ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Françoise Dal'bo, Cyril Lecuire

Introduction

Tome XXIII, nº 5 (2014), p. i-iii.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2014_6_23_5_r1_0>

Introduction

En Novembre 2012 à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, le GDR Platon 3341 a organisé une rencontre *"Regards croisés sur la géométrie hyperbolique et l'arithmétique"* dont le fil conducteur était de mettre en lumière des passerelles entre la théorie des nombres et la géométrie, et de montrer l'intérêt de les emprunter. Slavyana Geninska, Antonin Guilloux, Alex Kontorovich, Jouni Parkkonen et Alan Reid en étaient les orateurs. Cet ouvrage est construit autour de leurs notes. Mark Baker, François Delgove, Frédéric Paulin et Nicolas Rétailleau ont été associés à ce projet.

L'arithmétique et la géométrie entretiennent des liens très étroits, notamment via les actions de groupes. Illustrons cette affirmation par deux exemples qui dans des cadres simples préfigurent bien le contenu des articles de cet ouvrage.

Un triplet d'entiers pythagoriciens (x, y, z) vérifie l'équation $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Une question naturelle est de chercher des triplets dont certains membres (ou tous) ont aussi peu de facteurs premiers que possible. Ce problème est relié à la densité des orbites linéaire de $SO_Q(\mathbb{Z})$. Cette reformulation permet de s'appuyer sur des méthodes puissantes pour construire une infinité de triplets pythagoricien avec un nombre borné (la borne étant explicite) de facteurs premiers.

D'un autre côté, des constructions arithmétiques ont fourni les premiers exemples de groupes paveurs des espaces symétriques. Les plus simples de ces groupes sont certainement le groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$ et ses sous-groupes de congruence qui agissent sur le demi-plan de Poincaré. En géométrie hyperbolique, les groupes arithmétiques donnent lieu à une famille de variétés particulièrement convoitées parce que leurs origines arithmétiques permettent d'avoir une compréhension plus fine de leur géométrie. Ils ont ainsi permis de construire les premiers exemples de variétés isospectrales non isométriques.

Les trois premiers articles cet ouvrage ont en commun le fait d'utiliser la géométrie hyperbolique pour établir des résultats d'arithmétique.

A. Kontorovitch expose une méthode dite du "crible affine" introduite par J. Bourgain, A. Gamburd et P. Sarnak qui s'appuie sur une reformulation de problèmes portant sur la présence de nombres premiers dans un ensemble d'entiers donné, en termes d'actions de sous-groupes ou semi-groupes de $GL(n, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^n$ et de comptages de points d'une orbite. Il illustre la force de cette méthode en donnant des idées de la démonstration récente de Y. Zhang sur l'existence d'une infinité de nombres premiers consécutifs d'écarts bornés.

F. Paulin et J. Parkkonen développent une approche par la géométrie hyperbolique pour résoudre des problèmes d' équidistribution de points définis arithmétiquement. Par exemple, en appliquant à $SL(2,\mathbb{Z})$ un résultat sur le comptage des images par un réseau d'un horocycle du demi-plan hyperbolique, ils retrouvent et généralisent la célèbre formule de Mertens sur le comportement asymptotique de la somme, quand n tend vers l'infini, des cardinaux des groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ pour k variant de 1 à n.

Le texte de A. Guilloux est écrit dans la même veine que le précédent mais dans un contexte p-adique. Son fil rouge est un théorème d'équidistribution de sphères sur des objets d'origine arithmétique, les arbres de Hecke, démontré en adaptant une méthode introduite par G. Margulis pour dénombrer les géodésiques fermées sur des variétés Riemanniennes de courbure négative. L'auteur explique notamment la notion de correspondance de Hecke reliant le problème de départ à une propriété de mélange d'un flot géodésique sur des espaces symétriques adéliques.

Les quatre derniers textes partent de l'arithmétique pour résoudre des problèmes de géométrie hyperbolique.

F. Delgove et N. Retailleau utilisent le lien entre les quaternions hamiltoniens et le bord à l 'infini de l'espace hyperbolique de dimension 5 pour classifier les hexagones hyperboliques de cet espace et montrer que les hexagones à angles droits sont déterminés par les longueurs quaternioniques de trois côtés consécutifs.

Le texte de M. Baker et A. Reid se place dans la lignée des travaux de W. Thurston sur les variétés hyperboliques de dimension 3. La motivation des auteurs est de comprendre la topologie d'une famille de variétés $M(d,I)$ quotients de $\mathbb{H}^3$ par des sous-groupes de congruence $\Gamma(I)$ de groupes de Bianchi $PSL(2,O_d)$, où d est un entier positif qui n'est pas un carré, et I est un idéal de l'anneau O_d. En s'appuyant sur le caractère arithmétique de ces groupes, ils décrivent la forme de ces quotients et amorcent une liste de couples (d,I) pour lesquels la variété $M(d,I)$ est homéomorphe au complémentaire d'un entrelacs dans S^3.

S. Geninska présente un panorama sur différentes caractérisations des groupes Fuchsiens arithmétiques portant sur le spectre des traces de leurs éléments. L'intersection de cet ensemble avec $[n,n+1]$ est uniformément bornée si le groupe est arithmétique. La réciproque est formulée par P. Sarnak sous forme de conjecture. S. Geninska la démontre en présence d'isométries paraboliques. Dans le cas des sous-groupes discrets de $(PSL(2,\mathbb{R}))^n$ avec $n>1$, elle relie leur arithméticité à la nature de leurs ensembles limites sur les différents bords à l'infini de l'espace $(\mathbb{H}^2)^n$.

Le texte de A. Reid est motivé par des questions ouvertes portant sur le lien entre le spectre des longueurs des géodésiques fermées d'une variété riemannienne et sa géométrie. Il donne un aperçu des résultats récents sur l'isospectralité dans le cadre des variétés hyperboliques arithmétiques, et des pistes pour les démontrer. Notons que pour une variété $\mathbb{H}^n/\Gamma$, le spectre des longueurs est naturellement relié à celui des traces de Γ. Partant de ce lien A. Reid montre que deux variétés hyperboliques artihmétiques qui ont le même spectre rationnel des longueurs sont commensurables. Dans le cas $n = 2$, il montre que le spectre des longueurs suffit à déterminer la classe de commensurabilité.

Nous remercions Jean-Pierre Otal pour la confiance qu'il nous a témoignée et les auteurs pour leurs contributions.

Nous remercions également le secrétariat des Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour la réalisation matérielle de cet ouvrage.

Françoise Dal'bo et Cyril Lecuire