ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

JEAN-MARC RASOAMANANA

Résurgence-sommabilité de séries formelles ramifiées dépendant d'un paramètre et solutions d'équations différentielles linéaires

Tome XIX, nº 2 (2010), p. 303-343.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_2_303_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 2, 2010
pp. 303–343

Résurgence-sommabilité de séries formelles ramifiées dépendant d'un paramètre et solutions d'équations différentielles linéaires

Jean-Marc Rasoamanana[(1)]

Résumé. — Dans cet article, nous établissons le caractère résurgent-sommable de séries formelles ramifiées solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires. Nous analysons d'une part le problème de la dépendance analytique des sommes de Borel de telles séries par rapport aux paramètres de cette classe d'équations différentielles linéaires d'ordre deux, et d'autre part, nous analysons la structure résurgente complète associée à ces séries formelles via l'outil des singularités générales (ou microfonctions). Ceci permet d'étendre des résultats dûs Y. Sibuya dans [31], et également de fournir une illustration du puissant outil qu'est le calcul étranger de J. Ecalle.

Abstract. — In this article, we investigate the Borel-resummable and resurgent properties of formal power series, solutions of a class of linear differential equations. In particular, we study the analytic dependence of the associated Borel sum in the parameters of the equations. We also analyse the whole resurgent structure associated with these formal power series thanks to the tool of microfunctions and the so-called alien derivatives. These analysis allow us to extend some results due to Y. Sibuya in [31], and to illustrate the powerful alien calculus of J. Ecalle.

(*) Reçu le 12/12/2008, accepté le 19/06/2009
(1) Département de Mathématiques, UMR CNRS 6093, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France.
rasoaman@tonton.univ-angers.fr

1. Introduction

1.1. Motivations

La théorie de la sommation de Borel a connu un essor considérable depuis maintenant de nombreuses années, notamment dans le cadre Gevrey ([25], [26], [27]) et en théorie de la résurgence de J. Ecalle ([14], [15], [17], [16]). Pour les problèmes relevant de que l'on appelle la « résurgence équationnelle » en théorie d'Ecalle, des techniques ont été développées avec succès afin d'obtenir, à partir de séries formelles solutions d'équations différentielles, aux q-différences ou aux dérivées partielles, de vraies solutions analytiques de telles équations (voir notamment les travaux de D. Sauzin [19], M.V. Fedoryuk [18], et de O. Costin [6], [7]).

En particulier, la théorie Gevrey-résurgente des équations différentielles linéaires est bien connue, depuis notamment les travaux de J.P. Ramis ([28]), de J. Ecalle ([14], [15], [17], [16]), de F. Pham ([5]), de M. Loday-Richaud ([20], [21]) ou de B. Malgrange ([22]).

Ont aussi été développées des applications à l'étude du spectre de certaines classes d'opérateurs non hermitiens associés à l'équation de Schrödinger unidimentionnelle autonome ; le cas des opérateurs dont le potentiel V satisfait à la relation $V(x) = \overline{V(-\overline{x})}$, appelés opérateurs PT-symétriques, a été étudié dans [9],[12],[13] et [32] (voir [2] et [3] pour les motivations et les applications en physique).

Les finalités de cet article sont multiples : d'une part, il s'agit de démontrer le caractère résurgent-sommable de séries formelles ramifiées dépendant de certains paramètres, solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre deux (voir [10]). En particulier, nous étudions de manière précise la dépendance analytique des sommes de Borel associées en les paramètres de l'équation. D'autre part, il s'agit également ici de contribuer à donner une illustration du puissant outil qu'est le calcul étranger d'Ecalle, avec, en application, une généralisation d'un théorème dû à Y. Sibuya (voir [31]). Nous analysons en outre toute la structure résurgente associée à ces séries formelles en utilisant le langage des singularités générales (ou microfonctions) (voir [30]).

1.2. Problématique et principaux résultats

1.2.1. Phénomène de résurgence

Notation 1.1. — Dans tout l'article, nous notons $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ et $\underline{b} = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$.

Dans cet article, nous considérons, dans le champ complexe, la classe d'équations différentielles linéaires d'ordre deux suivante :

$$Q_n(x,\underline{b})\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = P_m(x,\underline{a})\,\Phi(x), \tag{1.1}$$

où

$$\begin{cases} P_m(x,\underline{a}) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbb{C}[x]\,\text{avec}\, m \in \mathbb{N}^\star, \\ Q_n(x,\underline{b}) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n \in \mathbb{C}[x]\,\text{avec}\, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec la condition $\mathbf{n} - \mathbf{m} < \mathbf{2}$ de sorte que l'infini est un point singulier irrégulier de l'équation (1.1).

L'objet de cet article est l'analyse du phénomène de Stokes de l'équation (1.1) à l'infini via des méthodes résurgentes.

Nous parlons dans cet article de *phénomène de résurgence* lorsqu'une série formelle divergente solution de (1.1)

$$\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]],$$

où q est un entier positif, est telle que son mineur

$$\widetilde{\psi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\Gamma(\frac{k}{q}+1)}\zeta^{\frac{k}{q}} \in \mathbb{C}[[\zeta^{\frac{1}{q}}]]$$

définit une fonction analytique (ramifiée) à l'origine et est *prolongeable sans fin*, c'est-à-dire ici, qu'il se prolonge analytiquement sur le revêtement universel $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}}$ de $\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}$.

Le phénomène de Stokes à l'infini, caractérisé par la divergence de $\psi(z)$, est analysé via les *dérivations étrangères* Δ_ω qui sont des opérateurs mesurant les singularités des déterminations de $\widetilde{\psi}(\zeta)$ aux points singuliers de $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}}$ qui se situent au-dessus de ± 2 (les dérivations étrangères sont exactement les logarithmes de l'automorphisme de Stokes).

1.2.2. Méthode et principaux résultats

Par transformation de Green-Liouville, nous mettons dans un premier temps l'équation (1.1) sous la forme normale suivante :

$$-\frac{d^2}{dz^2}\Psi + (1 - F(z,\underline{a},\underline{b}))\Psi = 0, \tag{1.2}$$

où

$$F(z,\underline{a},\underline{b}) = \frac{(m-n)(m-n+4)}{4(m-n+2)^2 z^2} + O(z^{-2-\frac{2}{m-n+2}}) \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{z^{-\frac{2}{m-n+2}}\} \tag{1.3}$$

est une fonction analytique à l'infini de $z^{\frac{-1}{m-n+2}}$, uniformément en $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$ (avec K compact arbitraire de $\mathbb{C}^m$ et K' compact arbitraire de $\mathbb{C}^n$).

Nous remarquons alors qu'étudier l'équation (1.1) à l'infini dans la variable x revient à étudier l'équation (1.2) à l'infini dans la variable z.

Les résultats obtenus pour l'équation (1.2) dans le cas $m-n$ impair sont résumés dans le théorème suivant (nous obtenons un théorème analogue dans le cas où $m-n$ est pair) :

THÉORÈME 1.2. — *Pour $m-n$ impair, il existe une unique série formelle $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$ (resp. $\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$) dont le terme constant est 1, telle que $e^{-z}\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$ (resp. $e^{+z}\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$) est solution de l'équation (1.2), et de plus :*

$$\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) = \psi_+(\omega^{\frac{m-n+2}{2}} z, \omega.\underline{a}, \omega.\underline{b}). \tag{1.4}$$

Ces séries formelles $\psi_\pm$ sont résurgentes par rapport à z, dépendent holomorphiquement de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$, et sont sommables de Borel[1] *par rapport à z, uniformément par rapport à $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sur tout compact.*
Leur structure résurgente est donnée par :

$$\begin{cases} \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_+(z,\underline{a},\underline{b}) & si \quad k \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_+(z,\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) & si \quad k-1 \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_\tau\psi_\pm = 0 \qquad sinon, \end{cases}$$

où Δ_τ désigne la dérivation étrangère en τ. Les coefficients $S_k(\underline{a},\underline{b})$ sont de plus des fonctions entières en $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

Le fait que les séries $\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$ et $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$ réapparaissent dans leur comportement au voisinage des points singuliers est à l'origine même de la dénomination « résurgence » choisie par J. Ecalle.

1.3. Plan et conventions

1.3.1. Plan de l'article

Pour des raisons techniques, nous allons différencier le cas où $m-n$ est impair (section 2) de celui où $m-n$ est pair (section 3). Par suite, les

(1) Excepté évidemment pour les directions singulières qui sont décrites par la structure résurgente.

démonstrations des résultats majeurs de l'article sont établis pour le cas où $m-n$ est impair, mais nous indiquons de façon précise comment on peut en déduire leurs analogues pour le cas $m-n$ pair.

Dans la section 2.1, après avoir ramené l'équation (1.1) sous une forme normale, nous établissons l'existence de séries formelles ramifiées bien normalisées, solutions de l'équation mise sous forme normale, et à dépendance en les coefficients a et b de (1.1).

Nous montrons ensuite dans la section 2.2 le caractère sommable de Borel de ces séries formelles par rapport à une certaine variable z et nous analysons en détails la dépendance analytique des sommes de Borel correspondantes par rapport aux coefficients a et b de (1.1). Ce résultat permet de généraliser un théorème d'existence dû à Y. Sibuya (voir [31] p.15).

Nous prolongeons alors l'étude dans la section 2.3 pour établir le caractère résurgent de ces séries formelles bien normalisées, et nous décrivons dans la section 2.4 la structure résurgente complète associée par le calcul explicite des dérivations étrangères (en utilisant notamment le formalisme des microfonctions).

1.3.2. Conventions

Dans la suite de l'article, il sera commode de voir x comme un élément du revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ avec 1 comme point base. Puisque ce revêtement peut être identifié à $\mathbb{C}$ par le biholomorphisme $t \mapsto x = e^t$, nous associons à x son argument $\arg(x) \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, dans tout ce qui suit,

$$\sqrt{\frac{P_m(x,\underline{a})}{Q_n(x,\underline{b})}} = x^{\frac{m-n}{2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(\underline{a},\underline{b})\, x^{\frac{m-n}{2}-k}$$

désigne le développement asymptotique à l'infini en x de $\sqrt{\frac{P_m(x,\underline{a})}{Q_n(x,\underline{b})}}$ (on notera que $c_k(\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$).

Notation 1.3. — $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m-n+2}}$ *et pour* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $\underline{z} = (z_1, \cdots, z_k) \in \mathbb{C}^k$,

$$\lambda.\underline{z} := (\lambda z_1, \ldots, \lambda^k z_k).$$

Dans toute la suite, nous supposons que $\underline{a}$ (respectivement $\underline{b}$) est dans compact arbitraire donné $K \subset \mathbb{C}^m$ (respectivement $K' \subset \mathbb{C}^n$).

2. Le cas $m - n$ impair

2.1. Existence de séries formelles « bien normalisées »

2.1.1. Transformation de Green-Liouville et forme normale

Nous considérons la transformation de Green-Liouville :

$$\begin{cases} z = z(x, \underline{a}, \underline{b}) = \displaystyle\int^x \sqrt{\frac{P_m(t, \underline{a})}{Q_n(t, \underline{b})}} dt \\ \\ \Psi(z, \underline{a}, \underline{b}) = \left(\sqrt{\dfrac{P_m(x, \underline{a})}{Q_n(x, \underline{b})}}\right)^{\frac{1}{4}} \Phi(x, \underline{a}, \underline{b}) \end{cases} \tag{2.1}$$

où le développement en série de Laurent-Puiseux en x de $z(x, \underline{a}, \underline{b})$ est donné par

$$z(x, \underline{a}, \underline{b}) = \frac{2}{m-n+2} x^{\frac{m-n+2}{2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k(\underline{a}, \underline{b})}{\frac{m-n+2}{2} - k} x^{\frac{m-n+2}{2} - k} \in x^{\frac{m-n+2}{2}} \mathbb{C}[\underline{a}, \underline{b}]\{x^{-1}\}.$$

Remarquons que par quasi-homogénéité de $P_m(x, \underline{a})$ et de $Q_n(x, \underline{b})$,

$$z(\omega x, \omega.\underline{a}, \omega.\underline{b}) = \omega^{\frac{m-n+2}{2}} z(x, \underline{a}, \underline{b}). \tag{2.2}$$

La transformation (2.1) change (1.1) en l'équation suivante :

$$-\frac{d^2}{dz^2}\Psi + (1 - F(z, \underline{a}, \underline{b}))\Psi = 0, \tag{2.3}$$

qui est notre forme normale désirée.

Il est utile de voir qu'étudier (1.1) à l'infini dans la variable x revient à étudier (2.3) à l'infini dans la variable z. L'application réciproque x : $(z, \underline{a}, \underline{b}) \mapsto x(z, \underline{a}, \underline{b})$ peut être identifiée à son développement en série de Laurent-Puiseux

$$x(z, \underline{a}, \underline{b}) = \left(\frac{m-n+2}{2} z\right)^{\frac{2}{m-n+2}} + O(1) \in z^{\frac{2}{m-n+2}} \mathbb{C}[\underline{a}, \underline{b}]\{z^{-\frac{2}{m-n+2}}\}, \tag{2.4}$$

et elle vérifie, grâce à l'égalité (2.2), la relation :

$$x(\omega^{\frac{m-n+2}{2}} z, \omega.\underline{a}, \omega.\underline{b}) = \omega x(z, \underline{a}, \underline{b}). \tag{2.5}$$

Dans (2.3), $F(z, \underline{a}, \underline{b})$ est définie par :

$$F(z, \underline{a}, \underline{b}) = \Bigg[\frac{5}{16}\frac{\Big(P'(x,\underline{a})Q(x,\underline{b}) - Q'(x,\underline{b})P(x,\underline{a})\Big)^2}{Q(x,\underline{b})P(x,\underline{a})^3} \tag{2.6}$$

$$-\frac{1}{4}\Bigg(\frac{P''(x,\underline{a})Q(x,\underline{b}) - Q''(x,\underline{b})P(x,\underline{a})}{P(x,\underline{a})^2}$$

$$-\frac{2Q'(x,\underline{b})\Big(P'(x,\underline{a})Q(x,\underline{b}) - Q'(x,\underline{b})P(x,\underline{a})\Big)}{Q(x,\underline{b})P(x,\underline{a})^2}\Bigg)\Bigg]\Big|_{x = x(z,\underline{a},\underline{b})}.$$

Nous déduisons de (2.4) que :

$$F(z, \underline{a}, \underline{b}) = \frac{(m-n)(m-n+4)}{4(m-n+2)^2 z^2} + O(z^{-2-\frac{2}{m-n+2}}) \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}[\underline{a}, \underline{b}]\{z^{-\frac{2}{m-n+2}}\} \tag{2.7}$$

est une fonction analytique à l'infini de $z^{\frac{-1}{m-n+2}}$, uniformément en $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$ dans tout compact de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{C}^n$).
Par ailleurs, grâce à la propriété de quasi-homogénéité de P_m, de Q_n, et de (2.5) et (2.6), nous voyons que :

$$F(\omega^{\frac{m-n+2}{2}} z, \omega.\underline{a}, \omega\underline{b}) = F(z, \underline{a}, \underline{b}). \tag{2.8}$$

2.1.2. Solutions formelles

Nous avons alors le lemme immédiat suivant :

Lemme 2.1. — *Il existe une unique solution formelle $\Psi_+(z, \underline{a}, \underline{b})$ de (2.3) satisfaisant à :*

$$\Psi_+(z, \underline{a}, \underline{b}) = e^{-z}\psi_+(z, \underline{a}, \underline{b}), \tag{2.9}$$

où

$$\psi_+(z, \underline{a}, \underline{b}) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k(\underline{a}, \underline{b})}{z^{\frac{k}{m-n+2}+1}} \in \mathbb{C}[\underline{a}, \underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]] \tag{2.10}$$

avec 1 comme terme constant. De plus, le développement en série formelle $\psi_+(z, \underline{a}, \underline{b})$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$-\frac{d^2}{dz^2}\psi_+ + 2\frac{d}{dz}\psi_+ - F(z, \underline{a}, \underline{b})\psi_+ = 0. \tag{2.11}$$

Définissant

$$\psi_-(z, \underline{a}, \underline{b}) = \psi_+(\omega^{\frac{m-n+2}{2}} z, \omega.\underline{a}, \omega\underline{b}), \tag{2.12}$$

nous déduisons l'existence d'une unique solution formelle $\Psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$ de (2.3) telle que $\Psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) = e^z\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$ avec $\psi_- \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$ de terme constant égal à 1. Notons que Ψ_+,Ψ_- sont linéairement indépendantes, de sorte que (Ψ_+,Ψ_-) forme un système fondamental de solutions formelles pour l'équation différentielle linéaire du second ordre (2.3).

2.2. Sommabilité de Borel des séries bien normalisées et application

2.2.1. La 1-sommabilité

Remarque 2.2. — Nos notations seront quelque peu différentes de celles employées par J. Écalle (cf. [4, 5, 8, 14] pour plus de détails).

Nous identifierons de nouveau un élément du revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ (avec 1 comme point base) en spécifiant son argument dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.3. — *Un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $I =]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$ est un ouvert U du revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$ tel que pour tout intervalle ouvert $J \subset I$, il existe $z \in U$ tel que $zJ \subset U$, où zJ désigne le secteur angulaire ouvert de sommet z et d'ouverture J.*

Définition 2.4. — *Si U est un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture I et si Ψ est holomorphe sur U, on dit que Ψ est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini dans U si pour tout intervalle ouvert $J \subset I$, il existe $\tau > 0$ et $C > 0$ tel que*

$$\forall z \in U \cap 0J,\ |\Psi(z)| \leqslant Ce^{\tau|z|}.$$

Nous allons maintenant définir la notion de mineur. Nous le faisons ici uniquement pour une classe de séries formelles utilisées dans cet article (dans les définitions suivantes, il suffit de choisir $q = m-n+2$).

Définition 2.5. — *Considérons la série formelle $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$, où q est un entier positif. Alors, r est le terme constant de ψ et $\widetilde{\psi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\Gamma(\frac{k}{q}+1)}\zeta^{\frac{k}{q}} \in \mathbb{C}[[\zeta^{\frac{1}{q}}]]$ est le mineur de ψ.*

Autrement dit, le mineur d'une série formelle ψ n'est rien d'autre que sa transformée de Borel sans son terme constant.

Ceci nous permet de définir la sommabilité de Borel pour de telles séries formelles.

Définition 2.6. — *La série formelle* $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ *est 1-sommable de Borel dans la direction (d'argument)* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si:*

1. *son mineur* $\widetilde{\psi}(\zeta)$ *définit une fonction analytique (ramifiée) à l'origine*[2],
2. *il existe un secteur ouvert* $0I$ *avec* I *un voisinage ouvert de* α *tel que* $\widetilde{\psi}(\zeta)$ *se prolonge analytiquement dans* $0I$ *et est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini dans* $0I$.

La somme de Borel $\mathrm{s}_\alpha\psi(z)$ *par rapport à* z *dans la direction* $\alpha \in \mathbb{R}$ *de la série formelle* ψ *est définie par*

$$\mathrm{s}_\alpha\psi(z) := r + \int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^{-z\zeta}\widetilde{\psi}(\zeta)d\zeta.$$

Dans la définition 2.6, si l'on omet la condition de croissance à l'infini (condition 2.), alors on dit que ψ est *présommable de Borel* dans la direction α, l'opérateur de sommation s_α étant remplacé par l'opérateur de *présommation* que l'on ne définira pas ici, voir par exemple [8].

Les principales propriétés d'une somme de Borel sont les suivantes :

Proposition 2.7 *[voir par exemple [11] p.432-435]. — Si* $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ *est sommable de Borel dans la direction* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors :*

- *sa somme de Borel* $\mathrm{s}_\alpha\psi(z)$ *est holomorphe dans un voisinage sectoriel de l'infini* U *d'ouverture* $I =]-\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha[$.
- $\mathrm{s}_\alpha\psi(z)$ *est asymptote à* $\psi(z)$ *à l'infini dans* U*. Plus précisément, pour tout sous-intervalle strict* J *de* I*, il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* $N \geqslant 1$*, pour tout* $z \in U \cap 0J$*,* $\left|\mathrm{s}_\alpha\psi(z) - r - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}}\right| \leqslant C^N\Gamma(\frac{N}{q}+1)|z|^{-\frac{N}{q}-1}$.

(2) Pour simplifier, nous gardons la même notation $\widetilde{\psi}(\zeta)$ pour la série et pour sa somme, et ζ doit être vu comme un élément du revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$.

- $\dfrac{d}{dz}\left(\mathrm{s}_\alpha\psi(z)\right)=\mathrm{s}_\alpha\left(\dfrac{d\psi}{dz}(z)\right)$.
- *si deux séries formelles* $\psi(z)$, $\phi(z)\in\mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ *sont sommables de Borel dans la direction* $\alpha\in\mathbb{R}$, *alors* $\mathrm{s}_\alpha\left(\psi.\phi\right)(z)=\mathrm{s}_\alpha(\psi)(z).\mathrm{s}_\alpha(\phi)(z)$.

2.2.2. Premier théorème fondamental

Théorème 2.8. — *Le développement en série formelle* $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})=1+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k(\underline{a},\underline{b})}{z^{\frac{k}{m-n+2}+1}}\in\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$ *(resp.* $\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})=\psi_+(\omega^{\frac{m-n+2}{2}}z,\omega.\underline{a},\omega.\underline{b})$*) est sommable de Borel par rapport à* z*, uniformément en* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *pour* $\underline{a}$ *(respectivement* $\underline{b}$*) dans tout compact de* $\mathbb{C}^m$ *(respectivement* $\mathbb{C}^n$*) , pour toute direction de sommation excepté celles d'argument* $\pi(2\pi)$ *(resp.* $0(2\pi)$*).*

2.2.3. Démonstration du premier théorème fondamental

Cette partie est entièrement consacrée à la démonstration du théorème 2.8.

Grâce à la relation (2.12), il suffit de démontrer le résultat pour la série $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$.

Nous devons analyser les propriétés analytiques ainsi que la croissance à l'infini du mineur

$$\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k(\underline{a},\underline{b})}{\Gamma(\frac{k}{m-n+2}+1)}\zeta^{\frac{k}{m-n+2}}\in\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}]]. \tag{2.13}$$

de $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$ (cf définition 2.6).

Etant donné que le mineur $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ est une fonction multivaluée en $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$, nous allons étudier ses propriétés analytiques sur la surface de Riemann de $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$, désignée par la notation $\mathfrak{C}_{m-n+2}$.

Pour obtenir la 1-sommabilité, il suffit, outre la croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini du mineur $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$, d'étudier ses prolongements analytiques dans le «feuillet principal» de $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}}\times\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$, qui s'identifie à l'ouvert du revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}}\times\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$ consistant à enlever chacune des $m-n+2$ demi-droites au-dessus de $]-\infty,-2]$.

2.2.3.1. Introduction d'un paramètre de perturbation

À cet effet, nous revenons à l'équation (2.11). Au lieu de considérer cette équation différentielle, nous allons plutôt considérer sa déformation,

$$-\frac{d^2}{dz^2}\psi + 2\frac{d}{dz}\psi - F(z,\underline{a},\underline{b}) + \varepsilon F(z,\underline{a},\underline{b})(1-\psi) = 0, \tag{2.14}$$

où ε est un paramètre de perturbation. L'introduction d'un tel paramètre va nous permettre de réécrire ψ_+ et son mineur $\widetilde{\psi}_+$ dans une forme analysable, puisque (2.14) redonne (2.11) quand $\varepsilon = 1$. Nous recherchons maintenant une solution formelle de (2.14) sous la forme d'un développement en série normalisé par rapport à ε:

$$\psi(z,\underline{a},\underline{b},\varepsilon) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(z,\underline{a},\underline{b})\varepsilon^n, \qquad \psi_k \in \frac{1}{z}\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]. \tag{2.15}$$

En introduisant (2.15) dans (2.14) et en identifiant les puissances de ε, nous obtenons :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dz^2}\psi_0 + 2\dfrac{d}{dz}\psi_0 = F(z,\underline{a},\underline{b}) \\[2ex] -\dfrac{d^2}{dz^2}\psi_{k+1} + 2\dfrac{d}{dz}\psi_{k+1} = F(z,\underline{a},\underline{b})\psi_k, \ \ k \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Par transformation de Borel, ce système se traduit en terme des mineurs $\widetilde{\psi}_k(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ des $\psi_k(z,\underline{a},\underline{b})$ par les équations de convolution suivantes :

$$\begin{cases} -\zeta(2+\zeta)\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{F} \\[2ex] -\zeta(\zeta+2)\widetilde{\psi}_{k+1} = \widetilde{\psi}_k * \widetilde{F}, \ \ k \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

où $\widetilde{F}(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ désigne le mineur de $F(z,\underline{a},\underline{b})$, tandis que $*$ désigne le produit de convolution :

$$\widetilde{\psi} * \widetilde{\phi}(\zeta) = \int_0^\zeta \widetilde{\psi}(\eta)\widetilde{\phi}(\zeta-\eta)d\eta.$$

Il s'agit maintenant d'analyser les propriétés analytiques de

$$\widetilde{\psi}(\zeta,\underline{a},\underline{b},\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\psi}_k(\zeta,\underline{a},\underline{b})\varepsilon^n. \tag{2.18}$$

2.2.3.2. Propriétés de la fonction F et conséquences

Le point crucial de cette analyse va venir des propriétés de F.
En écrivant

$$F(z,\underline{a},\underline{b}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k(\underline{a},\underline{b})}{z^{\frac{2k}{m-n+2}+2}} \in \frac{1}{z^2}\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{z^{-\frac{2}{m-n+2}}\}, \tag{2.19}$$

nous savons que

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g_k}{z^{\frac{2k}{m-n+2}+2}} \qquad \text{avec} \qquad g_k = \sup_{\underline{a}\in K,\, \underline{b}\in K'} |f_n(\underline{a},\underline{b})|, \tag{2.20}$$

est une fonction analytique à l'infini de la variable $z^{\frac{-1}{m-n+2}}$. Par conséquent, son mineur

$$\widetilde{G}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g_k}{\Gamma(\frac{2k}{m-n+2}+2)} \zeta^{\frac{2k}{m-n+2}+1} \in \zeta\mathbb{C}\{\zeta^{\frac{2}{m-n+2}}\} \tag{2.21}$$

est une fonction entière de la variable $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$ (avec une croissance exponentielle à l'infini au plus d'ordre 1).

Par suite,

$$\widetilde{F}(\zeta,\underline{a},\underline{b}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k(\underline{a},\underline{b})}{\Gamma(\frac{2k}{m-n+2}+2)} \zeta^{\frac{2k}{m-n+2}+1} \in \zeta\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{\zeta^{\frac{2}{m-n+2}}\}$$

est une fonction holomorphe de $(\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \mathfrak{C}_{m-n+2} \times K \times K'$ telle que :

$$\forall (\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \mathfrak{C}_{m-n+2} \times K \times K',\ |\widetilde{F}(\zeta,\underline{a},\underline{b})| \leqslant \widetilde{G}(|\zeta|). \tag{2.22}$$

En utilisant le fait que $\widetilde{F}$ est une fonction holomorphe de $(\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \mathfrak{C}_{m-n+2} \times K \times K'$ telle que $F(\zeta,\underline{a},\underline{b}) = O(\zeta)$ uniformément en $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$, et en utilisant des propriétés du produit de convolution, nous déduisons facilement de (2.17) que chaque $\widetilde{\psi}_k$ appartient à l'espace $\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}\}$ et peut être prolongé analytiquement à $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}} \times K \times K'$, où $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}}$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}$.

2.2.3.3. Construction d'une série majorante convenable et applications

Pour $0 < \rho < 2$, nous définissons maintenant le domaine étoilé

$$\Omega_m(\rho) = \{\zeta \in \mathfrak{C}_{m-n+2},\ |\dot{\zeta}+2| > \rho,\ \forall \zeta_1 \in [0,\zeta],\ |\dot{\zeta}_1+2| > \rho\} \subset \mathfrak{C}_{m-n+2} \tag{2.23}$$

où $\dot{\zeta}$ désigne la projection de ζ par l'application naturelle $\mathfrak{C}_{m-n+2} \to \mathbb{C}$.

Nous introduisons la suite de fonctions analytiques $h_k(\zeta)$ définie pour $\zeta \in \mathfrak{C}_{m-n+2}$ par :

$$\begin{cases} \rho\zeta\widetilde{h}_0 = \widetilde{G} \\ \\ \rho\zeta\widetilde{h}_{k+1} = \widetilde{h}_k * \widetilde{G},\ \ k \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

En comparant (2.24) à (2.17), et en utilisant (2.22), nous obtenons le lemme suivant :

LEMME 2.9. —

$$\forall (\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in \Omega_m(\rho) \times K \times K',\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ |\widetilde{\psi}_k(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \widetilde{h}_k(|\zeta|). \tag{2.25}$$

Démonstration. — Ceci se montre par une récurrence facile. Nous détaillons juste ici le cas $k = 0$ et le cas $k = 1$.

Pour tout $(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in (\Omega_m(\rho)\backslash\{0\}) \times K \times K'$ nous avons dans un premier temps :

$$|\widetilde{\psi}_0(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| = \frac{|\widetilde{F}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})|}{|\zeta||\zeta+2|} \leqslant \frac{\widetilde{G}(|\zeta|)}{|\zeta|\rho} = \widetilde{h}_0(|\zeta|),$$

et cette inégalité s'étend à $\zeta = 0$ par continuité. Cela prouve (2.25) pour $k = 0$.

Par suite, pour tout $(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in (\Omega_m(\rho)\backslash\{0\}) \times K \times K'$:

$$|\widetilde{\psi}_1(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| = \frac{|\widetilde{F} * \widetilde{\psi}_0(\zeta, \underline{a}, \underline{b})|}{|\zeta||\zeta+2|} \leqslant \frac{|\int_0^\zeta \widetilde{F}(\eta, \underline{a}, \underline{b})\widetilde{\psi}_0(\zeta-\eta, \underline{a}, \underline{b})d\eta|}{|\zeta|\rho}.$$

En écrivant $\zeta = |\zeta|e^{i\theta}$ et en faisant le changement de variable $\eta = te^{i\theta}$, nous obtenons :

$$\left|\int_0^\zeta \widetilde{F}(\eta, \underline{a}, \underline{b})\widetilde{\psi}_0(\zeta-\eta, \underline{a}, \underline{b})d\eta\right| = \left|\int_0^{|\zeta|} \widetilde{F}(te^{i\theta}, \underline{a}, \underline{b})\widetilde{\psi}_0((|\zeta|-t)e^{i\theta}, \underline{a}, \underline{b})dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^{|\zeta|} |\widetilde{F}(te^{i\theta}, \underline{a}, \underline{b})|.|\widetilde{\psi}_0((|\zeta|-t)e^{i\theta}, \underline{a}, \underline{b})|dt \leqslant \int_0^{|\zeta|} \widetilde{G}(t)\widetilde{h}_0(|\zeta|-t)dt = \widetilde{G}*\widetilde{h}_0(|\zeta|).$$

Par conséquent, pour tout $(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in (\Omega_m(\rho)\backslash\{0\}) \times K \times K'$,

$$|\widetilde{\psi}_1(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \frac{\widetilde{G} * \widetilde{h}_0(|\zeta|)}{|\zeta|\rho} = \widetilde{h}_1(|\zeta|).$$

Cela donne (2.25) pour $k = 1$ par un argument de continuité. $\square$

Désormais, $\widetilde{h}(\zeta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{h}_k(\zeta)\varepsilon^k$ n'est rien d'autre que le mineur du développement en série $h(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(z)\varepsilon^n$, où les h_k sont définis récursivement par :

$$\begin{cases} -\rho \dfrac{d}{dz} h_0 = G \\ \\ -\rho \dfrac{d}{dz} h_{k+1} = h_k G, \ k \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Ceci signifie que h satisfait à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$-\rho \frac{d}{dz} h = \varepsilon G(z) h + G(z). \tag{2.27}$$

De (2.20), nous voyons que G est intégrable à l'infini, de sorte que la fonction

$$(z, \varepsilon) \mapsto \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{+\infty}^{z} G(z')dz'} - 1}{\varepsilon} \tag{2.28}$$

est une solution de l'équation (2.27) holomorphe pour z dans un voisinage de l'infini de la surface de Riemann de $z^{\frac{1}{m-n+2}}$ et $\varepsilon \in D(0, R)$, $R > 1$.

En outre, son développement en série de Taylor en $\varepsilon = 0$ est exactement $h(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(z)\varepsilon^k$. Par suite, en posant :

$$\mathcal{G}(z) = \int_{+\infty}^{z} G(z')dz' \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-\frac{2}{m-n+2}}\},$$

nous en déduisons que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ h_k(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{\rho^{k+1}} \frac{1}{(k+1)!} \mathcal{G}^{k+1}(z). \tag{2.29}$$

Comme $\mathcal{G}$ est une fonction analytique à l'infini de la variable $z^{-\frac{2}{m-n+2}}$, nous en déduisons que son mineur $\widetilde{\mathcal{G}}$ est une fonction entière de la variable

$\zeta^{\frac{2}{m-n+2}}$, avec au plus une croissance exponentielle à l'infini d'ordre 1 en $\zeta \in \mathfrak{C}_{m-n+2}$: il existe $(c, B_0) \in]0, +\infty[^2$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathfrak{C}_{m-n+2}$, on ait

$$|\widetilde{\mathcal{G}}(\zeta)| \leqslant c e^{B_0|\zeta|}. \tag{2.30}$$

De (2.29) et (2.30), nous déduisons alors les majorations suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |\widetilde{h}_k(\zeta)| = \left| \frac{1}{\rho^{k+1}(k+1)!} \widetilde{\mathcal{G}}^{*(k+1)}(\zeta) \right| \leqslant \frac{c^{k+1}|\zeta|^k}{\rho^{k+1}(k+1)!\, k!}\, e^{B_0|\zeta|}. \tag{2.31}$$

Nous obtenons donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |\widetilde{h}_k(\zeta)| \leqslant \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{c}{\rho}\right)^{k+1} e^{B|\zeta|} \tag{2.32}$$

avec $B = B_0 + 1 > 0$.

Nous en déduisons finalement que $\widetilde{h}(\zeta, \varepsilon)$ définit une fonction holomorphe en $(\zeta, \varepsilon) \in \mathfrak{C}_{m-n+2} \times D(0, R)$, avec une croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini en ζ, uniformément en $\varepsilon \in D(0, R)$ et plus précisément qu'il existe $A, B \in]0, +\infty[$ tels que

$$\forall (\zeta, \varepsilon) \in \mathfrak{C}_{m-n+2} \times D(0, R), \quad |\widetilde{h}(\zeta, \varepsilon)| \leqslant A e^{B|\zeta|}.$$

2.2.3.4. Conclusion

Ce dernier résultat, mis avec (2.25), montre que le développement en série $\widetilde{\psi}(\zeta, \underline{a}, \underline{b}, \varepsilon) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\psi}_k(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \varepsilon^k$ converge uniformément pour ζ sur tout compact de $\Omega_m(\rho)$, $\underline{a} \in K$, $\underline{b} \in K'$ et $\varepsilon \in D(0, R)$, et de plus,

$$\forall (\zeta, \underline{a}, \underline{b}, \varepsilon) \in \Omega_m(\rho) \times K \times K' \times D(0, R), \quad |\widetilde{\psi}(\zeta, \underline{a}, \underline{b}, \varepsilon)| \leqslant \widetilde{h}(|\zeta|, |\varepsilon|) \leqslant A e^{B|\zeta|}.$$

En faisant $\varepsilon = 1$, nous déduisons le même résultat pour $\widetilde{\psi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})$: holomorphie en $\Omega_m(\rho) \times K \times K'$, croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini en ζ, uniformément en $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$.

Puisque $\rho > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, nous avons montré que, excepté pour les directions d'argument $\alpha = \pi (2\pi)$, il n'y a pas de singularités sur la demi-droite $\arg \zeta = \alpha$ et, $\widetilde{\psi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})$ ayant une croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini en ζ, uniformément en $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$, nous déduisons que $\psi_+(z, \underline{a}, \underline{b})$ est sommable de Borel par rapport à z, uniformément en $\underline{a}$ et $\underline{b} \in K'$ pour $\underline{a}$ (respectivement $\underline{b}$) dans tout compact de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{C}^n$), pour toute direction de sommation excepté celles d'argument π mod (2π).

Grâce à (2.12), un résultat analogue peut être obtenu pour $\psi_-(z, \underline{a}, \underline{b})$. Le théorème 2.8 est démontré.

2.2.4. Application

Le théorème précédent permet d'établir le théorème fondamental d'existence 2.10, qui peut être vu comme une adaptation d'un théorème classique dû à Sibuya ([31], p.15 ; voir aussi [23] et [1]). Il affirme l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle autonome

$$(\mathfrak{E}_m) \qquad x^2 \frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = P(x, \underline{a})\,\Phi(x),$$

définie par son développement asymptotique à l'infini.

Théorème 2.10. —

1. L'équation différentielle $(\mathfrak{E}_m)$ admet une unique solution $\Phi_0(x, \underline{a})$ satisfaisant à la condition suivante :

Φ_0 est une fonction analytique de x dans le secteur $\Sigma_0 = \{|x| > 0, |\arg(x)| < \frac{3\pi}{m}\}$ telle que, dans tout sous-secteur strict[3] de Σ_0, Φ_0 admet un développement asymptotique à l'infini de la forme [4]

$$T\Phi_0(x, \underline{a}) = x^{r(\underline{a})} e^{-S(x,\underline{a})} \phi_0(x, \underline{a}),$$

uniformément par rapport à $\underline{a}$ sur tout compact de $\mathbb{C}^m$; nous avons noté :

$$\begin{cases} T \text{ est l'opérateur "développement asymptotique"}, \\ r(\underline{a}) \in \mathbb{C}, \\ S(x, \underline{a}) \in \mathbb{C}[\underline{a}][x^{\frac{1}{2}}], \\ \phi_0 \in \mathbb{C}[\underline{a}][[x^{-\frac{1}{2}}]]. \end{cases}$$

Plus précisément, nous avons les formules suivantes :

---

(3) Nous désignons par sous-secteur strict de Σ_0 un secteur Σ_0^δ de la forme $\Sigma_0^\delta = \{|x| > 0, |\arg(x)| \leqslant \dfrac{3\pi}{m} - \delta\}$ avec $\delta \in]0, \frac{3\pi}{m}[$.

(4) Dans tout le théorème, $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ avec $\log(x)$ réel pour $\arg(x) = 0$.

i) si m est impair, $$\begin{cases} S(x,\underline{a}) = \dfrac{2}{m}x^{\frac{m}{2}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \dfrac{c_{\frac{m}{2}-k}(\underline{a})}{\frac{m}{2}-k} x^{\frac{m}{2}-k} \in \mathbb{C}[\underline{a}][x^{\frac{1}{2}}] \\ r(\underline{a}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{4} \\ \phi_0 \in \mathbb{C}[\underline{a}][[x^{-\frac{1}{2}}]] \text{ de terme constant } 1. \end{cases}$$

ii) si m est pair, $$\begin{cases} S(x,\underline{a}) = \dfrac{2}{m}x^{\frac{m}{2}} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \dfrac{c_{\frac{m}{2}-k}(\underline{a})}{\frac{m}{2}-k} x^{\frac{m}{2}-k} \in \mathbb{C}[\underline{a}][x] \\ r(\underline{a}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{4} - c_0(\underline{a}) \\ \phi_0 \in \mathbb{C}[\underline{a}][[x^{-1}]] \text{ de terme constant } 1. \end{cases}$$

2. La fonction Φ_0 peut être prolongée analytiquement en x au revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$, et elle est une fonction entière de $\underline{a}$.

3. La dérivée Φ_0' de Φ_0 par rapport à x admet un développement asymptotique à l'infini de la forme :

$$T\left(\frac{d}{dx}\Phi_0(x,\underline{a})\right) = \frac{d}{dx}\left(T\Phi_0(x,\underline{a})\right) = x^{r(\underline{a})+\frac{m}{2}-1}e^{-S(x,\underline{a})}(-1+o(1))$$

lorsque x tend vers l'infini dans tout sous-secteur strict de Σ_0, uniformément par rapport à $\underline{a}$.

Remarque 2.11. — Bien sûr, le développement asymptotique $T\Phi_0(x,\underline{a})$ de Φ_0 à l'infini dans Σ_0 peut être calculé de manière algorithmique. Par exemple, pour $m=3$, nous obtenons (avec Maple) :

$$T\Phi_0(x,\underline{a}) = e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}-a_1x^{1/2}}x^{-\frac{1}{4}}\times$$

$$\left(1+(a_2-\tfrac{1}{4}a_1^2)x^{-1/2}+(-\tfrac{1}{4}a_1^2a_2+\tfrac{1}{32}a_1^4-\tfrac{1}{4}a_1+\tfrac{1}{2}a_2^2)x^{-1}+O(x^{-3/2})\right),$$

et pour $m=4$:

$$T\Phi_0(x,\underline{a}) = e^{(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a_1x)}\,x^{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{8}a_1^2)}\times$$

$$\big(1+(\tfrac{1}{16}a_1^3-\tfrac{1}{4}a_1a_2-\tfrac{1}{4}a_1+\tfrac{1}{2}a_3)x^{-1}+(\tfrac{5}{32}a_1^2-\tfrac{1}{16}a_2^2-\tfrac{1}{64}a_1^4a_2+\tfrac{1}{32}a_1^2a_2^2+\tfrac{5}{32}a_1^2a_2-$$

$$\tfrac{1}{8}a_1a_2a_3+\tfrac{1}{4}a_4-\tfrac{1}{4}a_2-\tfrac{9}{256}a_1^4-\tfrac{1}{4}a_1a_3-\tfrac{3}{16}+\tfrac{1}{512}a_1^6+\tfrac{1}{32}a_1^3a_3+\tfrac{1}{8}a_3^2)x^{-2}+O(x^{-3})\big).$$

Démonstration. — Nous reprenons les notations de la section précédente 2.1.
Ici, $Q(x,\underline{b}) = x^2$ de sorte que $n = 2$ et $\underline{b} = \underline{0}$.

Soit $\phi_0(x,\underline{a}) \in \mathbb{C}[\underline{a}][[x^{-\frac{1}{2}}]]$ définie par la formule suivante :

$$x^{r(\underline{a})}e^{-S(x,\underline{a})}\phi_0(x,\underline{a}) = \frac{\sqrt{x}}{P_m(x,\underline{a})^{\frac{1}{4}}}e^{-z}\psi_+(z,\underline{a},\underline{0})\,|_{z\,=\,z(x,\underline{a},\underline{0})}.$$

Par définition des ψ_+, le membre de gauche de cette égalité est une solution formelle de l'équation $(\mathfrak{E}_m)$.

Nous savons par le théorème 2.8 que $\psi_+(z,\underline{a},\underline{0})$ est sommable de Borel pour la direction d'argument 0. Pour $\underline{a}$ dans un compact K de $\mathbb{C}^m$, cela nous permet de définir la fonction

$$\Phi_0(x,\underline{a}) = \frac{\sqrt{x}}{P_m(x,\underline{a})^{\frac{1}{4}}}e^{-z}\,\mathrm{s}_0\psi_+(z,\underline{a},\underline{0})\,|_{z\,=\,z(x,\underline{a},\underline{0})},$$

qui est une solution analytique de $(\mathfrak{E}_m)$ pour z dans un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\underline{a}$ dans K. Notons que la taille du voisinage sectoriel dépend de K. Par l'application réciproque $z \leftrightarrow x$ (donnée par (2.4)), cela correspond à un voisinage sectoriel de l'infini de la variable x d'ouverture $]-\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{m}[$. Par le théorème 2.8 de nouveau, Φ_0 peut être prolongée analytiquement en variant les directions de sommation sur $]-\pi,\pi[$. Cela montre que Φ_0 est holomorphe dans un voisinage sectoriel de l'infini de la variable x Σ_0' d'ouverture $]-\frac{3\pi}{m},\frac{3\pi}{m}[$ et, par construction, Φ_0 est asymptote à $x^{r(\underline{a})}e^{-S(x,\underline{a})}\phi_0(x,\underline{a})$ à l'infini dans Σ_0', uniformément en $\underline{a} \in K$.
Par ailleurs, l'unicité d'une telle solution Φ_0, parmi les fonctions admettant un développement asymptotique au sens Gevrey, se déduit directement du théorème de Watson (voir [22] p.12).

Par suite, puisque pour tout sous-secteur strict Σ de Σ_0 l'ensemble $\Sigma\backslash\Sigma\cap\Sigma_0'$ est borné, tout ce que nous avons à faire pour obtenir le point 1. du théorème 2.10 est de montrer que Φ_0 peut être prolongée analytiquement en $x \in \Sigma_0$. Ceci est une conséquence du théorème de Cauchy : prenons un point x_0 dans Σ_0' et considérons la donnée $(\Phi_0(x_0,\underline{a}),\Phi_0'(x_0,\underline{a}))$. Alors Φ_0 est uniquement définie par cette condition de Cauchy, qui est holomorphe en $\underline{a} \in K$. Puisque l'équation différentielle linéaire $(\mathfrak{E}_m)$ est holomorphe en $(x,\underline{a}) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$, nous en concluons que Φ_0 peut être prolongée analytiquement à $\widetilde{\mathbb{C}^\star} \times K$, où $\widetilde{\mathbb{C}^\star}$ désigne le revêtement universel de $\mathbb{C}^\star$. Nous terminons en notant que K peut être choisi arbitrairement. Cela montre également le point 2. du théorème 2.10.
La partie (3) du théorème 2.10 découle du fait que la sommation de Borel

par rapport à z commute avec la dérivation $\dfrac{d}{dz}$. $\square$

Ainsi, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 2.12. — *Lorsque m est impair, la fonction analytique Φ_0 du théorème 2.10 est donnée par :*

$$\Phi_0(x,\underline{a}) = \frac{\sqrt{x}}{P_m(x,\underline{a})^{\frac{1}{4}}} e^{-z}\, \mathrm{s}_\alpha \psi_+(z,\underline{a})\,|_{z\,=\,z(x,\underline{a})}, \tag{2.33}$$

pour x dans un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $]-\frac{\pi}{m}-\frac{2\alpha}{m},\frac{\pi}{m}-\frac{2\alpha}{m}[$, uniformément en $\underline{a}$ pour $\underline{a}$ dans un compact quelconque de $\mathbb{C}^m$, où la direction de sommation de Borel α varie entre $]-\pi,+\pi[$.

2.3. Phénomène de résurgence

DÉFINITION 2.13. — *Une série formelle $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ est résurgente si son mineur $\widetilde{\psi}(\zeta)$ définit une fonction analytique (ramifiée) à l'origine et est prolongeable sans fin, i.e., pour tout $L>0$ il existe un sous-ensemble fini $\Omega_L \subset \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{\psi}$ peut être prolongé analytiquement le long de tout chemin λ de longueur $< L$ évitant Ω_L.*

Remarque 2.14. — Cette définition[5] peut s'étendre à une algèbre de *fonctions résurgentes étendues* que nous ne précisons pas ici.

Remarque 2.15. — Dans cet article, le prolongement analytique sans fin se fait sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$.

PROPOSITION 2.16. — *Si deux séries formelles $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ et $\phi(z) = s + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\beta_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$ sont résurgentes, alors le produit $\psi.\phi(z)$ est aussi résurgent : le mineur de $\psi.\phi(z)$, qui est donné par*

$$\begin{aligned} &\widetilde{\psi.\phi}(\zeta) = r.\widetilde{\phi}(\zeta) + s.\widetilde{\psi}(\zeta) + \widetilde{\psi} * \widetilde{\phi}(\zeta),\\ &\widetilde{\psi} * \widetilde{\phi}(\zeta) = \int_0^\zeta \widetilde{\psi}(\eta)\widetilde{\phi}(\zeta-\eta)d\eta \ \textit{(le produit de convolution)}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

est prolongeable sans fin.

---

(5) Notons que J. Écalle propose une définition plus générale.

Pour une série formelle résurgente, il peut arriver que nous ne puissions pas définir sa (pré)somme de Borel dans une direction donnée $\alpha \in \mathbb{R}$ du fait de la présence de singularités pour son mineur le long de cette direction : c'est l'essence même du *phénomène de Stokes*.

DÉFINITION 2.17. — *Considérons une série formelle résurgente* $\psi(z) = r + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{z^{\frac{k}{q}+1}} \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{q}}]]$. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *une direction singulière pour le mineur* $\widetilde{\psi}(\zeta)$.
Hypothèse : nous supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ *tel que* $\widetilde{\psi}(\zeta)$ *puisse se prolonger analytiquement dans le secteur ouvert* $0]\alpha, \alpha+\varepsilon[$ *(resp.* $0]\alpha-\varepsilon, \alpha[$ *avec une croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini. Nous supposons aussi que cette croissance exponentielle à l'infini s'étend à un chemin* $[0, \infty e^{i\alpha}+[$ *(resp.* $[0, \infty e^{i\alpha}-[$*) qui contourne les singularités par la gauche (resp. par la droite) le long de la direction* α*, voir figure 1.*
Alors ψ *est* sommable de Borel à droite (resp. gauche) *dans la direction* α*, sa somme de Borel droite (resp. gauche)* $\mathrm{s}_{\alpha+}\psi$ *(resp.* $\mathrm{s}_{\alpha-}\psi$*) étant définie par*

$$\mathrm{s}_{\alpha\pm}\psi(z) := r + \int_0^{\infty e^{i\alpha}\pm} e^{-z\zeta}\widetilde{\psi}(\zeta)d\zeta,$$

pour z *dans un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture* $]-\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha[$.

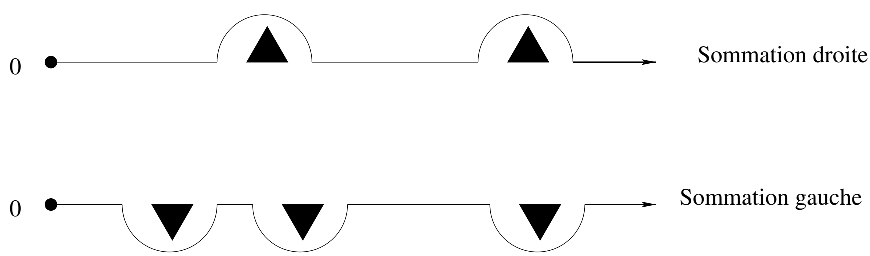

Figure 1. — Le chemin d'intégration pour la sommation *droite* (resp. *gauche*) (pour $\alpha = 0$).

Dans la définition 2.17, il est possible de supprimer l'hypothèse : il faut alors remplacer la somme de Borel à droite (resp. gauche) par la *présomme de Borel* à *droite* (resp. *gauche*) voir par exemple [8]. Autrement dit, toute fonction résurgente formelle est toujours présommable de Borel à droite et à gauche (dans toute direction).

Notons que la proposition 2.7 est encore valide pour la somme de Borel à droite et à gauche. En outre, lorsque ψ est (pré)sommable de Borel dans la direction $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{s}_\alpha \psi(z) = \mathrm{s}_{\alpha+}\psi(z) = \mathrm{s}_{\alpha-}\psi(z).$$

En revanche, un défaut de coïncidence entre $\mathrm{s}_{\alpha+}\psi(z)$ et $\mathrm{s}_{\alpha-}\psi(z)$ est caractéristique d'un *phénomène de Stokes* et la direction α est qualifiée de *singulière.*

De fait, pour étudier le phénomène de Stokes, il s'agira de comparer les (pré)sommations droite et gauche par l'intermédiaire des *dérivations étrangères* que nous définirons dans la section 2.4 suivante.

2.3.1. Problématique

Dans cet article, dans le but d'établir le caractère résurgent des séries formelles $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$ ou $\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$, il faut analyser la propriété de prolongement analytique sans fin sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ des mineurs $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ et $\widetilde{\psi}_-(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ (ou, comme on le verra dans la section 2.4 suivante, des *majeurs* associés).

Nous allons voir que les arguments utilisés pour prouver le théorème 2.8 peuvent être étendus pour analyser la structure analytique complète du mineur $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ de $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$. Les techniques employées sont analogues à celles utilisées dans [20] et [19]. C'est l'objet du théorème suivant.

2.3.2. Deuxième théorème fondamental

Théorème 2.18. — *Le mineur $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}\}$ (resp. $\widetilde{\psi}_-(\zeta,\underline{a},\underline{b})$) de $\psi_+(z,\underline{a},\underline{b})$ (resp. $\psi_-(z,\underline{a},\underline{b})$) peut être prolongé analytiquement en $(\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,-2\}} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ (resp. $(\zeta,\underline{a},\underline{b}) \in \widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,+2\}} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$), où $\widetilde{\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}}$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}$. De plus, $\widetilde{\psi}_\pm$ admet une croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini en ζ, uniformément en $\underline{a}$ et $\underline{b}$, pour $\underline{a}$ (respectivement $\underline{b}$) dans n'importe quel compact de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{C}^n$).*

2.3.3. Démonstration du deuxième théorème fondamental

De nouveau, grâce à la relation (2.12), il suffit de montrer le résultat pour $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ seulement.

Dans la démonstration du premier théorème fondamental 2.8, nous avons réalisé $\widetilde{\psi}_+(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ comme somme d'une série de fonctions $\widetilde{\psi}_k(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ qui se prolongent analytiquement sur le revêtement universel de $\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}$. Nous avons également montré la convergence uniforme de cette série dans le domaine $\Omega_m(\rho)$, de sorte que, quand ρ tend vers 0, $\widetilde{\psi}_+$ se prolonge sur l'ouvert du revêtement universel $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,-2\}} \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ consistant à enlever chacune des $m-n+2$ demi-droites au-dessus de $]-\infty,-2]$.

Il s'agit maintenant d'étudier le prolongement analytique de la série $\widetilde{\psi}(\zeta,\underline{a},\underline{b}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\psi}_k(\zeta,\underline{a},\underline{b})$ sur le revêtement universel $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}}$ de $\mathbb{C}\backslash\{0,\pm 2\}$.

Dans la suite, nous notons $\dot{\zeta}$ le projeté de $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}}$ sur $\mathbb{C}$ et nous fixons $\rho \in]0,1[$, $\underline{a} \in K$ et $\underline{b} \in K'$.

Nous désignons encore par $D(0,\rho)$ le disque ouvert centré à l'origine et de rayon ρ.

2.3.3.1. Les sous-ensembles $\mathcal{R}_\rho$ et applications

Nous posons :

$$\mathcal{R}'_p = \Big\{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}} \Big/ |\zeta| \geqslant \rho,\ |\dot{\zeta}+2| \geqslant \rho\Big\}.$$

Chaque élément $\zeta \in \mathcal{R}'_p$ peut être représenté par des chemins γ_ζ (cf. figure 2) de classe $\mathcal{C}^1$, d'origine 0 et d'extrémité ζ, qui restent dans $\mathcal{R}'_p$ (excepté évidemment pour le morceau initial dont la projection sur $\mathbb{C}$ est contenue dans $D(0,\rho)$).

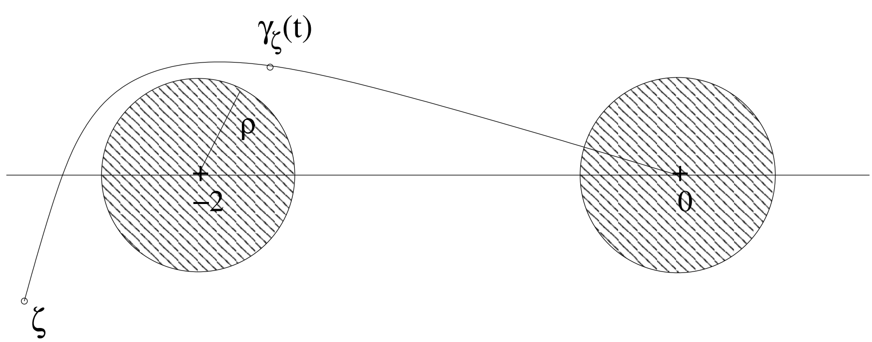

Figure 2. — Un chemin γ_ζ

Dans la classe d'homotopie à extrémités fixes d'un chemin γ_ζ, il existe un unique chemin de longueur minimale (i.e. un chemin optimal) que nous notons λ_ζ. Ce chemin est une concaténation de segments (rectilignes) et d'arcs de cercles, et il est également inclus dans $\mathcal{R}'_p$ (excepté pour son segment initial issu de l'origine dont la projection sur $\mathbb{C}$ est contenue dans $D(0,\rho)$) (voir [24] p. 1208-1209 pour plus de détails).

Nous pouvons paramétrer le chemin λ_ζ par la longueur de l'arc :

$$[0,l_\zeta] \to \mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}} \quad ; \quad t \mapsto \eta_\zeta(t)$$

avec $\eta_\zeta(0)=0$ et $\eta_\zeta(l_\zeta)=\zeta$ (l_ζ désignant la longueur du chemin λ_ζ).

De plus, $\forall t \in [0,l_\zeta]$, $|\eta'_\zeta(t)|=1$ et $|\zeta-\eta_\zeta(t)| \leqslant l_\zeta - t$.

Remarquons ici que le chemin λ_ζ n'a pas besoin d'être symétriquement contractile puisque les produits de convolution qui vont intervenir ne se font qu'avec la fonction $\widetilde{F}$ qui est une fonction entière de la variable $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$.

Nous notons $\mathcal{R}''_\rho$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\{0,\pm 2\}}$ représentés par un segment de longueur inférieure ou égale à ρ, de sorte que pour de tels éléments, $\lambda_\zeta=[0,\zeta]$.

Nous posons alors : $\mathcal{R}_\rho = \mathcal{R}'_\rho \cup \mathcal{R}''_\rho$.

Concernant les propriétés du produit de convolution, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.19. — *Soit ϕ une fonction analytique de $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$ au voisinage de l'origine se prolongeant analytiquement sans fin à $\mathcal{R}_\rho$.*

Alors, nous définissons le produit de convolution $\phi * \widetilde{F}$ par :

$$\forall\zeta \in \mathcal{R}_p,\ \phi*\widetilde{F}(\zeta) = \int_{\lambda_\zeta}\phi(\zeta_1)\widetilde{F}(\zeta-\zeta_1)d\zeta_1 = \int_0^{l_\zeta}\phi(\eta_\zeta(t))\widetilde{F}(\zeta-\eta_\zeta(t))\eta'_\zeta(t)dt.$$

Ce dernier définit une fonction analytique de la variable $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$ au voisinage de l'origine et se prolongeant analytiquement sans fin à $\mathcal{R}_\rho$.

Par ailleurs, s'il existe une fonction H continue positive croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que $|\phi(\zeta)| \leqslant H(l_\zeta)$, $\forall\zeta\in\mathcal{R}_p$, alors nous avons la majoration suivante :

$$\forall\zeta \in \mathcal{R}_p,\ |\phi * \widetilde{F}(\zeta)| \leqslant H * \widetilde{G}(l_\zeta).$$

Démonstration. — Les propriétés d'analyticité du produit de convolution sont bien connues.

Par ailleurs, pour $\zeta \in \mathcal{R}_p$, nous avons :

$$\phi * \widetilde{F}(\zeta) = \int_0^{l_\zeta} \phi(\eta_\zeta(t))\widetilde{F}(\zeta - \eta_\zeta(t))\eta'_\zeta(t)dt,$$

d'où :

$$|\phi * \widetilde{F}(\zeta)| \leqslant \int_0^{l_\zeta} |\phi(\eta_\zeta(t))||\widetilde{F}(\zeta - \eta_\zeta(t))|dt$$

(car $|\eta'_\zeta(t)| = 1$).

Comme

$$\begin{cases} |\phi(\eta_\zeta(t))| \leqslant H(l_{\eta_\zeta(t)}) \\ \\ |\widetilde{F}(\eta_\zeta(t))| \leqslant \widetilde{G}(l_{\eta_\zeta(t)}) \end{cases}$$

et

$$\forall t \in [0, l_\zeta], \begin{cases} l_{\eta_\zeta(t)} \leqslant t \\ \\ l_{\zeta - \eta_\zeta(t)} \leqslant l_\zeta - t, \end{cases}$$

nous en déduisons finalement, par croissance sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions H et $\widetilde{G}$:

$$\begin{cases} |\phi(\eta_\zeta(t))| \leqslant H(t) \\ \\ |\widetilde{F}(\eta_\zeta(t))| \leqslant \widetilde{G}(l_\zeta - t). \end{cases}$$

Par suite, nous obtenons l'inégalité :

$$|\phi * \widetilde{F}(\zeta)| \leqslant \int_0^{l_\zeta} H(t)\widetilde{G}(l_\zeta - t)dt = H * \widetilde{G}(l_\zeta).$$

□

2.3.3.2. Construction d'une nouvelle série majorante et conséquences

Nous revenons maintenant aux mineurs $\widetilde{\psi}_k$.

Nous rappelons que ces derniers sont définis par le système d'équations de convolution suivant :

$$\begin{cases} -\zeta(2+\zeta)\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{F} \\ \\ -\zeta(\zeta+2)\widetilde{\psi}_{k+1} = \widetilde{\psi}_k * \widetilde{F},\ k \geqslant 0. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de contrôler les $\widetilde{\psi}_k$ de la même manière que dans le feuillet principal : plus précisément, il faut trouver des fonctions majorantes $\widetilde{H}_k$ pour lesquelles on ait convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} \widetilde{H}_k(\zeta)\epsilon^k$.

Remarquons que nous avons toujours la majoration $|\zeta| \leqslant l_\zeta$ mais qu'en revanche, il n'y a pas de constante d uniforme telle que $l_\zeta \leqslant \dfrac{1}{d}|\zeta|$ sur tous les feuillets de $\mathcal{R}_p$.

Afin de contourner cette difficulté, nous introduisons, pour $N \in \mathbb{N}$, les sous-ensembles de $\mathcal{R}_p$ suivants : $\mathcal{R}_p^{(N)}$ est le sous-ensemble de $\mathcal{R}_p$ formé des éléments ζ tels que le chemin λ_ζ optimal associé ne contient pas plus de N arcs de cercle dont la projection coupe l'axe réel.

Par suite, nous avons : $\mathcal{R}_p = \displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_p^{(N)}$.

En outre, nous avons les propriétés fondamentales suivantes :

$$\begin{cases} \forall N \in \mathbb{N},\, \forall \zeta \in \mathcal{R}_p^{(N)},\, \exists d_N \in]0,1],\, l_\zeta \leqslant \frac{1}{d_N}|\zeta| \\ \\ \forall N \in \mathbb{N},\, \zeta \in \mathcal{R}_p^{(N)} \Rightarrow l_\zeta \subset \mathcal{R}_p^{(N)}. \end{cases}$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$.

Nous définissons maintenant, comme dans le feuillet principal, la suite de fonctions analytiques $\widetilde{H}_k$ définie pour $\zeta \in \mathcal{R}_p^{(N)}$ par :

$$\begin{cases} \rho\zeta\widetilde{H}_0(\zeta) = \widetilde{G}_{d_N} \\ \\ \rho\zeta\widetilde{H}_{k+1}(\zeta) = \widetilde{H}_k(\zeta) * \widetilde{G}_{d_N},\ k \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.35}$$

où $\widetilde{G}_{d_N}(\zeta) = \frac{1}{d_N}\widetilde{G}(\zeta)$, $\forall \zeta \in \mathcal{R}_p^{(N)}$ (en particulier, $\widetilde{G}_{d_N}$ est une fonction entière de $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$ et est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

La suite de fonctions $(\widetilde{H}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est précisément la suite de fonctions majorantes recherchée au sens du lemme suivant :

Lemme 2.20. —

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in \mathcal{R}_p^{(N)} \times K \times K', \quad |\widetilde{\psi}_k(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \widetilde{H}_k(l_\zeta).$$

Démonstration. — La démonstration est quasiment identique à celle de la proposition 2.8.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in \mathcal{R}_p^{(N)} \times K \times K'$.

Nous procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Pour le rang $k = 0$, nous avons les majorations suivantes :

$$|\widetilde{\psi}_0(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| = \frac{|\widetilde{F}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})|}{|\zeta||\zeta + 2|} \leqslant \frac{\widetilde{G}(|\zeta|)}{\rho d_N l_\zeta} \leqslant \widetilde{H}_0(l_\zeta)$$

(car $\widetilde{G}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

Supposons maintenant que $|\widetilde{\psi}_k(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \widetilde{H}_k(l_\zeta)$, et montrons qu'alors : $|\widetilde{\psi}_{k+1}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \widetilde{H}_{k+1}(l_\zeta)$.

Par définition, nous avons :

$$|\widetilde{\psi}_{k+1}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| = \frac{|\widetilde{\psi}_k * \widetilde{F}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})|}{|\zeta||\zeta + 2|}.$$

Par hypothèse de récurrence et par définition de $\widetilde{G}$, nous obtenons grâce au lemme 2.19 la majoration suivante :

$$|\widetilde{\psi}_{k+1}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant \frac{\widetilde{H}_k * \widetilde{G}(l_\zeta)}{p d_N l_\zeta} = \widetilde{H}_{k+1}(l_\zeta).$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

2.3.3.3. Conclusion

Nous terminons alors la démonstration exactement de la même manière que dans le cas du feuillet principal, en montrant d'abord que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \forall \zeta \in \mathcal{R}_p^{(N)}, \quad |\widetilde{H}_k(l_\zeta)| \leqslant \frac{c^{k+1}}{(\rho d_N)^{k+1}(k+1)!} e^{B\frac{|\zeta|}{d_N}},$$

puis que finalement :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall (\zeta, \underline{a}, \underline{b}) \in \mathcal{R}_p^{(N)} \times K \times K', \quad |\widetilde{\psi}(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant A'(d_N) e^{B\frac{|\zeta|}{d_N}}$$

(avec $0 < A \leqslant A'(d_N)$, A et B étant les constantes figurant dans la démonstration du théorème fondamental 2.8).

2.4. Structure résurgente

Afin d'être complet dans cette étude de la résurgence, nous terminons par le calcul des dérivations étrangères qui vont nous donner les relations de résurgence liant $\widetilde{\psi}_+$ et $\widetilde{\psi}_-$ et permettre ainsi d'explorer, par « contrecoup », les différents feuillets de $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\{0, \pm 2\}}$.

2.4.1. Notions de microfonctions et de majeurs

Le phénomène de Stokes peut s'étudier grâce au calcul différentiel étranger dont les opérateurs, les dérivations étrangères, sont exactement les logarithmes de l'automorphisme de Stokes.

Ce dernier se décrit en comparant les présommations de Borel droite et gauche. Afin de construire une algèbre convenable qui soit stable par l'automorphisme de Stokes et de pouvoir y définir correctement les dérivations étrangères, il convient :

1. soit d'imposer des restrictions sur la forme de toutes les singularités des mineurs : dans le cadre de cet article, il s'agit de demander aux mineurs (qui sont des fonctions holomorphes de $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$ au voisinage de l'origine se prolongeant sans fin sur $\mathbb{C}\setminus\widetilde{\{0,\pm 2\}}$) d'avoir un comportement du type :

   $$\{\text{pôle simple}\} + \{\text{fonction de } \zeta^{\frac{1}{m-n+2}}\} + \{\text{singularité logarithmique}\}$$

   au-dessus des singularités 0 et 2, ou 0 et -2 (selon les cas),

2. soit d'élargir le point de vue et de travailler avec le formalisme des *singularités* (ou microfonctions) et des *fonctions résurgentes générales.* L'avantage de cette dernière méthode est l'utilisation de majeurs et le fait que nous n'ayons plus besoin de connaître *a priori* la forme des singularités des mineurs.

Nous allons adopter ici le deuxième point de vue (nous renvoyons le lecteur à [30] pour plus de détails).

Nous notons $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ le revêtement universel de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, vu comme la surface de Riemann du logarithme.

Nous notons également $\zeta \in \widetilde{\mathbb{C}^*} \mapsto \dot{\zeta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la projection canonique.

Définition 2.21. —

1. *Nous désignons par ANA l'espace des germes de fonctions analytiques dans un domaine $\mathcal{D}$ de la forme :*

   $$\mathcal{D} = \{re^{i\theta}/0 < r < h(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} \subset \widetilde{\mathbb{C}^*},$$

   avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue ($\mathcal{D}$ est un voisinage « spiralé » de l'origine).

2. *Nous notons* $SING = \dfrac{ANA}{\mathbb{C}\{\zeta\}}$ *l'ensemble des singularités (ou micro-fonctions).*

   Un représentant $\overset{\vee}{\phi}$ *de la singularité* $\overset{\triangledown}{\phi}$ *est appelé un majeur de cette singularité.*

   Nous notons :

$$sing_0 : ANA \to SING\,;\ \overset{\vee}{\phi} \mapsto \overset{\triangledown}{\phi} = sing_0(\overset{\vee}{\phi}(\zeta)).$$

3. *L'application déduite de l'opérateur de variation* $\overset{\vee}{\phi}(\zeta) \mapsto \overset{\vee}{\phi}(\zeta) - \overset{\vee}{\phi}(\zeta e^{-2\pi i})$ *est notée :*

$$var : SING \to ANA\,;\ \overset{\triangledown}{\phi} = sing_0(\overset{\vee}{\phi}) \mapsto \widetilde{\phi}(\zeta) = \overset{\vee}{\phi}(\zeta) - \overset{\vee}{\phi}(\zeta e^{-2\pi i}).$$

   Le germe $\widetilde{\phi} = var\,\overset{\triangledown}{\phi}$ *est appelé le mineur de la singularité* $\overset{\triangledown}{\phi}$.

Remarque 2.22. — Le noyau de var est isomorphe à l'espace des fonctions entières de $\frac{1}{\zeta}$ sans terme constant (voir [30] p.39-40).

Exemple 2.23. — Les exemples usuels de singularités sont les pôles :

$$\delta = \mathrm{sing}_0\left(\frac{1}{2\pi i\zeta}\right), \quad \delta^{(n)} = \mathrm{sing}_0\left(\frac{(-1)^n\, n!}{2\pi i\zeta^{n+1}}\right), \quad \forall n \geqslant 1,$$

et les singularités logarithmiques de variation régulière :

$${}^\flat\widetilde{\phi} = \mathrm{sing}_0\left(\frac{1}{2\pi i}\,\widetilde{\phi}(\zeta)\log(\zeta)\right), \quad \widetilde{\phi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}.$$

Proposition 2.24 (voir [30] p.47-48-49). —

1. *L'espace SING peut être muni d'un produit de convolution* $*$ *commutatif et associatif qui en fait une algèbre commutative, d'élément unité* $\delta = sing_0\left(\dfrac{1}{2\pi i\zeta}\right)$.

2. *L'opérateur linéaire de SING*

$$\partial : \overset{\triangledown}{\phi} \mapsto -\zeta\overset{\triangledown}{\phi}$$

   correspond à une dérivation et son noyau est $\mathbb{C}\delta$ *(*∂ *correspond du reste à l'opérateur* $\frac{d}{dz}$ *du modèle géométrique).*

Nous sommes maintenant en mesure de définir une bonne algèbre pour les dérivations étrangères pour le cas qui nous occupe.

Définition 2.25. —

1. *Nous notons* $\widetilde{RES}_{2\mathbb{Z}}$ *l'espace des germes de ANA qui s'étendent analytiquement au revêtement universel* $\widetilde{\mathbb{C}\setminus 2\mathbb{Z}}$ *de* $\mathbb{C}\setminus 2\mathbb{Z}$ *(c'est l'espace des mineurs résurgents).*

2. *Nous définissons son analogue dans le modèle convolutif par :*

$$\overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}} := var^{-1}(\widetilde{RES}_{2\mathbb{Z}}) \subset SING.$$

Proposition 2.26 (voir [30] p.51-52). — $\overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}}$ *est une sous-algèbre de SING, stable par convolution.*

Nous pouvons maintenant définir la dérivation étrangère Δ_ω comme opérateur interne de $\overset{\triangledown}{\mathrm{RES}}_{2\mathbb{Z}}$ de la façon suivante :

Définition 2.27. — *Pour tout* $\overset{\triangledown}{\phi} \in \overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}}$ *et tout* $\omega = 2me^{i\theta}$ *avec* $m \in \mathbb{N}^\star$ *et* $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ *(*ω *est vu comme élément de* $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ *tel que* $\dot{\omega} \in 2\mathbb{Z}^\star$*),*

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{m-1}\in\{+,-\}} \frac{p(\varepsilon)!\, q(\varepsilon)!}{m!}\, sing_0\Big(\overset{\vee}{\Phi}_{\gamma(\varepsilon)}\Big),$$

où $p(\varepsilon)$ *et* $q(\varepsilon) = m-1-p(\varepsilon)$ *désignent le nombre de signes '+' et de signes '-' dans la suite* ε*, où le chemin* $\gamma(\varepsilon)$ *relie* $]0, \frac{1}{m}\omega[$ *et* $]\frac{m-1}{m}\omega, \omega[$ *en suivant le segment* $]0,\omega[$ *mais en contournant les singularités intermédiaires* $2re^{i\theta} = \frac{r}{m}\omega$ *par la droite si* $\varepsilon_r = +$ *et par la gauche si* $\varepsilon_r = -$*, et où le prolongement analytique du mineur* $\widetilde{\phi}$ *de* $\overset{\triangledown}{\phi}$ *détermine le majeur :*

$$\overset{\vee}{\Phi}_{\gamma(\varepsilon)}(\zeta) = (cont_{\gamma(\epsilon)}\widetilde{\phi})(\omega+\dot{\zeta}), \quad \arg(\omega)-2\pi < \arg(\zeta) < \arg(\omega), \quad |\zeta|<2.$$

Remarque 2.28. — Nous avons donc besoin simplement d'une hypothèse de prolongeabilité sans fin sur le mineur $\widetilde{\phi}$ de $\overset{\triangledown}{\phi}$ pour pouvoir définir $\Delta_\omega\overset{\triangledown}{\phi}$.

Proposition 2.29 [voir [30] p. 25 et 52]. —

1. *Les opérateurs* Δ_ω *sont des dérivations de l'algèbre* $\overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}}$*. Elles vérifient en outre la règle de Leibniz :*

$$\forall \overset{\triangledown}{\phi}_1,\, \overset{\triangledown}{\phi}_1 \in \overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}}, \quad \Delta_\omega(\overset{\triangledown}{\phi}_1 * \overset{\triangledown}{\phi}_2) = (\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}_1) * \overset{\triangledown}{\phi}_2 + \overset{\triangledown}{\phi}_1 * (\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}_2).$$

2. *De plus,* $\forall \overset{\triangledown}{\phi} \in \overset{\triangledown}{RES}_{2\mathbb{Z}}$, $\Delta_\omega\left(\partial \overset{\triangledown}{\phi}\right) = (-\omega + \partial)\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}$.

Les opérateurs Δ_ω peuvent induire dans le modèle géométrique des opérateurs analogues via la transformation de Borel inverse.

Le problème est que cette dernière n'est pas définie sur l'espace de toutes les singularités : il faut se restreindre à des sous-algèbres convolutives de SING, les plus courantes dans la pratique étant la sous-algèbre des *singularités simples* notée $\mathrm{SING}^{\mathrm{simp}}$ et celle des *singularités simplement ramifiées* notée $\mathrm{SING}^{\mathrm{s.ram}}$.

En terme de singularités, $\mathrm{SING}^{\mathrm{simp}}$ est constituée des singularités qui admettent un majeur de la forme

$$\mathrm{const.}\,\delta + \frac{1}{2\pi i}\,\widetilde{\phi}(\zeta)\log(\zeta), \quad \widetilde{\phi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\},$$

et $\mathrm{SING}^{\mathrm{s.ram}}$ est constituée des singularités admettant un majeur de la forme

$$P\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) + \frac{1}{2\pi i}\,\widetilde{\phi}(\zeta)\log(\zeta), \quad \widetilde{\phi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\},\, P(X) \in \mathbb{C}[X].$$

Dans ce cas, nous avons l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{B} : \phi = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^{-n} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]_1 \mapsto \overset{\triangledown}{\phi} = c_0\delta + {}^\flat\widetilde{\phi} \in \mathrm{SING}^{\mathrm{simp}},$$

où $\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ désigne l'espace des séries formelles de type Gevrey-1 et $\widetilde{\phi}(\zeta) = \sum_{n \geqslant 1} c_n \dfrac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}$.

Cet isomorphisme s'étend naturellement en

$$\mathcal{B} : \phi = \sum_{n \geqslant -N} c_n z^{-n} \in \mathbb{C}((z^{-1}))_1 \mapsto \overset{\triangledown}{\phi} = \sum_{k=0}^{N} c_{-k}\delta^{(k)} + {}^\flat\widetilde{\phi} \in \mathrm{SING}^{\mathrm{s.ram}},$$

où $\mathbb{C}((z^{-1}))_1$ désigne le corps des fractions de $\mathbb{C}[[z^{-1}]]_1$ (i.e. l'espace des sommes d'un polynôme en z et d'une série Gevrey-1 en z^{-1}), N dépend de ϕ et $\widetilde{\phi}$ est défini comme précédemment.

En revanche, nous pouvons définir de manière générale une transformée de Laplace pour les singularités (ou les majeurs).

DÉFINITION 2.30. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\overset{\triangledown}{\phi} = sing_0(\overset{\vee}{\phi})$ une singularité de SING telle que son mineur $\widetilde{\phi}$ se prolonge analytiquement le long de la demi-droite $]0, e^{i\theta}[\subset \widetilde{\mathbb{C}^*}$ avec une croissance au plus exponentielle à l'infini d'ordre 1 dans cette direction.*

Nous définissons alors la transformée de Laplace de $\overset{\triangledown}{\phi}$ par :

$$(\mathcal{L}^\theta \overset{\triangledown}{\phi})(z) = \int_{ae^{i(\theta-2\pi)}}^{ae^{i\theta}} e^{-z\zeta}\, \overset{\vee}{\phi}(\zeta)\, d\zeta + \int_{ae^{i\theta}}^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta}\, \widetilde{\phi}(\zeta)\, d\zeta,$$

où $a > 0$ est assez petit et la première intégrale est prise sur un cercle centré en l'origine.

PROPOSITION 2.31 (voir [30] p.50-51). — *Sous les hypothèses de la définition 2.30 précédente, $(\mathcal{L}^\theta \overset{\triangledown}{\phi})$ ne dépend pas du choix de a ni du majeur $\overset{\vee}{\phi}$, et définit une fonction analytique dans un demi-plan de la forme $\Re(ze^{i\theta}) > \tau$.*

Remarque 2.32. — Les transformées de Laplace d'une singularité $\overset{\triangledown}{\phi}$ dans des directions voisines $\theta_1 < \theta_2$ peuvent se recoller et définir ainsi une fonction analytique $(\mathcal{L}^{]\theta_1,\theta_2[} \overset{\triangledown}{\phi})$ dans un voisinage sectoriel de l'infini, pourvu que le mineur $\widetilde{\phi}$ n'ait pas de singularités dans le secteur $\theta_1 \leqslant \arg(\zeta) \leqslant \theta_2$.

Il faut alors considérer z comme un élément de $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ avec $-\theta_2 - \frac{\pi}{2} < \arg(z) < -\theta_1 + \frac{\pi}{2}$ et $|z|$ assez grand.

Ce point de vue permet dans certains cas de faire le lien entre le modèle convolutif et le modèle formel en considérant les possibles développements asymptotiques de $(\mathcal{L}^\theta \overset{\triangledown}{\phi})$.

Par exemple, si $\overset{\triangledown}{\phi} \in \mathrm{SING}^{\mathrm{s.ram}}$ et si la transformée de Laplace $(\mathcal{L}^{]\theta_1,\theta_2[} \overset{\triangledown}{\phi})$ est bien définie, cette dernière admet pour développement asymptotique à l'infini $\mathcal{B}^{-1}\overset{\triangledown}{\phi} \in \mathbb{C}((z^{-1}))_1$.

2.4.2. Troisième théorème fondamental

Nous désignons par $\overset{\triangledown}{\psi}_+$ (respectivement $\overset{\triangledown}{\psi}_-$) la singularité associée au mineur $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement $\widetilde{\psi}_-$) du deuxième théorème fondamental 2.18.

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 2.33. — *La structure résurgente associée à $\overset{\triangledown}{\psi}_+$ et $\overset{\triangledown}{\psi}_-$ est donnée par :*

$$\begin{cases} \Delta_{2e^{ki\pi}} \overset{\triangledown}{\psi}_-(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) = \vartheta_k(\underline{a}, \underline{b}) \overset{\triangledown}{\psi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) & \text{si} \quad k \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_{2e^{ki\pi}} \overset{\triangledown}{\psi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) = \vartheta_k(\underline{a}, \underline{b}) \overset{\triangledown}{\psi}_-(\zeta, \underline{a}, \underline{b}) & \text{si} \quad k-1 \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_\tau \overset{\triangledown}{\psi}_\pm = 0 \qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

où Δ_τ désigne la dérivation étrangère en τ. Les coefficients $\vartheta_k(\underline{a}, \underline{b})$ sont de plus des fonctions entières de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$.

2.4.3. Démonstration du troisième théorème fondamental

L'idée de la démonstration repose sur des méthodes employées par D. Sauzin (voir [24]).

Par la proposition 2.18, nous savons que les singularités de $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement $\widetilde{\psi}_-$) sont au-dessus -2 et 0 (respectivement 2 et 0). Cependant, étant donné que $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement $\widetilde{\psi}_-$) appartient à $\mathbb{C}[\underline{a}]\{\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}\}$, les Δ_τ non nulles sont indexées par les éléments τ au-dessus de -2 (respectivement 2) sur la surface de Riemann $\mathfrak{C}_{m-n+2}$ de $\zeta^{\frac{1}{m-n+2}}$.

De plus, le mineur $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement $\widetilde{\psi}_-$) de ψ_+ (respectivement ψ_-) étant prolongeable sans fin sur $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\{0,-2\}}$ (respectivement sur $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\{0,2\}}$), les dérivations étrangères Δ_τ sont bien définies pour les majeurs $\overset{\vee}{\psi}_+$ (respectivement $\overset{\vee}{\psi}_-$) associés à $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement à $\widetilde{\psi}_-$) et pour la singularité associée $\overset{\triangledown}{\psi}_+$ (respectivement $\overset{\triangledown}{\psi}_-$), qui est définie dans le plan de Borel par un majeur $\overset{\vee}{\psi}_+$ (respectivement $\overset{\vee}{\psi}_-$) obtenu en translatant $\widetilde{\psi}_+$ (respectivement $\widetilde{\psi}_-$).

Etant donné que ψ_+ satisfait à l'équation (2.11) :

$$-\frac{d^2}{dz^2}\psi_+ + 2\frac{d}{dz}\psi_+ - F(z, \underline{a}, \underline{b})\psi_+ = 0,$$

nous en déduisons par transformation de Borel que la singularité $\overset{\triangledown}{\psi}_+ = \delta + {}^\flat\widetilde{\psi}_+$ satisfait à l'équation de convolution :

$$-\partial^2\overset{\triangledown}{\psi}_+ + 2\partial\overset{\triangledown}{\psi}_+ - \overset{\triangledown}{F} * \overset{\triangledown}{\psi}_+ = 0. \tag{2.36}$$

Par suite, en dérivant étrangèrement l'équation (2.36) (cf proposition 2.29), nous déduisons finalement que la singularité $\overset{\triangledown}{\phi}_+ = \Delta_\tau\overset{\triangledown}{\psi}_+$ (avec ici $\tau = -2$) est solution de l'équation linéaire :

$$\partial^2\overset{\triangledown}{\phi}_+ + 2\partial\overset{\triangledown}{\phi}_+ + \overset{\triangledown}{F} * \overset{\triangledown}{\phi}_+ = 0. \tag{2.37}$$

Comme $\overset{\triangledown}{\psi}_- = \delta + {}^\flat\widetilde{\psi}_-$ est une solution inversible de (2.37), en écrivant $\Delta_\tau\overset{\triangledown}{\psi}_+ = \overset{\triangledown}{S} * \overset{\triangledown}{\psi}_-$, cela impose à la singularité $\overset{\triangledown}{S}$ de vérifier l'équation :

$$\partial^2\overset{\triangledown}{S} + 2(\delta + \overset{\triangledown}{\chi}) * \partial\overset{\triangledown}{S} = 0, \tag{2.38}$$

où $\overset{\triangledown}{\chi}$ est la singularité associée à la transformée de Borel de $\dfrac{1}{\psi_-}\dfrac{d\psi_-}{dz}$.
Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 2.34. — *La singularité $\overset{\triangledown}{a} = \partial\overset{\triangledown}{S}$ est nulle.*

Démonstration. — Etant donné que $\overset{\triangledown}{S}$ vérifie l'équation (2.38), nous en déduisons que $\overset{\triangledown}{a}$ vérifie l'équation :

$$\partial\overset{\triangledown}{a} + 2(\delta + \overset{\triangledown}{\chi}) * \overset{\triangledown}{a} = 0.$$

Comme $\overset{\triangledown}{\chi}$ admet une primitive $\overset{\triangledown}{\chi}_0$ exponentiable (les primitives de $\overset{\triangledown}{\chi}$ sont les mineurs de $\log(\psi_-)(z) + \mathrm{const}$ et $\log(\psi_-)(z) \in \mathbb{C}[[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$), nous posons : $\overset{\triangledown}{a}_0 = \overset{\triangledown}{a} * \exp_*(2\overset{\triangledown}{\chi}_0)$.
Nous en déduisons que $\overset{\triangledown}{a}_0$ vérifie l'équation :

$$\partial\overset{\triangledown}{a}_0 + 2\overset{\triangledown}{a}_0 = 0,$$

i.e. $(2-\zeta)\overset{\vee}{a}_0(\zeta)$ est une fonction régulière de ζ donc $\overset{\vee}{a}_0(\zeta)$ une fonction régulière de ζ, d'où $\overset{\triangledown}{a}_0 = 0$. □

Corollaire 2.35. — *La singularité $\overset{\triangledown}{S}$ est un multiple de δ.*

Démonstration. — Comme $\partial \overset{\triangledown}{S} = 0$, nous en déduisons que pour tout majeur $\overset{\vee}{S}$, $\zeta \overset{\vee}{S}(\zeta)$ est une fonction régulière de ζ, d'où $\overset{\vee}{S}(\zeta) = \frac{\text{const}}{\zeta} + \text{reg}(\zeta)$ et finalement $\overset{\triangledown}{S}$ est un multiple de δ. $\square$

Nous en déduisons l'existence de $\vartheta_\tau(\underline{a}, \underline{b})$ tel que $\Delta_\tau \overset{\triangledown}{\psi}_+ = \vartheta_\tau(\underline{a}, \underline{b}) \overset{\triangledown}{\psi}_-$.

De la même manière, nous obtenons l'existence de $\vartheta_\tau(\underline{a}, \underline{b})$ tel que $\Delta_\tau \overset{\triangledown}{\psi}_- = \vartheta_\tau(\underline{a}, \underline{b}) \overset{\triangledown}{\psi}_+$, où τ est au-dessus de $+2$ sur la surface de Riemann $\mathfrak{C}_{m-n+2}$.

Par ailleurs, les coefficients $\vartheta_\tau(\underline{a}, \underline{b})$ sont des fonctions entières de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$: cela provient directement de la régularité en $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des mineurs $\widetilde{\psi}_+$, $\widetilde{\psi}_-$, et du fait que le lieu des singularités des mineurs ne dépend ni de $\underline{a}$, ni de $\underline{b}$ de sorte que l'automorphisme de Stokes (dans n'importe quelle direction) commute avec le prolongement analytique en $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

2.4.4. Relations de résurgence dans le modèle géométrique

Il est également intéressant de décrire ces relations de résurgence dans le modèle géométrique. Nous proposons ici l'analogue du théorème 2.33 pour le modèle géométrique (i.e. dans la variable z) en utilisant la linéarité de l'équation (2.3).

Pour cela, considérons à nouveau la singularité $\overset{\triangledown}{\phi}_+ = \Delta_\tau \overset{\triangledown}{\psi}_+ \in \overset{\triangledown}{\text{RES}}_{2\mathbb{Z}}$.

Afin de simplifier, nous fixons maintenant $\tau = 2e^{i\pi}$ (nous nous plaçons donc dans le feuillet principal de $\widetilde{\mathbb{C} \setminus 2\mathbb{Z}}$).

Par la proposition 2.18, $\widetilde{\psi}_+$ se prolonge analytiquement à $\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}}$ en admettant une croissance exponentielle au plus d'ordre 1 à l'infini en ζ (uniformément en $\underline{a}$ (respectivement $\underline{b}$) sur tout compact de $\mathbb{C}^m$ (respectivement $\mathbb{C}^n$)) de sorte que nous pouvons définir la transformée de Laplace de $\overset{\triangledown}{\phi}_+$ pour toute demi-droite $]0, e^{i\theta}\infty[\subset \widetilde{\mathbb{C} \setminus 2\mathbb{Z}}$ avec $\theta \neq 0\,[\pi]$. Cette dernière s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}^\theta\left(\overset{\triangledown}{\phi}_+\right)(z, \underline{a}, \underline{b}) = \left[\int_{re^{i(\theta-2\pi)}}^{re^{i\theta}} e^{-z\zeta} \overset{\vee}{\phi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})\, d\zeta + \int_{re^{i\theta}}^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta} \widetilde{\phi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})\, d\zeta\right],$$

où $r \in]0, 1[$ est assez petit, et définit une fonction analytique de la variable z dans un demi-plan du type $\Re(ze^{i\theta}) > C$.

Etant donné que la singularité $\overset{\triangledown}{\phi}_+$ est solution de l'équation linéaire (2.37) :

$$\partial^2 \overset{\triangledown}{\phi}_+ + 2\partial \overset{\triangledown}{\phi}_+ + \overset{\triangledown}{F} * \overset{\triangledown}{\phi}_+ = 0,$$

nous en déduisons que la fonction $\mathcal{L}^\theta \left(\overset{\triangledown}{\phi}_+ \right)(z, \underline{a}, \underline{b})$ satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + 2\frac{d\psi}{dz} + F(z, \underline{a}, \underline{b})\psi = 0.$$

Par suite, la fonction $e^z \mathcal{L}^\theta \left(\overset{\triangledown}{\phi}_+ \right)(z, \underline{a}, \underline{b})$ est solution de l'équation (2.3) :

$$-\frac{d^2}{dz^2}\Psi + (1 - F(z, \underline{a}, \underline{b}))\Psi = 0.$$

Par ailleurs, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ (respectivement $\theta \in]0, 2\pi[$), nous déduisons de la proposition 2.8 que la fonction analytique $e^{-z} \mathrm{s}_\theta \psi_+(z, \underline{a}, \underline{b})$ (respectivement $e^z \mathrm{s}_\theta \psi_-(z, \underline{a}, \underline{b})$) définie sur un voisinage sectoriel de l'infini Σ de la variable z d'ouverture $]-\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} - \theta[$ est dominante (respectivement récessive) dans le secteur $\Sigma \cap \{\Re(z) < 0\}$.

En outre, ces deux fonctions forment un système fondamental de solutions de l'équation (2.3).

Nous fixons maintenant $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Par suite, nous en déduisons l'existence de constantes $\mathcal{A}_\tau(\underline{a}, \underline{b})$ et $\mathcal{B}_\tau(\underline{a}, \underline{b})$ telles que :

$$e^z \mathcal{L}^\theta \left(\overset{\triangledown}{\phi}_+ \right)(z, \underline{a}, \underline{b}) = \mathcal{A}_\tau(\underline{a}, \underline{b})\, e^{-z} \mathrm{s}_\theta \psi_+(z, \underline{a}, \underline{b}) + \mathcal{B}_\tau(\underline{a}, \underline{b})\, e^z \mathrm{s}_\theta \psi_-(z, \underline{a}, \underline{b}).$$

Or, nous avons les majorations suivantes pour z le long d'une demi-droite $\mathcal{D}_\theta \subset \Sigma \cap \{\Re(z) < 0\}$ tel que $\Re(ze^{i\theta}) >> 0$:

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_{re^{i(\theta - 2\pi)}}^{re^{i\theta}} e^{-z\zeta} \overset{\vee}{\phi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})\, d\zeta \right| \leqslant M e^{r|z|} \\ \left| \displaystyle\int_{re^{i\theta}}^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta} \widetilde{\phi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})\, d\zeta \right| \leqslant \dfrac{A}{\Re(ze^{i\theta}) - B} e^{r(B - \Re(ze^{i\theta}))}. \end{cases}$$

(où A et B sont des constantes positives telles que $|\widetilde{\phi}_+(\zeta, \underline{a}, \underline{b})| \leqslant Ae^{B|\zeta|}$).

Par suite, nous en déduisons que le long de $\mathcal{D}_\theta$, la fonction $e^z \mathcal{L}^\theta \left(\overset{\triangledown}{\phi}_+ \right)(z, \underline{a}, \underline{b})$ est récessive (car r peut être pris arbitrairement proche de 0) et donc que $\mathcal{A}_\tau(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ nécessairement.

De fait, nous avons donc l'égalité suivante :

$$\mathcal{L}^{\theta}\left(\overset{\triangledown}{\phi}_{+}\right)(z,\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})\,\mathrm{s}_{\theta}\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}).$$

En particulier, cela implique au niveau formel l'égalité suivante :

$$T\left(\mathcal{L}^{\theta}\left(\overset{\triangledown}{\phi}_{+}\right)\right)(z,\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}),$$

où T désigne l'opérateur « développement asymptotique ».

Ceci nous permet de définir Δ_{τ} au niveau formel par :

$$\Delta_{\tau}\psi_{+} = T\left(\mathcal{L}^{\theta}\left(\overset{\triangledown}{\phi}_{+}\right)\right),$$

et de montrer la relation de résurgence suivante :

$$\Delta_{\tau}\psi_{+}(z,\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}).$$

Nous montrons de la même manière l'existence de constantes $\mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})$ telles que :

$$\Delta_{\tau}\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})\psi_{+}(z,\underline{a},\underline{b}),$$

avec τ au-dessus de 2.

Enfin, remarquons que nous avons nécessairement l'égalité :

$$\vartheta_{\tau}(\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{B}_{\tau}(\underline{a},\underline{b})$$

par transformée de Borel inverse dans les égalités du théorème 2.33.

En résumé, nous obtenons le théorèm annoncé dans l'introduction :

Théorème 2.36. — *Pour $m-n$ impair, il existe une unique série formelle $\psi_{+}(z,\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$ (resp. $\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}) \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{1}{m-n+2}}]]$) dont le terme constant est 1, telle que $e^{-z}\psi_{+}(z,\underline{a},\underline{b})$ (resp. $e^{+z}\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b})$) est solution de l'équation (2.3), et de plus :*

$$\psi_{-}(z,\underline{a},\underline{b}) = \psi_{+}(\omega^{\frac{m-n+2}{2}}z,\omega.\underline{a},\omega.\underline{b}). \tag{2.39}$$

Ces séries formelles $\psi_{\pm}$ sont résurgentes par rapport à z, dépendent holomorphiquement de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$, et sont sommables de Borel [6] par rapport à z, uniformément par rapport à $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sur tout compact.

[6] Excepté évidemment pour les directions singulières qui sont décrites par la structure résurgente.

Leur structure résurgente est donnée par :

$$\begin{cases} \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_+(z,\underline{a},\underline{b}) & \text{si} \quad k \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_+(z,\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_-(z,\underline{a},\underline{b}) & \text{si} \quad k-1 \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_\tau\psi_\pm = 0 \qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

où Δ_τ désigne la dérivation étrangère en τ. Les coefficients $S_k(\underline{a},\underline{b})$ sont de plus des fonctions entières en $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

3. Le cas $m-n$ pair

La différence fondamentale avec le cas $m-n$ impair précédent est maintenant l'existence du terme $c_{\frac{m-n+2}{2}}(\underline{a},\underline{b})\ln(x)$ dans le développement asymptotique de $z(x,\underline{a},\underline{b})$ (défini par (2.1)) à l'infini en x.

Afin d'alléger les notations, on note $\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})$ le coefficient $c_{\frac{m-n+2}{2}}(\underline{a},\underline{b})$.

Il est désormais plus judicieux de travailler avec la nouvelle transformation de Green-Liouville suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{z} = \widetilde{z}(x,\underline{a},\underline{b}) = \displaystyle\int^x \frac{\sqrt{P_m(t,\underline{a})} - \mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{\sqrt{Q_n(t,\underline{b})}}dt \\ \\ \Psi(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{P_m(x,\underline{a})} - \mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{\sqrt{Q_n(x,\underline{b})}}}\Phi(x,\underline{a},\underline{b}). \end{cases} \tag{3.40}$$

Les propriétés de quasi-homogénéité (2.2) et (2.5) restent encore valables pour les applications $(x,\underline{a},\underline{b}) \mapsto \widetilde{z}(x,\underline{a},\underline{b})$ et $(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) \mapsto x(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$ respectivement.

L'équation (1.1) est alors transformée en l'équation préparée :

$$-\frac{d^2}{d\widetilde{z}^2}\Psi + \left(1 + \frac{4\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{(m-n+2)\widetilde{z}} - H(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})\right)\Psi = 0 \tag{3.41}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} H(\widetilde{z},a,\underline{b}) = 1 + \dfrac{4\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{(m-n+2)\widetilde{z}} - \dfrac{P_m(x,\underline{a})}{(\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b}))^2} \\ -\Big[\dfrac{P_m'(x,\underline{a})Q_n'(x,\underline{b}) - 2Q_n''(x,\underline{b})(P_m(x,\underline{a}) - \mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})\sqrt{P_m(x,\underline{a})})}{8\sqrt{P_m(x,\underline{a})}(\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b}))^3} \\ \qquad +Q_n(x,\underline{b})\Big(\dfrac{1}{4}\dfrac{P_m''(x,\underline{a})}{\sqrt{P_m(x,\underline{a})}(\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-\mathfrak{c}(\underline{a}))^3} \\ \qquad -\dfrac{1}{16}\dfrac{(P_m'(x,\underline{a}))^2(5\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-2\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b}))}{(P_m(x,\underline{a})-\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})\sqrt{P_m(x,\underline{a})})^3(\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b}))}\Big) \\ +\dfrac{3}{16}\dfrac{(Q_n'(x,\underline{b}))^2}{Q_n(x,\underline{b})(\sqrt{P_m(x,\underline{a})}-\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b}))^2}\Big] \,|_{\widetilde{z}} = \widetilde{z}(x,\underline{a},\underline{b}) \end{array}\right. \tag{3.42}$$

et

$$H(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \frac{(m-n)(m-n+4)}{4(m-n+2)^2\widetilde{z}^2} + O(\widetilde{z}^{-2-\frac{2}{m-n+2}}) \in \frac{1}{\widetilde{z}^2}\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}]\{\widetilde{z}^{-\frac{2}{m-n+2}}\}. \tag{3.43}$$

De plus, H satisfait à la propriété de quasi-homogénéité (2.8).

Nous montrons aisément l'existence d'une unique solution formelle

$$\Psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = e^{-\widetilde{z}}\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$$

de (3.41) satisfaisant à :

$$\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \widetilde{z}^{-\frac{2\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{m-n+2}}\mu_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$$

où $\mu_+ \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[\widetilde{z}^{-\frac{2}{m-n+2}}]]$ de teme constant 1.

Par quasi-homogénéité ($\mathfrak{c}(\omega.\underline{a},\omega.\underline{b}) = -\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})$), nous déduisons l'existence d'une autre solution formelle

$$\Psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = e^{+\widetilde{z}}\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = e^{+\widetilde{z}}\widetilde{z}^{+\frac{2\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{m-n+2}}\mu_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$$

de (3.41) telle que

$$\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \psi_+(\omega^{\frac{m-n+2}{2}}\widetilde{z},\omega.\underline{a},\omega.\underline{b}).$$

À partir de maintenant, l'analyse est similaire à celle produite pour le cas m impair et cela conduit aux résultats suivants :

Théorème 3.1. — *Pour $m-n$ pair, il existe une unique série formelle $\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \widetilde{z}^{-\frac{2\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{m-n+2}}\mu_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$ où $\mu_+ \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[\widetilde{z}^{-\frac{2}{m-n+2}}]]$ de terme constant 1 (resp. $\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \widetilde{z}^{+\frac{2\mathfrak{c}(\underline{a},\underline{b})}{m-n+2}}\mu_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$, $\mu_- \in \mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[\widetilde{z}^{-\frac{2}{m-n+2}}]]$ de terme constant 1), telle que $e^{-\widetilde{z}}\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$ (resp. $e^{+\widetilde{z}}\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b})$) est solution de l'équation (3.41). De plus,*

$$\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = \psi_+(\omega^{\frac{m-n+2}{2}}\widetilde{z},\omega.\underline{a},\omega.\underline{b}). \tag{3.44}$$

Les séries formelles $\psi_\pm$ sont résurgentes par rapport à $\widetilde{z}$, dépendent holomorphiquement de $\underline{a}$ et $\underline{b}$, et sont sommables de Borel par rapport à $\widetilde{z}$, uniformément par rapport à $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sur tout compact.

Il existe un ensemble de fonctions entières $S_k(\underline{a},\underline{b})$, les multiplicateurs *de Stokes, tel que :*

$$\begin{cases} \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) & \text{si} \quad k \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_{2e^{ki\pi}}\psi_+(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) = S_k(\underline{a},\underline{b})\psi_-(\widetilde{z},\underline{a},\underline{b}) & \text{si} \quad k-1 \in 2\mathbb{Z} \\ \Delta_\tau\psi_\pm = 0 \qquad \text{sinon}, \end{cases}$$

où Δ_τ désigne la dérivation étrangère à τ.

Remarque 3.2. — Dans ce théorème, du fait de l'appartenance des solutions formelles μ_+ et μ_- à $\mathbb{C}[\underline{a},\underline{b}][[z^{-\frac{2}{m-n+2}}]]$, les dérivations étrangères ont besoin d'être indexées seulement par les éléments de la surface de Riemann de $\zeta^{\frac{2}{m-n+2}}$. Ainsi, *a priori* seulement $m-n+2$ multiplicateurs de Stokes gouvernent la structure résurgente.

Bibliographie

[1] Bakken (I.). — On the central connection problem for a class of ordinary differential equations. Funkcial. Ekvac. 20, no. 2, p. 115-156 (1977).

[2] Bender (C.M.), Boettcher (S.), Meisinger (P.N.). — *PT*-symmetric quantum mechanics, J. Math. Phys. 40, 2201 (1999).

[3] Bender (C.M.), Berry (M.), Mandilara (A.). — Generalized *PT* symmetry and real spectra. J. Phys. A 35, no. 31, p. 467-471 (2002).

[4] Candelpergher (B.), Nosmas (C.), Pham (F.). — Premiers pas en calcul étranger, Annales de l'Institut Fourier 43, no. 1, p. 201-224 (1993).

[5] Candelpergher (B.), Nosmas (C.), Pham (F.). — Approche de la résurgence, Actualités mathématiques, Hermann, Paris (1993).

[6] Costin (O.). — On Borel summation and Stokes phenomena for rank-1 nonlinear systems of ordinary differential equations, Duke Math. J. 93, no. 2, p. 289-344 (1998).

[7] Costin (O.), Costin (R.D.). — On the formation of singularities of solutions of nonlinear differential systems in antistokes directions, Invent. Math. 145, no. 3, p. 425-485 (2001).

[8] Delabaere (E.), Pham (F.). — Unfolding the quartic oscillator, Ann. Physics 261, no. 2, p. 180-218 (1997).

[9] Delabaere (E.), Pham (F.). — Eigenvalues of complex Hamiltonians with PT-symmetry, Phys. Lett. A 250, no. 1-3, p. 25-32 (1998).

[10] Delabaere (E.), Rasoamanana (J.M.). — Resurgent deformation of an ordinary differential equation of order 2, Pacific Journal of Mathematics, 223, no 1, p. 35-93 (2006).

[11] Delabaere (E.), Rasoamanana (J.M.). — Sommation effective d'une somme de Borel par séries de factorielles, Annales de l'Institut Fourier, 57, no 2, p. 421-456 (2007).

[12] Delabaere (E.), Trinh (D.T.). — Spectral analysis of the complex cubic oscillator, J.Phys. A: Math. Gen. 33, no. 48, p. 8771-8796 (2000).

[13] Dorey (P.), Dunning (C.), Tateo (R.). — Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in PT-symmetric quantum mechanics, J. Phys. A 34, no. 28, p. 5679-5704 (2001).

[14] Écalle (J.). — Les algèbres de fonctions résurgentes, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1981.05 (1981).

[15] Écalle (J.). — Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1981.06 (1981).

[16] Écalle (J.). — L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux, Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1985.05 (1985).

[17] Écalle (J.). — Cinq applications des fonctions résurgentes, preprint 84T 62, Orsay, (1984).

[18] Fedoryuk (M.V). — Asymptotic methods for linear ordinary differential equations, Moscow: Nauta, (1983).

[19] Gelfreich (V.), Sauzin (D.). — Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51, no 2, p. 513-567 (2001).

[20] Loday-Richaud (M.). — Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation, Expositiones Mathematicae 13, no 2-3, p. 116-162 (1995).

[21] Loday-Richaud (M.). — Rank reduction, normal forms and Stokes matrices, Expo. Math. 19, no. 3, p. 229-250 (2001).

[22] Malgrange (B.). — Sommation des séries divergentes, Expo. Math. 13, p. 163-222 (1995).

[23] Mullin (F.E.). — On the regular perturbation of the subdominant solution to second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients., Funkcial. Ekvac. 11, p. 1-38 (1968).

[24] Olivé (C.), Sauzin (D.), Seara (T.). — Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation, Ann. Inst. fourier, Grenoble 53, 4, p. 1185-1235 (2003).

[25] Ramis (J.-P.). — Les séries k-sommables et leurs applications, Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceeding Les Houches (1979), Springer Notes in Physics 126, p. 178-199 (1980).

[26] Ramis (J.-P.). — Phénomène de Stokes et resommation, C.R.Acad.Sc. Paris, t.301, p. 99-102 (1985).

[27] Ramis (J.-P.). — Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoirs of the American Mathematical Society 296, p. 1-95 (1984).

[28] Ramis (J.-P.). — Séries divergentes et théories asymptotiques, Suppl. au bulletin de la SMF, Panoramas et Synthèses 121 (1993), Paris :Société Mathématique de France.

[29] Ramis (J.-P.), Schäfke (R.). — Gevrey separation of fast and slow variables, Nonlinearity 9 (1996), no 2, p. 353-384.

[30] Sauzin (D.). — Resurgent functions and splitting problems, à paraître dans RIMS koukyuroku (Kyoto).

[31] Sibuya (Y.). — Global Theory of a Second Order Linear Differential Equation with a Polynomial Coefficient, Mathematics Studies 18 (1975), North-Holland Publishing Company.

[32] Shin (K.C.). — On the reality of the eigenvalues for a class of PT-symmetric oscillators, Comm. Math. Phys. 229, no. 3, p. 543-564 (2002).