ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

MOHA BOUTAT

Quasi-homogénéité des applications holomorphes propres d'un domaine quasi-disqué sur un domaine disqué

Tome XX, nº 4 (2011), p. 759-765.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_4_759_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XX, n° 4, 2011
pp. 759–765

Quasi-homogénéité des applications holomorphes propres d'un domaine quasi-disqué sur un domaine disqué

Moha Boutat[1]

Résumé. — Nous proposons une généralisation d'un résultat de F. Berteloot et G. Patrizio [1], aux cas des applications holomorphes propres entre domaines quasi-disqués et non nécessairement bornés.

Abstract. — A result of F. Berteloot and G.Patrizio [1] states that if f is a proper holomorphic map between two bounded complete circular domains Ω_1 and Ω_2 in $\mathbf{C^{n+1}}(n \geqslant 1)$, such that $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ and such that the principal part f_p of the Taylor expansions of f at the origine is nondegenerated i.e ${f_p}^{-1}\{0\} = \{0\}$, then $f \equiv f_p$.
Here we propose to generalize their result in the case where Ω_1 is a complete quasi-circular domain and Ω_2 is a complete circular domain. Moreover this proof does not use the tools of projective dynamics of J. E. Fornaess and N. Sibony [3].

1. Introduction

On a le résultat suivant dû à F. Berteloot et G. Patrizio [1] : soit f une application holomorphe propre d'un domaine disqué Ω_1 de $\mathbf{C^{n+1}}(n \geqslant 1)$ sur un autre domaine disqué Ω_2 de $\mathbf{C^{n+1}}(n \geqslant 1)$. Supposons Ω_1 et Ω_2 bornés, que f est non-dégénérée i.e $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ et de plus que la partie f_p de plus petit degré du développement de Taylor de f en 0 est non-dégénérée, alors on a : $f \equiv f_p$ c'est-à-dire que f est homogène.

(*) Reçu le 03/06/2010, accepté le 20/10/2011

(1) Université d'Angers, UMR 6093 LAREMA, 2 bd Lavoisier 49045 Angers cedex 01.
moha.boutat@univ-angers.fr

Dans [2] j'ai présenté une généralisation partielle de ce résultat dans le cas Ω_1 quasi-disqué, Ω_2 disqué et Ω_1, Ω_2 non nécessairement bornés. J'ai montré que : $j_{\Omega_2} \circ f_p = (j_{\Omega_1})^p$ où j_{Ω_1},j_{Ω_2} sont les jauges respectives de Ω_1 et Ω_2.

On propose ici de traiter le cas où Ω_1 est quasi-disqué et Ω_2 est disqué. De plus, la preuve ne fait pas appel aux outils de la dynamique projective de J. E. Fornaess et N. Sibony [3]. Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME. — *Soient Ω_1,Ω_2 deux domaines bornés de $\mathbf{C^n}$ tels que : Ω_1 est quasi-disqué de type $d = (d_1, \cdots, d_n)$ et Ω_2 est disqué.*

Soit $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application holomorphe propre et non-dégénérée. Soit f_p l'application quasi-homogène, de plus petit degré, obtenue dans le développement de f. Sous les conditions f_p non-dégénérée et Ω_1 ou Ω_2 pseudoconvexe, alors on a : $f \equiv f_p$.

Je remercie J.J. Loeb pour les nombreuses remarques et discussions que nous avons eues pendant l'élaboration de ce travail.

2. Préliminaires

Dans cet article, toutes les définitions se trouvent dans [2]. On rappelera seulement les notions et les résultats dont on aura besoin.

Soit $d = (d_1, \cdots, d_n)$ un n-uplé de nombres naturels premiers entre eux. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{C^n}$ et $t \in \mathbf{C}$. On pose $t^d x = (t^{d_1} x_1, \cdots, t^{d_n} x_n)$.

A la place d'une norme, on muni $\mathbf{C^n}$ d'une quasi-norme, notée $\| \quad \|_d$ et définie par : $\| x \|_d = \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^{\frac{1}{d_i}}$ pour $x \in \mathbf{C^n}$.

2.1. Jauge d'un domaine quasi-disqué

Soient X un domaine (ouvert connexe) de $\mathbf{C^n}$ et $d = (d_1, \cdots, d_n)$ un n-uplé de nombres naturels premiers entre eux.

DÉFINITION 2.1. — *X est quasi-disqué de type d si :*

$\forall x \in X, \quad t \in \mathbf{C}, \mid t \mid \leqslant 1 \quad : \quad t^d x \in X.$

Remarque. — Si $d = (1, \cdots, 1)$, on dit que X est disqué.

Comme dans le cas disqué, on définit la notion de jauge de X.

Définition 2.2. — *Soit $X \subset \mathbf{C^n}$ un domaine quasi-disqué de type d. La jauge j_X de X est définie par :* $\forall x \in \mathbf{C^n}, \quad j_X(x) = inf\{t > 0 : (t^{-1})^d x \in X\}$.

Quelques propriétés de la fonction Jauge sont données par les propositions 2.3 et 2.4 suivantes. On trouve la preuve de la proposition 1 dans [2] et celle de la proposition 2 dans [5].

Proposition 2.3. —

1) $\forall x \in \mathbf{C^n}, \forall t \in \mathbf{C}, \mid t \mid\leqslant 1 : j_X(t^d x) =\mid t \mid j_X(x)$.

2) $X = \{x \in \mathbf{C^n} : j_X(x) \leqslant 1\}$ *et* j_X *est semi-continue supérieurement.*

3) $\exists C > 0$ *tel que* : $\forall x \in \mathbf{C^n}, \quad j_X(x) \leqslant C \parallel x \parallel_d$.

Proposition 2.4. — *On a les équivalences suivantes :*

1) X est pseudo-convexe.

2) $\ln(j_X)$ *est psh (plurisousharmonique).*

3) j_X est psh.

2.2. Application quasi-homogène

Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines de $\mathbf{C^n}$ tels que : Ω_1 est quasi-disqué de type $d = (d_1, \cdots, d_n)$ et Ω_2 est disqué. Soit k un entier naturel non nul et f une application holomorphe propre de Ω_1 dans Ω_2.

Définition 2.5. — *f est dite quasi-homogène de type $d = (d_1, \cdots, d_n)$ et de degré k si :* $\forall x \in \mathbf{C^n}, \quad \forall t \in \mathbf{C} : \quad f(t^d x) = t^k f(x)$.

La proposition suivante, est l'analogue de la décomposition de Taylor de f en 0. Les détails de la preuve sont dans [2].

Proposition 2.6. — *Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines de $\mathbf{C^n}$ tels que : Ω_1 est quasi-disqué de type d, Ω_2 est disqué et $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application holomorphe non-dégénérée. Alors sur Ω_1, on peut écrire :* $f = \sum_{k \geqslant p} f_k$ *où f_k est une application quasi-homogène de type d, de degré k et* $p \in \mathbf{N}^*$.

En vue de la preuve du théorème principal, on utilise le lemme 2.7 suivant :

Lemme 2.7. — *Soient X un domaine borné de $\mathbf{C^n}$, φ une fonction psh, positive, continue sur $\mathbf{C^n}$ et telle que $\varphi \not\equiv 0$ sur ∂X, alors il existe $x_0 \in \partial X$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1) $\varphi(x_0) > 0$.

2)Il n'existe pas de disque holomorphe contenu dans ∂X *et passant par ce point* x_0.

Preuve. — Posons $C = \sup_{x\in\partial X} \varphi(x)$ où C est strictement positif.

On choisit $D > 0$ tel que $\sup_{x\in\partial X} D \parallel x \parallel^2 < C$ puis on considère la fonction continue h définie par :

$$\forall x \in \mathbf{C^n}, \quad h(x) = D \parallel x \parallel^2 + \varphi(x).$$

Soit $x_0 \in \partial X$ tel que : $h(x_0) = \sup_{x\in\partial X} h(x)$. Nécessairement $\varphi(x_0) > 0$, car : si $\varphi(x_0) = 0$, alors, on aurait : $\sup_{x\in\partial X} h(x) \leqslant \sup_{x\in\partial X} D \parallel x \parallel^2 < C$, et donc $\sup_{x\in\partial X} h(x) < \sup_{x\in\partial X} \varphi(x)$. Ceci contredit le fait que : $\sup_{x\in\partial X} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in\partial X} h(x)$.

Pour le deuxième point, on suppose qu'il existe un disque analytique non constant $\gamma : \triangle \longrightarrow \partial X$ tel que $\gamma(0) = x_0$.

La fonction h est strictement psh. Comme $(h\circ\gamma)(0) = h(x_0)$, la fonction $h\circ\gamma$ atteint son maximum à l'origine du disque unité et est donc constante sur $\triangle$. Ceci est impossible car h est une fonction strictement psh.

3. Preuve du théorème

Étape 1 : Soient Ω_1,Ω_2 deux domaines bornés de $\mathbf{C^n}$ avec : Ω_1 est quasi-disqué de type $d = (d_1, \cdots, d_n)$ et Ω_2 est disqué. $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application holomorphe propre et non-dégénérée. D'après la proposition 2.6, on peut écrire : $f = \displaystyle\sum_{k\geqslant p} f_k$ où f_p est l'application quasi-homogène, de plus petit degré.

Considérons trois sous-ensembles E, F et G du bord $\partial\Omega_1$ de Ω_1, définis par : $E = \left\{x \in \partial\Omega_1 : \frac{1}{t^p} f(t^d x) = f_p(x), \text{pour} \mid t \mid < 1\right\}$,

$F = \left\{x \in \partial\Omega_1 : \cap_{k\geqslant p+1}\{f_k(x) = 0\}\right\}$. G est l'ensemble des x appartenant à $\partial\Omega_1$ tels que : Il n'existe pas de disque holomorphe, non constant, passant par x et contenu dans $\partial\Omega_1$. Dans la suite par disque holomorphe, on désigne une application holomorphe, non constante, du disque unité $\triangle$ dans $\mathbf{C^n}$.

Le lemme suivant permet de comparer ces trois sous-ensembles du bord de Ω_1.

LEMME 3.1. — On a :

1) $E = F$,

2) $G \subset E$.

Preuve. — Pour le point 1), montrons d'abord la première inclusion $F \subset E$.

Soient $x \in F$ et $k \geqslant p+1$ un entier naturel. La quasi-homogénéité de f_k nous permet d'écrire que : $f_k(t^d x) = t^k f_k(x)$ pour $|\ t\ |< 1$. Comme $f_k(x) = 0$, cette égalité implique que $f_k(t^d x) = 0$ pour $|\ t\ |< 1$.

Par conséquent, pour $0 <|\ t\ |< 1$, on a : $\frac{1}{t^p} f(t^d x) = \frac{1}{t^p} f_p(t^d x) = f_p(x)$, par la quasi-homogénéité de f_p. On en déduit alors que $x \in E$.

Il nous reste à montrer la deuxième inclusion $E \subset F$. Pour $x \in E$, on a d'une part : $f(t^d x) = t^p f_p(x)$ et d'autre part, par la décomposition de f, on a :

$$f(t^d x) = \sum_{k \geqslant p} f_k(t^d x) = \sum_{k \geqslant p} t^k f_k(x)$$

Par unicité du développement de Taylor, par rapport à t en 0, on en déduit que $f_k \equiv 0$ pour $k \geqslant p+1$. Par conséquent $E = F$.

Montrons le point 2) par l'absurde.

Prenons $x_0 \in G$ et supposons que $x_0 \notin E$.

Définissons le disque holomorphe $\gamma_{f_p(x_0)}$, passant par $f_p(x_0)$, par :

$$\gamma_{f_p(x_0)}(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t^d x_0)}{t^p} & si \quad 0 <|\ t\ |< 1 \\ f_p(x_0) & si \qquad\qquad t = 0 \end{cases}$$

$\gamma_{f_p(x_0)}$ est holomorphe et non constante puisqu'on suppose que $x_0 \notin E$. Vérifions que $\gamma_{f_p(x_0)}(t) \in \partial\Omega_2$ pour $0 \leqslant|\ t\ |< 1$, c'est-à-dire $j_{\Omega_2}\big(\gamma_{f_p(x_0)}(t)\big) = 1$.

On a montré dans [2] que : $j_{\Omega_2} \circ f_p = (j_{\Omega_1})^p$. Par conséquent, si $x_0 \in \partial\Omega_1$ alors $f_p(x_0) \in \partial\Omega_2$. On a même : ${f_p}^{-1}(\partial\Omega_2) = \partial\Omega_1$.

Pour $0 <|\ t\ |< 1$, on a :

$$\begin{aligned} j_{\Omega_2}\Big(\frac{f(t^d x_0)}{t^p}\Big) &= \frac{1}{|\ t\ |^p} j_{\Omega_2}\big(f(t^d x_0)\big) = \frac{1}{|\ t\ |^p}\big(j_{\Omega_2} \circ f\big)(t^d x_0) \\ &= \frac{1}{|\ t\ |^p}\big(j_{\Omega_1}(t^d x_0)\big)^p = \frac{1}{|\ t\ |^p}\ |\ t\ |^p\ \big(j_{\Omega_1}(x_0)\big)^p = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent $\gamma_{f_p(x_0)}(\triangle) \subset \partial\Omega_2$ (la preuve n'est pas terminée).

Dans la suite, en appliquant le théorème de Remmert sur l'image d'une application holomorphe propre et le théorème sur la structure locale des ensembles analytiques irréductibles de dimension 1, on va montrer qu'il existe une application holomorphe $\widetilde{\gamma}_{x_0} : \triangle \longrightarrow \partial\Omega_1$ tel que $\widetilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$. En gros, puisque ${f_p}^{-1}(\partial\Omega_2) = \partial\Omega_1$, on va "relever" par l'application f_p le disque holomorphe $\gamma_{f_p(x_0)}$ passant par $f_p(x_0)$, pour obtenir un disque holomorphe passant par x_0. En admettant l'existence de $\widetilde{\gamma}_{x_0}$, cela conduit à une contradiction car $x_0 \in G$. Finalement $x_0 \in E$, ce qui termine la preuve du point 2) du lemme 3.1, soit $G \subset E$.

Étape 2 : On va admettre certains résultats sur les ensembles anlytiques. Pour les énoncés exacts et les preuves complètes, on peut se référer, par exemple, à [5].

La proposition suivante nous place dans les hypothèses du théorème de Remmert. C'est un résultat commun dont on omettra la preuve.

Proposition 3.2. — *Soit $g : \triangle \longrightarrow \mathbf{C^n}$ une application holomorphe non constante telle que $g(0) = a$. Alors il existe un voisinage U de* 0 *et un voisinage V de a tels que : $g : U \longrightarrow V$ est une application holomorphe propre.*

Revenons à l'existence d'un disque holomorphe passant par x_0.

Appliquons la proposition 3.2 à l'application holomorphe $\gamma_{f_p(x_0)}$.

Soit U un tel ouvert et choisissons U contenant un disque $\triangle_{r_0}$ de rayon $r_0 \in]0,1[$. Puisque la restriction de $\gamma_{f_p(x_0)}$ à $\triangle_{r_0}$ est aussi propre, par le théorème de Remmert, l'image $\gamma_{f_p(x_0)}(\triangle_{r_0})$ de $\triangle_{r_0}$ est un ensemble analytique dans V, irréductible et de dimension 1.

Puisque f_p est propre, fixons des voisinages V de $f_p(x_0)$ et W de x_0 tels que ${f_p}^{-1}(f_p(x_0)) \cap \overline{W} = {f_p}^{-1}(f_p(x_0)) \cap W = \{x_0\}$. On peut supposer que $f_p(W) = V$ car f_p est une application ouverte. Supposons aussi V est suffisament petit pour avoir $\Gamma := \gamma_{f_p(x_0)}(\triangle_{r_0})$ analytique dans V. Comme f_p est holomorphe, on a : ${f_p}^{-1}(\Gamma) := X \subset W$ est un ensemble analytique, de dimension pure 1, dans W. Comme $\Gamma \subset \partial\Omega_2$, on a $X \subset {f_p}^{-1}(\partial\Omega_2) = \partial\Omega_1$.

On choisit une composante irréductible A de la décomposition du germe de X au point x_0 en germes analytiques irréductibles, contenant x_0.

Alors A est l'image du disque unité par une application holomorphe, notée $\widetilde{\gamma}_{x_0}$, dont on peut supposer $\widetilde{\gamma}_{x_0}(0) = x_0$. L'existence de $\widetilde{\gamma}_{x_0}$ résulte du théorème sur la structure locale des ensembles analytiques irréductibles de dimension 1. C'est un résultat qu'on peut trouver, par exemple, dans [5].

Étape 3 : Avant de vérifier que $f \equiv f_p$ sur Ω_1, montrons d'abord que $\partial\Omega_1 = E$.

Supposons qu'il existe z_0 tel que $z_0 \in \partial\Omega_1$ et $z_0 \notin E$. Alors il existe $k_0 \geqslant p+1$ tel que $f_{k_0}(z_0) \neq 0$. Pour $x \in \mathbf{C^n}$, définissons la fonction psh continue φ, par : $\varphi(x) = \| f_{k_0}(x) \|^2$.

On applique le Lemme 2.7 à φ, alors il existe $x_0 \in \partial\Omega_1$ tel que : $\varphi(x_0) > 0$ et de plus, il n' existe pas de disque holomorphe passant par ce point x_0. La première affirmation implique que $x_0 \notin F$ puisque $f_{k_0}(x_0) \neq 0$. Ceci implique que $x_0 \notin E$, car $E = F$. La deuxième affirmation implique que $x_0 \in G$. Ce qui aboutit à une contradiction puisque $G \subset E$, d'après le Lemme 3.1. On conclut alors à l'égalité $\partial\Omega_1 = E$.

Vérifions que $f \equiv f_p$ sur Ω_1. Pour $x = 0$, on a $f(0) = f_p(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, on a : $0 < j_{\Omega_1}(x) < 1$ et $\left(\frac{1}{j_{\Omega_1}(x)}\right)^d x \in \partial\Omega_1$ puisque $j_{\Omega_1}\left(\left(\frac{1}{j_{\Omega_1}(x)}\right)^d x\right) = 1$. En posant $t = j_{\Omega_1}(x)$, on a : $f(x) = f\big(t^d(\frac{1}{t})^d x\big) = t^p f_p\big((\frac{1}{t})^d x\big) = t^p \frac{1}{t^p} f_p(x) = f_p(x)$.

Ceci termine la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] Berteloot (F.) and Patrizio (G.). — A Cartan theorem for proper holomorphic mappings of complete circular domains, Advances in math 153, p. 342-352 (2000).

[2] Boutat (M.). — Applications holomorphes propres d'un domaine quasi-disqué sur un domaine disqué, Bulletin des Sciences Mathématiques Volume 133, Issue 4, May p. 335-347 (2009).

[3] Fornaess (J. E.) and Sibony (N.). — Complex dynamics in higher dimensions, in "Complex Pluripotential theory,", NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., Vol. 439, pp. 131-186, Kluwer Academic, Dordrecht (1994).

[4] Barth (T.). — The Kobayashi indicatrix at the center of a circular domain, Proc. Amer. Math. Soc. 88, p. 527-530 (1983).

[5] Chirka (E.M.), Delbeault (P.), Khenkin (G.M.), Vitushkin (A.G.). — Introduction to complex analysis, Springer-Verlag (1997).