(\gamma) \end{array}\right)$$

Alors, ϕ_{n-1} étant un homomorphisme abélien, une telle représentation ρ_n^V, lorsqu'elle existe, est métabélienne, c'est-à-dire sa restriction au deuxième sous-groupe des commutateurs $\pi'' = [\pi', \pi']$ est triviale. En effet, pour le prouver, il suffit de vérifier que $\rho_n^V|_{\pi'}$ est abélienne. Or, pour tout $\gamma \in \pi'$, $\rho_n^V(\gamma)$ est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

car la représentation obtenue à partir de ρ_n^V en supprimant la première ligne et la première colonne est abélienne et deux matrices de cette forme commutent. Donc ρ_n^V est métabélienne.

Maintenant, une condition nécessaire et suffisante pour que ρ_n^V soit un homomorphisme se traduit par $\rho_n^V(\gamma_1\gamma_2) = \rho_n^V(\gamma_1)\rho_n^V(\gamma_2)$, pour tous $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \pi$, et est équivalente à

$$V(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}V(\gamma_2) + V(\gamma_1)\phi_{n-1}(\gamma_2)\,, \quad \forall\ \gamma_1, \gamma_2 \in \pi. \tag{2.2}$$

On en déduit que C_n est un sous-espace vectoriel de $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. De plus, remarquons que s'il existe $b_0 \in C^0(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ tel que $v_1 = \delta b_0$, alors $v_i = -b_0 \cup h_{i-1}$, pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$, donne un $(n-1)$-uplet $V = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ solution de (2.2). Donc C_n est un sous-espace vectoriel de $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ qui contient l'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$.

La condition d'homomorphie (2.2) de ρ_n^V est équivalente au système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{l} v_1 \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ -\delta v_i = \displaystyle\sum_{p=1}^{i-1} v_p \cup h_{i-p} \quad ,\forall\ 2 \leqslant i \leqslant n-1 \end{array}\right.$$

(voir aussi [FS87]).

En conclusion, nous cherchons un vecteur $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ de l'espace vectoriel $(C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-1}$ vérifiant

$$\delta v_i + \sum_{p=1}^{i-1} v_p \cup h_{i-p} = 0, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.3}$$

Comme $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 0$ si et seulement si $\Delta_K(\alpha) \neq 0$ [BA00, prop. 2.1], un tel vecteur existe lorsque α n'est pas racine du polynôme d'Alexander. Dans le cas où α est racine du polynôme d'Alexander du nœud, nous utiliserons le résultat suivant pour la résolution des équations d'obstruction.

Proposition 2.1. — *Soit $n \geqslant 2$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}$ une racine du polynôme d'Alexander du nœud.*

Alors, il existe un uplet $V = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ vrifiant (2.3) si et seulement s'il existe une famille d'homomorphismes de groupes

$$\varphi_i \colon \pi'/\pi'' \to (\mathbb{C}, +), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

vérifiant

$$\varphi_i(\mu^k y \mu^{-k}) = \alpha^k \sum_{p=1}^{i} \binom{-k}{i-p} \varphi_p(y), \forall\ y \in \pi'/\pi'' \ \text{ et } \forall\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.4}$$

Preuve. — Commençons par remarquer que l'équation (2.4) peut se mettre sous la forme matricielle

$$\Phi(\mu^k y \mu^{-k}) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}\,, \quad \forall\, y \in \pi'/\pi'' \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

où Φ désigne le vecteur ligne $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$: $\pi'/\pi'' \to \mathbb{C}^{n-1}$ et $J_{n-1} := \phi_{n-1}(\mu)$ désigne la matrice introduite au début de ce paragraphe.

Supposons que V existe. Rappelons que s'il existe $b_0 \in C^0(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ tel que $v_1 = \delta b_0$ alors $v_i = -b_0 \cup h_{i-1}$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, donne une famille de 1-cochaînes vérifiant (2.3). Plus généralement, si $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$ et si $v_k = \delta b_0$, alors $v_{k+i} = -b_0 \cup h_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, donne une telle famille. Donc nous pouvons supposer que $v_i(\mu) = 0$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Chacune des cochaînes v_i (resp. h_i) est métabélienne donc elle passe au quotient par π'' et définit ainsi une 1-cochaîne de π'/π'' à valeurs dans $\mathbb{C}_\alpha$ (resp. $\mathbb{C}$). Considérons, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les applications $\varphi_i = v_i|_{\pi'/\pi''}$. Comme V vérifie (2.2), pour tout $\gamma \in \pi'$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} V(\mu^k \gamma \mu^{-k}) &= \alpha^k V(\mu^{-k}) + V(\mu^k \gamma)\phi_{n-1}(\mu^{-k}) \\ &= (\alpha^k V(\gamma) + V(\mu^k)\phi_{n-1}(\gamma))\phi_{n-1}(\mu^{-k}) \\ &= \alpha^k V(\gamma)\phi_{n-1}(\mu^{-k})\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\Phi(\mu^k [\gamma] \mu^{-k}) = \alpha^k \Phi([\gamma])\phi_{n-1}(\mu^{-k})\,,$$

où $[\gamma]$ désigne la classe de γ dans π'/π''.

Réciproquement, supposons qu'il existe une famille d'homomorphismes de groupes φ_i: $\pi'/\pi'' \to \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, telles que $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ vérifie (2.5) et posons

$$V(\gamma t^k) = \Phi([\gamma]) J_{n-1}^k\,, \quad \forall\, \gamma \in \pi' \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Alors, pour tous $(\gamma_1 t^{k_1}), (\gamma_2 t^{k_2}) \in \pi' \rtimes T$, on a :

$$\begin{aligned} V((\gamma_1 t^{k_1})(\gamma_2 t^{k_2})) &= V((\gamma_1 + t^{k_1}\gamma_2) t^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1 + t^{k_1}\gamma_2])\phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= (\Phi([\gamma_1]) + \Phi(t^{k_1}[\gamma_2]))\phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1])\phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) + \Phi(t^{k_1}[\gamma_2])\phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1])\phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) + \alpha^{k_1}\Phi([\gamma_2])\phi_{n-1}(\mu^{k_2}) \\ &= V(\gamma_1 t^{k_1})\phi_{n-1}(\mu^{k_2}) + \alpha^{k_1} V(\gamma_2 t^{k_2})\,. \end{aligned}$$

Ainsi V vérifie (2.2). □

3. Décomposition du module d'Alexander

Dans ce paragraphe, nous utilisons les sous-espaces vectoriels C_n pour retrouver la décomposition du module d'Alexander à cœfficients complexes du nœud. Notons qu'un raisonnement analogue à celui que nous présentons dans la suite de ce paragraphe a été, récemment, utilisé par [BF08] pour montrer l'existence des représentations métabéliennes réductibles fidèles du groupe du nœud dans $GL(n,\mathbb{C})$.

D'après [BZ85] et [Gor78], le premier groupe d'homologie $H_1(X^\infty,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, qui est isomorphe à $\pi'/\pi''\otimes\mathbb{C}$. Ce dernier peut être muni de la structure de Λ-module via l'action

$$t\cdot(y\otimes z)=(\mu y\mu^{-1})\otimes z\,,\quad \forall\ y\in\pi'/\pi''\ \text{ et } \forall\ z\in\mathbb{C}\,.$$

Rappelons que le module d'Alexander à cœfficients complexes d'un nœud K de S^3 se décompose sous la forme

$$H_1(X^\infty,\mathbb{C})=\bigoplus_{\Delta_K(\beta)=0}\tau_\beta,\ \text{avec}\ \tau_\beta=\bigoplus_{i=1}^{k_\beta}\tau_\beta^i,\ \text{et}\ \tau_\beta^i=\frac{\Lambda}{(t-\beta)^{q_i}},\ q_i\in\mathbb{N}^*.$$

Supposons maintenant que α est une racine du polynôme d'Alexander. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi'/\pi''\otimes\mathbb{C},\mathbb{C}_\alpha)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi'/\pi'',\mathbb{C}_\alpha)$, les applications φ_i décrites dans la proposition 2.1 définissent, par extension des scalaires, des applications $\mathbb{C}$-linéaires $\varphi_i\colon\pi'/\pi''\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}_\alpha$ vérifiant (2.4).

Le but des deux lemmes suivants est d'établir un lien entre l'existence des applications φ_i décrites dans la proposition 2.1 et les puissances q_i.

Lemme 3.1. — *Soit $n\geqslant 2$.*

Soit $\varphi_i\colon\pi'/\pi''\otimes\mathbb{C}\to\mathbb{C}_\alpha$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, une famille d'applications $\mathbb{C}$-linéaires vérifiant (2.4) et soit $\tau=\dfrac{\Lambda}{(t-\alpha)^q}$.

Si $q\leqslant n-2$, alors $\varphi_1|_\tau\equiv 0$.

Preuve. — Notons $\Phi:=(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$, alors Φ vérifie (2.5), pour tout $y\in\pi'/\pi''\otimes\mathbb{C}$,

$$\Phi((t-\alpha)\cdot y)=\alpha\Phi(y)(J_{n-1}^{-1}-I_{n-1})$$

et pour tout $y\in\tau$,

$$0=\Phi((t-\alpha)^q\cdot y)=\alpha^q\Phi(y)(J_{n-1}^{-1}-I_{n-1})^q\,.$$

Supposons que $q < n-1$, alors la $(q+1)$-ième composante de $\alpha^q \Phi(y)$ $(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^q$ est donnée par $(-\alpha)^q \varphi_1(y)$. D'où le résultat. □

Lemme 3.2. — *Soit* $q \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $\tau = \dfrac{\Lambda}{(t-\alpha)^q}$, *alors, pour tout* $2 \leqslant n \leqslant q+1$, *il existe une famille d'applications* $\mathbb{C}$*-linéaires* $\varphi_i \colon \tau \to \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, *vérifiant (2.4), avec* $\varphi_1 \neq 0$.

Preuve. — Il suffit de montrer qu'il existe un vecteur ligne $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \colon \tau \to \mathbb{C}^{n-1}$ qui vérifie (2.5).

Soit n un entier tel que $2 \leqslant n \leqslant q+1$ et soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\colon \tau \to \mathbb{C}^{n-1}$ donnée par :

$$\begin{cases} \Phi(e_0) = (1, 0, \dots, 0) \\ \Phi(e_j) = \alpha^j \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^j \ , \ \forall\ 1 \leqslant j \leqslant q-1 \end{cases}$$

et prolongée par $\mathbb{C}$-linéarité sur τ, où $\{e_j = [(t-\alpha)^j];\ j = 0, \dots, q-1\}$ désigne une $\mathbb{C}$-base de τ.

Remarquons que Φ est bien définie puisque $q \geqslant n-1$ et pour tout $y \in \tau$,

$$\Phi((t-\alpha)^q \cdot y) = \alpha^q \Phi(y)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^q = 0\,.$$

Soit $0 \leqslant j \leqslant q-2$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(t \cdot e_j) &= \Phi(e_{j+1} + \alpha e_j) \\ &= \alpha^{j+1} \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^j J_{n-1}^{-1} \\ &= \alpha \Phi(e_j) J_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(t \cdot e_{q-1}) &= \alpha \Phi(e_{q-1}) \\ &= \alpha^q \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^{q-1} \\ &= \alpha^q \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^{q-1} J_{n-1}^{-1} \\ &= \alpha \Phi(e_{q-1}) J_{n-1}^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Phi(t \cdot e_j) = \alpha \Phi(e_j) J_{n-1}^{-1}\,, \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant q-1$$

et

$$\Phi(t^k \cdot y) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}\,, \quad \forall\ y \in \tau \ \text{ et } \forall\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Donc Φ vérifie (2.5). □

Nous avons vu, dans la proposition 2.1, qu'il y a une correspondance entre les Λ-homomorphismes de $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{C}_\alpha$ et le premier groupe de cohomologie $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) &\simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\alpha) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha, \mathbb{C}_\alpha) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k_\alpha} \mathrm{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha^i, \mathbb{C}_\alpha). \end{aligned}$$

Donc une base de $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est donnée par $B = (\{U_1\}, \ldots, \{U_{k_\alpha}\})$, où U_i: $H_1(X^\infty, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant k_\alpha$ est un générateur de $\mathrm{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha^i, \mathbb{C}_\alpha)$. Par abus de notation, nous confondrons $\{U_i\}$ avec le Λ-homomorphisme correspondant. Nous pouvons alors présenter la démonstration du théorème 1.1 :

Preuve du théorème 1.1. — Soit $n \geqslant 2$. Pour démontrer le théorème 1.1, nous allons prouver que

$$C_n = B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \oplus \mathrm{Vect}\{U_i \mid q_i \geqslant n-1\}.$$

Soit U un cocycle de π dans $\mathbb{C}_\alpha$ appartenant à C_n, alors, il existe un homomorphisme de groupes $\rho_n^{(U, v_2, \ldots, v_{n-1})}$ de π dans G_n tel que

$$\rho_n^{(U, v_2, \ldots, v_{n-1})}(\gamma) = \left(\begin{array}{c|cccc} \alpha^{|\gamma|} & U(\gamma) & v_2(\gamma) & \ldots & v_{n-1}(\gamma) \\ \hline 0 & & \phi_{n-1}(\gamma) & & \end{array}\right), \ \gamma \in \pi.$$

D'après la proposition 2.1, l'existence des cochaînes v_j, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, est équivalente à l'existence des applications $\mathbb{C}$-linéaires φ_j: $\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\alpha$ telles que

$$\varphi_j(t^k \cdot y) = \alpha^k \sum_{p=1}^{j} \binom{-k}{j-p} \varphi_p(y) \ , \ \forall\, k \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \varphi_1 = \{U\}$$

D'autre part, $\exists\ (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k_\alpha} \in \mathbb{C}^{k_\alpha}$ tel que $\{U\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_\alpha} \lambda_i \{U_i\}$.

Soit $1 \leqslant i_0 \leqslant k_\alpha$ tel que $q_{i_0} < n-1$, alors d'après le lemme 3.1:

$$\{U\}(y) = 0, \ \forall\, y \in \tau_\alpha^{i_0}.$$

C'est-à-dire $\lambda_{i_0}\{U_{i_0}\}(y) = 0$, $\forall\, y \in \tau_\alpha^{i_0}$ car $\{U_i\}|_{\tau_\alpha^j} \equiv 0$, $\forall\, i \neq j$.
D'où $\lambda_{i_0} = 0$.

Réciproquement, soit $i \in \{1, \ldots, k_\alpha\}$ tel que $q_i \geqslant n-1$. D'après la proposition 2.1, pour montrer que $U_i \in C_n$, il suffit de montrer que, pour tout $2 \leqslant j \leqslant n-1$, il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi_j \colon \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\alpha$ telle que

$$\varphi_j(t^k \cdot y) = \alpha^k \sum_{p=1}^{j} \binom{-k}{j-p} \varphi_p(y), \ \forall\, k \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \varphi_1 = \{U_i\}$$

Or l'existence de telles applications est assurée par le lemme 3.2. $\square$

4. Exemple du nœud 10_{99}

Le premier exemple, dans le tableau de la classifiaction des nœuds, dont la torsion n'est ni cyclique ni semi-simple est le nœud 10_{99}. La matrice de Seifert du nœud 10_{99} est donnée par

$$V = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(voir http://www.indiana.edu/~knotinfo/) donc une matrice de présentation du module d'Alexander est $A(t) = V^T - tV$, où V^T désigne la matrice transposée de V. Le polynôme d'Alexander du nœud 10_{99} est donné par $\Delta_{10_{99}}(t) = (t^2 - t + 1)^4$ et ses racines sont $\alpha = e^{i\pi/3}$ et $\alpha^{-1} = e^{-i\pi/3}$.

Soit $n \geqslant 3$. Nous cherchons un vecteur ligne $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, où les $\varphi_j \colon \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, sont des applications $\mathbb{C}$-linéaires telles que

$$\Phi(t^k \cdot y) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall\, y \in \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \ \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Comme Λ-module, le module d'Alexander à cœfficients complexes du nœud 10_{99} est isomorphe à $\Lambda^8/(\Lambda^8 A(t))$. Or le module Λ^8 est un Λ-module libre dont la base canonique est donnée par $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 8$. Posons $x_{ij} = \varphi_j(e_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 8$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Alors

$$\Phi(t^k \cdot e_i) = \alpha^k \Phi(e_i) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \forall\, 1 \leqslant i \leqslant 8,$$

où $\Phi(e_i)$ est le vecteur ligne $(x_{i1}, \ldots, x_{i,n-1})$. De plus, pour que Φ définisse une application sur $\Lambda^8/(\Lambda^8 A(t))$ il faut et il suffit que

$$\Phi(\Lambda^8 A(t)) = 0 \tag{4.1}$$

autrement dit,

$$\Phi(t^k e_i A(t)) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \;\text{ et } \forall\, 1 \leqslant i \leqslant 8\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\Phi(t^k e_i(V^T - tV)) &= \alpha^k \Phi(e_i(V^T - \alpha V))J_{n-1}^{-k} \\ &\quad + \alpha^{k+1}\Phi(e_i V)(I_{n-1} - J_{n-1}^{-1})J_{n-1}^{-k}\,.\end{aligned}$$

Donc (4.1) est équivalente à

$$(V^T - \alpha V)\varphi + \alpha V \varphi (I_{n-1} - J_{n-1}^{-1}) = 0\,, \tag{4.2}$$

où $\varphi = (\varphi_j(e_i))_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ 1\leqslant j\leqslant n-1}}$.

– Pour $n = 2$: La condition (4.2) est équivalente au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11} = \alpha x_{51} \\ x_{21} = x_{61} \\ x_{31} = -x_{51} \\ x_{41} = \alpha^2 x_{51} + (\alpha - 1)x_{61} \\ x_{71} = (\alpha - 1)\, x_{61} \\ x_{81} = -\alpha x_{51} \end{array}\right.$$

Il s'en suit que $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 2$, où π est le groupe du nœud 10_{99}.

– Pour $n = 3$: La condition (4.2) est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11} = \alpha x_{51} \\ x_{21} = x_{61} \\ x_{31} = -x_{51} \\ x_{41} = \alpha^2 x_{51} + (\alpha - 1)\, x_{61} \\ x_{71} = (\alpha - 1)\, x_{61} \\ x_{81} = -\alpha x_{51} \\ x_{12} = \alpha x_{51} \\ x_{22} = x_{62} + (-\alpha^2 + 2\alpha)\, x_{51} \\ x_{32} = -2x_{51} \\ x_{42} = (\alpha - 1)\, x_{62} + \alpha^2 x_{61} + (\alpha - 2)\, x_{51} \\ x_{52} = (-2\alpha^2 + \alpha)\, x_{61} + 2x_{51} \\ x_{72} = (\alpha - 1)\, x_{62} + (\alpha - 2)\, x_{51} + \alpha^2 x_{61} \\ x_{82} = (-2 - \alpha^2)\, x_{61} - \alpha x_{51} \end{array}\right.$$

Ceci implique que la $(t-\alpha)$-torsion du module d'Alexander du nœud 10_{99} se décompose sous la forme :

$$\tau_\alpha = \frac{\Lambda}{(t-\alpha)^{q_1}} \oplus \frac{\Lambda}{(t-\alpha)^{q_2}}\,, \quad \text{avec } q_1,\ q_2 \geqslant 2\,.$$

– Pour $n = 4$:

Par un calcul direct, on montre que pour que la condition (4.2) soit satisfaite, il faut que $x_{51} = x_{61} = 0$, autrement dit, il faut que $\varphi_1 \equiv 0$. Par symétrie, nous concluons que le module d'Alexander à cœfficients complexes du nœud 10_{99} se décompose sous la forme :

$$\frac{\Lambda}{(t-\alpha)^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t-\alpha)^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t-\alpha^{-1})^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t-\alpha^{-1})^2}\,.$$

Remerciements. — Cet article est issu de mon travail de thèse. Je tiens à remercier très vivement mes deux directeurs Leila Ben Abdelghani et Michael Heusener pour leur soutien et tous les conseils qu'ils m'ont prodigués. Leurs commentaires, leurs suggestions et leurs critiques m'ont été très précieux et m'ont permis d'améliorer très significativement les résultats que je présente dans ce papier.

Bibliographie

[BA00] Ben Abdelghani (L.). — Espace des représentations du groupe d'un nœud classique dans un groupe de Lie, Ann. Inst. Fourier. (4), 50: p. 1297-1321 (2000).

[BF08] Boden (H. U.), Friedl (S.). — Metabelian $SL(n,\mathbb{C})$-representations of knot groups, arXiv:math.GT/0803.4329.

[Bro82] Brown (K. S.). — Cohomology of Groups. — Springer (1982).

[Bur67] Burde (G.). — Darstellungen von Knotengruppe, Math. Ann., 173:24-33 (1967).

[BZ85] Burde (G.), Zieschang (H.). — Knots, Walter de Gruyter (1985).

[dR67] de Rham (G.). — Introduction aux polynômes d'un nœud, Enseign. Math. (2), 13:187-194 (1967).

[Dwy75] Dwyer (W. G.). — Homology, Massey products and maps between groups, Journal of Pure and Applied Algebra. (6), p. 177-190 (1975).

[FS87] Fenn (R.), Sjerve (D.). — Massey products and lower central series of free groups, Can. J. Math. (2), 39:322-337 (1987).

[Gor78] Gordon (C.M.). — Some aspects of classical knot theory, from: « Knot theory (Proc. Sem. Plans-sur-Bex, 1977) », Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 685:1-60 (1978).

[Kra66] Kraines (D.). — Massey higher products, Trans. Am. Math. Soc. (124), p. 431-449 (1966).

[Mil54] Milnor (J.). — Link groups, Ann. Math. (2), 59:177-195 (1954).

[Mor04] Morishita (M.). — Milnor invariants and Massey products for prime numbers, Compositio. Math. (140), p. 69-83 (2004).