

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

DAHER MOHAMMAD

Interpolation des espaces de Hardy vectoriels

Tome XXIV, n° 2 (2015), p. 389-425.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2015_6_24_2_389_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2015, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Interpolation des espaces de Hardy vectoriels

DAHER MOHAMMAD⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On étudie d’abord la propriété de Radon-Nikodym analytique pour les espaces d’interpolation réels ou complexes associés à un couple (A_0, A_1) d’espaces de Banach tels que A_0 soit dense dans A_1 .

On montre que $[\ell^\infty(A_0), (\ell^\infty(A_1))_\theta]$ est un sous-espace strict de $[\ell^\infty(A_0), (\ell^\infty(A_1))^\theta]$, sauf si $A_0 = A_1$. On compare ensuite les interpolés d’espaces de fonctions harmoniques $h^p(\mathbb{D}, A_j)$ aux fonctions harmoniques à valeurs dans l’interpolé, lorsque l’identité $i : A_0 \rightarrow A_1$ est un opérateur de Radon-Nikodym. On en déduit un exemple où $L^p(\mathbb{T}, V^\theta)$ est un sous-espace strict de $[L^p(\mathbb{T}, V_0), L^p(\mathbb{T}, V_1)]^\theta$, $1 < p < \infty$.

On étudie parallèlement l’interpolation des espaces de Hardy vectoriels, lorsque i ou i^* est un opérateur de Radon-Nikodym analytique.

ABSTRACT. — We first study the analytic Radon-Nikodym property for the real or complex interpolation spaces associated to a couple (A_0, A_1) of Banach spaces such that A_0 is dense in A_1 .

We show that, unless $A_0 = A_1$, $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ is a proper subspace of $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta$. We compare the interpolates of spaces $h^p(\mathbb{D}, A_j)$ of harmonic functions to the harmonic functions with values in the interpolate, when $i : A_0 \rightarrow A_1$ is a Radon-Nikodym operator. We give an example where $L^p(\mathbb{T}, V^\theta)$ is a proper subspace of $[L^p(\mathbb{T}, V_0), L^p(\mathbb{T}, V_1)]^\theta$, $1 < p < \infty$.

We study in the same way the interpolation of vector valued Hardy spaces, when i or i^* is an analytic Radon-Nikodym operator.

(*) Reçu le 03/12/2012, accepté le 03/12/2014

⁽¹⁾ 32, Rue Jacques Monod 77350 Le Mée sur Seine-France
m.daher@orange.fr

Article proposé par Franck Barthe.

Introduction

Dans tout l'article A_0, A_1 désignent deux espaces de Banach, A_0 étant un sous-espace dense de A_1 ; on note $i : A_0 \rightarrow A_1$ l'application identique, qu'on suppose de norme 1. On étudie d'abord la propriété de Radon-Nikodym analytique pour les espaces d'interpolation réels ou complexes associés à un tel couple ou au couple des duaux.

On suppose ensuite que i ou i^* est un opérateur de Radon-Nikodym et on compare les interpolés des espaces de fonctions harmoniques sur le disque à valeurs dans A_j ou A_j^* aux fonctions harmoniques à valeurs dans l'interpolé. Puis on étudie parallèlement l'interpolation plus délicate des espaces de Hardy vectoriels sur le disque, lorsque i ou i^* est un opérateur de Radon-Nikodym analytique.

Notations et rappels

Si X est un espace de Banach complexe, X^* désigne son dual. Pour $p \in [1, \infty]$ le conjugué de p est noté p' , $1/p' + 1/p = 1$. On note \mathbb{D} le disque unité ouvert dans \mathbb{C} , dt la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore \mathbb{T} . Rappelons qu'une fonction harmonique $h : \mathbb{D} \rightarrow X$ est de la forme

$$h(re^{it}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k r^{|k|} e^{ikt} \quad (0.1)$$

où, pour tout $0 < r < 1$, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|x_k\|_X r^{|k|}$ converge. Désignons par $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ l'espace des fonctions harmoniques $h : \mathbb{D} \rightarrow X$, bornées si $p = \infty$, ou vérifiant si $p \in [1, +\infty[$,

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \|h(re^{it})\|^p dt < +\infty.$$

On notera $h_r \in L^p(\mathbb{T}, X)$ la fonction définie par $h_r(e^{it}) = h(re^{it})$.

Soit P_r le noyau de Poisson : $P_r(\theta) = (1 - r^2)/|1 - re^{i\theta}|^2$. L'espace $L^p(\mathbb{T}, X)$ se plonge isométriquement dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, grâce à l'intégrale de Poisson :

$$f \rightarrow \tilde{f}(re^{it}) = (f * P_r)(t).$$

Si $1 < p \leq \infty$, l'image de $L^p(\mathbb{T}, X)$ coïncide avec le sous-espace de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ formé des fonctions h telles que, pour presque tout t , et toute suite $r_n \rightarrow 1^-$, la suite $h_{r_n}(t)$ converge dans X vers la limite $f(t)$. Alors $h = \tilde{f}$. On identifiera souvent f et \tilde{f} .

Pour $1 \leq p \leq \infty$, notons $H^p(\mathbb{D}, X)$ le sous-espace de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ formé des fonctions holomorphes, c.-à-d. pour lesquelles $x_k = 0$, $k < 0$, et $H^p(\mathbb{T}, X)$ l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, telles que

$$\int_{\mathbb{T}} e^{ikt} f(t) dt = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

La notation $C(\mathbb{T}, X)$ désignera l'espace des fonctions continues sur \mathbb{T} à valeurs dans X et $C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X) = C(\mathbb{T}, X) \cap H^\infty(\mathbb{T}, X)$.

DÉFINITION 0.1. — *Un opérateur borné $T : X \rightarrow Y$ est de Radon-Nikodym (resp. de Radon-Nikodym analytique) si, pour toute fonction $f \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, X)$ (resp. $f \in H^\infty(\mathbb{D}, X)$) la fonction $z \rightarrow T[f(z)]$ admet des limites radiales presque-partout dans Y .*

L'espace X a la propriété de Radon-Nikodym (resp. de Radon-Nikodym analytique) si l'identité de X a la propriété correspondante.

L'espace X a la propriété de Radon-Nikodym si $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X) = L^p(\mathbb{T}, X)$ pour un $p \in]1, +\infty]$; l'égalité a alors lieu pour tout $p \in]1, +\infty]$. L'espace X a la propriété de Radon-Nikodym analytique, notée *RNa*, si on a l'égalité $H^p(\mathbb{D}, X) = H^p(\mathbb{T}, X)$ pour un $p \in [1, +\infty]$; l'égalité a alors lieu pour tout $p \in [1, +\infty]$, voir [8].

Un opérateur faiblement compact $T : X \rightarrow Y$ se factorise par un espace réflexif, donc est un opérateur de Radon-Nikodym.

DÉFINITIONS ET RAPPELS SUR L'INTERPOLATION

Soient $\overline{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation au sens de [4, chap. II], et $\theta \in]0, 1[$.

a) Soient

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}, \quad S^0 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}.$$

On note $\mathcal{F}(\overline{B})$ l'espace des fonctions F à valeurs dans la somme $B_0 + B_1$, continues bornées sur S , holomorphes sur S^0 , telles que l'application $\tau \rightarrow F(j + i\tau)$ soit continue à valeurs dans B_j et telles qu'on ait $\|F(j + i\tau)\|_{B_j} \rightarrow_{|\tau| \rightarrow \infty} 0$, pour $j \in \{0, 1\}$. On le munit de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} = \max\left\{\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{B_0}, \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(1 + i\tau)\|_{B_1}\right\}.$$

L'espace $(B_0, B_1)_\theta = B_\theta = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}(\overline{B})\}$ est de Banach [4, th. 4.1.2], pour la norme définie par

$$\|a\|_{B_\theta} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})}; F(\theta) = a\}.$$

Toute $F \in \mathcal{F}(\overline{B})$ est représentée à partir de ses valeurs au bord grâce à la mesure harmonique [4, sections 4.3, 4.5] :

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} F(i\tau)Q(z, i\tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} F(1+i\tau)Q(z, 1+i\tau) d\tau, \quad z \in S^0. \quad (0.2)$$

b) On note $\mathcal{G}(\overline{B})$ le quotient par le sous-espace des fonctions constantes (à valeurs dans $B_0 + B_1$) de l'espace des fonctions g à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues sur S , holomorphes à l'intérieur de S , telles que

$$(C) : \quad \|g(z)\|_{B_0+B_1} \leq K(g)(1+|z|), \quad z \in S,$$

(C') : $g(j+i\tau) - g(j+i\tau') \in B_j, \forall \tau, \tau' \in \mathbb{R}, j \in \{0, 1\}$, et de plus, la quantité suivante est finie :

$$\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} = \max \left[\begin{array}{l} \sup_{\tau \neq \tau' \in \mathbb{R}} (\|g(i\tau) - g(i\tau')\|_{B_0}) / (\tau - \tau'), \\ \sup_{\tau \neq \tau' \in \mathbb{R}} (\|g(1+i\tau) - g(1+i\tau')\|_{B_1}) / (\tau - \tau') \end{array} \right].$$

Ceci définit bien une norme sur l'espace quotient. D'après la preuve de [4, lemma 4.1.3] les conditions sur g impliquent

$$(C'') : \|g(z) - g(0)\|_{B_0+B_1} \leq |z| \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}, \quad z \in S.$$

L'espace $(B_0, B_1)^\theta = B^\theta = \{g'(\theta); g \in \mathcal{G}(\overline{B})\}$ est de Banach [4, th. 4.1.4] pour la norme définie par

$$\|a\|_{B^\theta} = \inf \{ \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}; g'(\theta) = a \}.$$

c) Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace d'interpolation $B_{\theta,p}$ est défini par

$$B_{\theta,p} = \left\{ a \in B_0 + B_1; \|a\|_{B_{\theta,p}} = \left[\int_{\mathbb{R}^+} (K(a,t)/t^\theta)^p dt/t \right]^{1/p} < +\infty \right\}$$

où

$$K(a,t) = \inf \{ \|a_0\|_{B_0} + t\|a_1\|_{B_1}; a = a_0 + a_1, a_j \in B_j, j = 0, 1 \}.$$

L'espace $(B_{\theta,p}, \|\cdot\|_{B_{\theta,p}})$ est un espace de Banach [4, th. 3.4.2].

Les espaces d'interpolation ont les propriétés suivantes :

(i) L'intersection $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_θ [4, th. 4.2.2] et dans $B_{\theta,p}$ [4, theorem 3.4.2].

(ii) B_θ est un sous-espace isométrique de B^θ [3].

(iii) Le dual de B_θ s'identifie isométriquement à l'espace $(B_0^*, B_1^*)^\theta$ si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1 [4, th. 4.5.1].

(iv) Le dual de $B_{\theta,p}$, $1 < p < \infty$, s'identifie isomorphiquement à l'espace $(B_0^*, B_1^*)_{\theta,p'}$ si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1 [4, th. 3.7.1].

D'autres propriétés seront rappelées au début de la deuxième partie.

1. Géométrie des espaces d'interpolation

Plusieurs résultats de cette partie concernent la propriété *RNa* pour des espaces d'interpolation. Par exemple, si A_0^* a la propriété *RNa*, $[A_{\theta,p}]^*$ hérite de cette propriété, pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. Pour un usage ultérieur on montrera que $[(L^\psi)^*, L^\infty]_\theta$, $\theta \in]0, 1[$ n'a pas la propriété *RNa*, où L^ψ est un certain espace d'Orlicz.

On sait d'après [9] qu'il existe un couple d'interpolation tel que $B_\theta \neq B^\theta$, $\theta \in]0, 1[$. On donnera un autre type d'exemple : si $A_0 \subsetneq A_1$ alors, pour $\theta \in]0, 1[$,

$$[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta \subsetneq [\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta = \ell^\infty(A^\theta).$$

On en déduira que

$$[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta \subsetneq \ell^\infty(A_\theta),$$

alors qu'on a toujours, comme on le verra dans la deuxième partie,

$$[C(\mathbb{T}, A_0), C(\mathbb{T}, A_1)]_\theta = C(\mathbb{T}, A_\theta).$$

Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation. D'après [1, chap. III, th. 2], $B_0 \cap B_1$ et $B_0 + B_1$ contiennent un ℓ^1 homothétique (c.-à-d. une suite bornée dans $B_0 \cap B_1$ équivalente dans $B_0 + B_1$ à la base canonique de ℓ^1) si et seulement si, pour tout $\theta \in]0, 1[$ et tout $p \in]1, +\infty[$, $B_{\theta,p}$ contient ℓ^1 isomorphiquement.

PROPOSITION 1.1. — *Soient A_0, A_1 ne contenant pas de ℓ^1 homothétiques. Si $(A_0^*, A_1^*)_\theta = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ pour un $\theta \in]0, 1[$, alors A_θ ne contient pas ℓ^1 isomorphiquement.*

Démonstration. — D'après le théorème de réitération (voir [4, th. 4.7.2]), si $0 < \eta < 1$ et $\alpha = \eta\theta + (1 - \eta)$, on a, isomorphiquement,

$$(A_\theta, A_1)_{\eta,2} = A_{\alpha,2}. \tag{1.1}$$

On applique deux fois [1, chap. III, th. 2] : comme A_0 et A_1 ne contiennent pas de ℓ^1 homothétiques, $A_{\alpha,2}$ ne contient pas ℓ^1 ; d'après (1.1) A_θ et A_1 ne contiennent pas de ℓ^1 homothétiques.

D'après [21] toute suite bornée dans un Banach X admet une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1 , ou bien une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ faiblement de Cauchy. Il suffit donc de montrer que toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ bornée dans A_θ admet une sous-suite qui est faiblement de Cauchy dans A_θ .

On vient de voir que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, bornée dans A_θ , n'admet pas de sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1 dans A_1 ; elle admet d'après [21] une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ faiblement de Cauchy dans A_1 . D'après le rappel (i), A_1^* est dense dans $(A_0^*, A_1^*)_\theta$. D'après la deuxième hypothèse et le rappel (iii), $(A_0^*, A_1^*)_\theta$ coïncide avec le dual de A_θ . La sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ (bornée dans A_θ) est donc faiblement de Cauchy dans A_θ . \square

Nous allons donner un exemple (cor. 1.4) montrant que la conclusion de la proposition 1.1 n'est pas vraie en général si la condition sur les interpolés des duaux n'est pas vérifiée. Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction convexe croissante telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} +\infty$. L'espace d'Orlicz $L^\psi([0, 1]) = L^\psi$ est défini par

$$L^\psi = \left\{ f \in L^0([0, 1]) ; \int_0^1 \psi(\varepsilon^{-1}|f(t)|) dt < +\infty, \text{ pour un } \varepsilon > 0 \right\}.$$

C'est un espace de Banach [20, III.3, th. 3, th. 10] pour la norme définie par

$$\|f\|_{L^\psi} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 ; \int_0^1 \psi(\varepsilon^{-1}|f(t)|) dt \leq 1 \right\}.$$

LEMME 1.2. — Soit $\psi(t) = t \log(1 + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Alors L^ψ et L^1 ne contiennent pas de ℓ^1 homothétiques, mais $(L^\psi, L^1)_\theta$ contient ℓ^1 isomorphiquement, pour tout $\theta \in]0, 1[$.

Démonstration. — L'application identique $i : L^\psi \rightarrow L^1$ est faiblement compacte [2, p. 122 et prop. I.1], ce qui prouve la première propriété. Comme L^1 a la propriété RNa , on a

$$(L^\psi, L^1)_\theta = (L^\psi, L^1)^\theta$$

d'après [17, prop. 3.1]. D'après la formule pour l'interpolation des treillis [9], $(L^\psi, L^1)^\theta = (L^\psi)^{1-\theta}(L^1)^\theta = L^\varphi$, où, d'après [20, V-4, th. 1, lemme 4], φ est définie par sa fonction réciproque

$$\varphi^{-1}(t) = t^\theta [\psi^{-1}(t)]^{1-\theta}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Comme φ vérifie la condition Δ_2 , L^φ est faiblement séquentiellement complet [20, IV-4, th. 3]. Comme φ ne vérifie pas la condition ∇_2 , L^φ n'est pas réflexif [20, IV-5, prop. 4]. Donc L^φ contient ℓ^1 d'après [21]. \square

D'après le résultat de [17] cité ci-dessus pour $\beta = 1$, complété par [11, prop. 1], [12, prop. 9] pour $\beta \in]0, 1[$, on a :

Remarque 1.3. — Si $(A_0, A_1)_\beta$ a la propriété RNa pour un $\beta \in]0, 1[$, alors $(A_0, A_1)_\theta = (A_0, A_1)^\theta$ pour tout $\theta \in]0, 1[$.

COROLLAIRE 1.4. — *L'espace $E = [(L^\psi)^*, L^\infty]_\theta$, $\theta \in]0, 1[$, n'a pas la propriété RNa. L'identité $: L^\infty \rightarrow (L^\psi)^*$ est un opérateur de Radon-Nikodym.*

Démonstration. — Si E avait la propriété RNa, on aurait l'égalité $((L^\psi)^*, L^\infty)_\theta = ((L^\psi)^*, L^\infty)^\theta$ par la remarque 1.3. D'après la proposition 1.1, l'espace $L^\varphi = (L^\psi, L^1)_\theta$ ne contiendrait pas ℓ^1 , ce qui contredit le lemme 1.2. L'identité $: L^\infty \rightarrow (L^\psi)^*$ est faiblement compacte d'après le début de la preuve du lemme 1.2, donc de Radon-Nikodym. \square

PROPOSITION 1.5. — *Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. On suppose que A_1 a la propriété RNa et que l'adhérence dans A_1 de la boule unité de $A_{\theta,p}$ reste dans une boule de $A_{\theta,p}$. Alors $A_{\theta,p}$ a la propriété RNa.*

Démonstration. — Désignons par C le rayon d'une boule de $A_{\theta,p}$ qui contient l'adhérence dans A_1 de la boule unité de $A_{\theta,p}$. Soit f une fonction de la boule unité de $H^\infty(\mathbb{D}, A_{\theta,p})$. Elle prend ses valeurs dans un sous-espace fermé séparable X de $A_{\theta,p}$, engendré par les coefficients x_k , $k \in \mathbb{Z}$, de sa représentation (0.1). Son adhérence \overline{X} dans A_1 a la propriété RNa et $f \in H^\infty(\mathbb{D}, \overline{X})$. Il existe donc $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T}, \overline{X})$ tel que $f(re^{it}) \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} \varphi(t)$ dans \overline{X} , pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. Comme la famille (f_r) est dans la boule unité de $C(\mathbb{T}, X)$, la deuxième hypothèse implique $\|\varphi(t)\|_X \leq C$.

Comme A_1^* est dense dans $(A_1^*, A_0^*)_{\theta,p'}$ (rappel (i)), qui est (isomorphiquement) le dual de $A_{\theta,p}$ (rappel (iv)), $f(re^{it}) \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} \varphi(t)$ faiblement dans $A_{\theta,p}$, donc faiblement dans X , pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. La fonction φ est p.s. égale à une fonction $\sigma(X, X^*)$ -mesurable. D'après le théorème de mesurabilité de Pettis [15, theorem II.2], φ est p.s. fortement mesurable à valeurs dans X , c.-à-d. $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T}, X)$.

Il reste à vérifier que f est l'intégrale de Poisson de φ c.-à-d. que $\varphi * P_\rho = f_\rho$ pour $\rho \in]0, 1[$. Par convergence dominée, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\varphi * P_\rho(e^{it}) - f_r * P_\rho(e^{it}) \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 0$ pour $\sigma(X, X^*)$; d'autre part $f_r * P_\rho = f_{r\rho} \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} f_\rho$ dans $C(\mathbb{T}, X)$, ce qui achève la preuve. \square

COROLLAIRE 1.6. — Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. Si A_0^* a la propriété de Radon-Nikodym analytique, alors $(A_{\theta,p})^*$ a aussi cette propriété.

Démonstration. — D'après [4, th. 3.4.2], on a l'égalité

$$(A_1^*, A_0^*)_{\theta,p'} = (A_1^*, Y)_{\theta,p'}$$

où Y est l'adhérence de A_1^* dans A_0^* . D'après le rappel (iv), $(A_{\theta,p})^*$ est isomorphe à $(A_1^*, A_0^*)_{\theta,p'}$. La boule unité de $(A_1^*, A_0^*)_{\theta,p'}$ est donc incluse dans une boule B_C centrée à l'origine, de rayon C de $(A_{\theta,p})^*$; B_C est compacte pour $\sigma([A_{\theta,p}]^*, A_{\theta,p})$, donc pour $\sigma(A_0^*, A_0)$, donc B_C est fermée dans A_0^* et dans Y . Comme Y a RNa , la proposition 1.5 appliquée à A_1^*, Y donne la conclusion. \square

Remarque 1.7. — Dans la proposition 1.5, on ne peut pas remplacer l'hypothèse " A_1 a la propriété RNa " par l'hypothèse " A_0 a la propriété RNa ".

En effet, il suffit de voir qu'on ne peut modifier le corollaire 1.6. Soient $A_0 = \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$, espace des transformées de Fourier de $\ell^1(\mathbb{Z})$, muni de la norme de $\ell^1(\mathbb{Z})$, $A_1 = C(\mathbb{T})$. Ici $A_1^* = M(\mathbb{T})$ possède la propriété RNa , $A_0^* = \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ ne la possède pas. D'après le lemme de Pisier [7, lemme 5.1], l'espace $(L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})})_{\theta,p}$ contient c_0 isomorphiquement, donc n'a pas la propriété RNa ; la proposition 3.8 ci-dessous montrera qu'il est fermé dans $(A_1^*, A_0^*)_{\theta,p} = (A_{\theta,p'})^*$ (rappel (iv)), qui n'a donc pas la propriété RNa .

La prochaine proposition montrera que, dans le cas où $A_0 \subsetneq A_1$, $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ est un sous-espace strict de $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta$, même si $A_\theta = A^\theta$. La démonstration utilise les deux lemmes suivants.

LEMME 1.8. — Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation et $\theta \in]0, 1[$. Alors, isométriquement,

$$[\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1)]^\theta = \ell^\infty(B^\theta).$$

Notons que cette égalité pour un couple de duaux (B_0, B_1) se déduit par dualité (rappel (iii)) de l'égalité $[\ell^1(B_0), \ell^1(B_1)]_\theta = \ell^1(B_\theta)$ [4, th. 5.1.2] si $B_0 \cap B_1$ est dense dans chaque B_j , $j = 0, 1$.

Démonstration. — Soient $a = (a_n)_{n \geq 0}$ dans l'espace de gauche E^θ et $g = (g_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{G}[\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1)] = \mathcal{G}$ tels que $g'(\theta) = a$ et $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq \|a\|_{E^\theta} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$. Pour tout n , $g'_n(\theta) = a_n \in B^\theta$, donc

$$\|a\|_{\ell^\infty(B^\theta)} \leq \sup_{n \geq 0} \|g_n\|_{\mathcal{G}(B_0, B_1)} \leq \|a\|_{E^\theta} + \varepsilon.$$

Réciproquement, soient $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty(B^\theta)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout n , il existe $g_n \in \mathcal{G}(B_0, B_1)$ tel que

$$g'_n(\theta) = a_n, \quad \|g_n\|_{\mathcal{G}(B_0, B_1)} \leq \|a_n\|_{B^\theta} + \varepsilon \leq \|a\|_{\ell^\infty(B^\theta)} + \varepsilon.$$

On peut supposer $g_n(0) = 0$, $n \geq 0$. Chaque g_n vérifie la condition (C'') , c.-à-d., pour $z \in S$, $\|g_n(z)\|_{B_0+B_1} \leq |z| \|g_n\|_{\mathcal{G}(B_0, B_1)}$. La fonction $G = (g_n)_{n \geq 0}$ vérifie les conditions (C) , (C') et (C'') avec constante $\leq \|a\|_{\ell^\infty(B^\theta)} + \varepsilon$. On va montrer que $G \in \mathcal{G}[\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1)]$. Cela impliquera

$$\|a\|_{E^\theta} \leq \|a\|_{\ell^\infty(B^\theta)} + \varepsilon.$$

Vérifions que G est holomorphe en $z_0 \in S^0$, à valeurs dans $\ell^\infty(B_0 + B_1)$ (remarquons que $\ell^\infty(B_0) + \ell^\infty(B_1) = \ell^\infty(B_0 + B_1)$ isomorphiquement d'après le théorème du graphe fermé). Soit un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset S^0$, avec $r < 1$. Comme chaque g_n est holomorphe sur S^0 , à valeurs dans $B_0 + B_1$, on a $g_n(z) = \sum_{k \geq 0} c_{k,n}(z - z_0)^k$ sur ce disque, la série convergeant normalement sur ce disque. Comme g_n vérifie la condition (C'') , on a

$$\begin{aligned} \|c_{k,n}\|_{B_0+B_1} &= \left\| \int_0^{2\pi} g_n(z_0 + r e^{it}) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right\|_{B_0+B_1} \\ &\leq (|z_0| + 1) (\|a\|_{\ell^\infty(A^\theta)} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k \geq 0} C_k(z - z_0)^k$, où $C_k = (c_{k,n})_{n \geq 0}$, converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$, à valeurs dans $\ell^\infty(B_0 + B_1)$. Sa somme est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$; elle coïncide évidemment avec G .

Il reste à vérifier que G est continue sur S , à valeurs dans $\ell^\infty(B_0 + B_1)$. Il suffit de montrer que $e^{z^2} G$ l'est. D'après la condition (C') , la fonction $G(j + i \cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, est continue sur \mathbb{R} , à valeurs dans $\ell^\infty(B_0 + B_1)$. D'après la condition (C'') vérifiée par G ,

$$\|e^{(j+i\tau)^2} G(j + i\tau)\|_{\ell^\infty(B_0+B_1)} \leq e^{1-\tau^2} (1 + |\tau|) (\|a\|_{\ell^\infty(A^\theta)} + \varepsilon),$$

donc les fonctions $e^{(j+i \cdot)^2} G(j + i \cdot)$ sont dans $C_0(\mathbb{R}, \ell^\infty(B_0 + B_1))$. Alors l'intégrale de Poisson

$$z \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{(i\tau)^2} G(i\tau) Q(z, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} e^{(1+i\tau)^2} G(1 + i\tau) Q(z, 1 + i\tau) d\tau,$$

définie pour tout $z \in S^0$, est continue sur S à valeurs dans $\ell^\infty(B_0 + B_1)$ et elle coïncide avec $e^{z^2} G$ (coordonnée par coordonnée). En effet, S^0 est conformément équivalent au disque ouvert ; une fonction continue à valeurs dans un espace de Banach sur le bord de S et tendant vers 0 à l'infini

devient continue sur le bord du disque. La continuité sur le disque fermé de l'intégrale de Poisson d'une fonction continue sur le bord du disque unité passe aisément du cas scalaire au cas vectoriel. Ceci achève la preuve. \square

DÉFINITION 1.9. — Soient X, Y des espaces de Banach, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur borné et $\varepsilon \in]0, 1[$; on dit que T est un ε -isomorphisme si pour tout $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty(Y)$, il existe $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty(X)$ tel que $\sup_{n \geq 0} \|Tx_n - y_n\| < \varepsilon$.

Observons que T est un ε -isomorphisme si et seulement si l'image de T est ε -dense dans Y et

$$\phi(\varepsilon) = \sup_{\|y\|_Y \leq 1} \inf_{x \in X} \{\|x\| ; \|Tx - y\| < \varepsilon\} < \infty.$$

LEMME 1.10. — Soient $T : X \rightarrow Y$ un opérateur borné injectif d'image dense et $\varepsilon \in]0, 1[$. Si T est un ε -isomorphisme, c'est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après le théorème de l'image fermée, il suffit de voir que T^* est un isomorphisme sur son image. Soient $y^* \in Y^*$ et $\delta > 0$. Pour un choix convenable de y dans la boule unité de Y , pour tout $x \in X$ tel que $\|Tx - y\| < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} \|y^*\| &< |\langle y, y^* \rangle| + \delta \leq |\langle y - Tx, y^* \rangle| + |\langle x, T^*y^* \rangle| + \delta \\ &\leq \varepsilon \|y^*\| + \|T^*y^*\| \|x\| + \delta. \end{aligned}$$

Comme T est un ε -isomorphisme, on a finalement

$$\|y^*\| \leq \|T^*y^*\| \phi(\varepsilon) / (1 - \varepsilon). \quad \square$$

COROLLAIRE 1.11. — L'espace $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(A_\theta)$, $\theta \in]0, 1[$. C'est un sous-espace strict, sauf si l'identité $i : A_0 \rightarrow A_1$ est surjective.

Démonstration. — On a un plongement de norme 1 :

$$[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta \rightarrow \ell^\infty(A_\theta)$$

d'après la preuve de [4, th. 5.6.3]. D'après le rappel (ii), $\ell^\infty(A_\theta)$ et $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ sont respectivement des sous-espaces isométriques de $\ell^\infty(A^\theta)$ et $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta$. Or ces derniers coïncident isométriquement par le lemme 1.8, ce qui prouve la première assertion. Supposons que $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta = \ell^\infty(A_\theta)$. D'après le rappel (i), $\ell^\infty(A_0)$ serait dense dans $\ell^\infty(A_\theta)$. Par définition le plongement $i : A_0 \rightarrow A_\theta$ serait alors un ε -isomorphisme, donc un isomorphisme d'après le lemme 1.10. D'après [4, chap. 4, exercice 4] A_0 et A_1 seraient isomorphes. \square

COROLLAIRE 1.12. — *L'espace $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ est un sous-espace fermé strict de $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta$, $\theta \in]0, 1[$, sauf si l'identité $i : A_0 \rightarrow A_1$ est surjective.*

Démonstration. — D'après le corollaire précédent, si l'application identité $i : A_0 \rightarrow A_1$ n'est pas surjective, $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$ est en particulier un sous-espace fermé strict de $\ell^\infty(A^\theta)$, qui coïncide avec l'espace $[\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]^\theta$ d'après le lemme 1.8. \square

Remarque 1.13. — Il y a donc une erreur typographique dans l'énoncé de [4, th. 5.6.3] lorsque $s_0 = s_1 = 0$: il faut exclure le cas $q_0 = q_1 = \infty$.

Si $B_0 \cap B_1$ est dense dans chaque B_j , $j = 0, 1$, on verra (remarque 2.2) que $[c_0(B_0), c_0(B_1)]_\theta = c_0(B_\theta)$.

2. Interpolation des espaces de fonctions harmoniques à valeurs vectorielles

On va maintenant étudier l'interpolation des espaces $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_j)$ lorsque $i : A_0 \rightarrow A_1$ est un opérateur de Radon-Nikodym. On montrera entre autres (corollaire 2.5) que, si $i : A_0 \rightarrow A_1$ est faiblement compacte et si A_1 a la propriété *RNa*, alors A_θ se plonge isométriquement dans un espace dual ayant la propriété de Radon-Nikodym. On exhibera (corollaire 2.8) un exemple (V_0, V_1) de couple d'interpolation vérifiant, pour tout $\gamma \in]0, 1[$,

$$L^p(\mathbb{T}, V^\gamma) \subsetneq [L^p(\mathbb{T}, V_0), L^p(\mathbb{T}, V_1)]^\gamma, \quad p \in]1, +\infty[.$$

Notons qu'on a toujours, pour $\theta \in]0, 1[$ et un couple d'interpolation (B_0, B_1) , isométriquement, [4, theorem 5.1.2] :

$$[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta = L^p(\mathbb{T}, B_\theta), \quad p \in [1, +\infty[. \quad (2.1)$$

D'après [18, chap. VII, Th. 1.1], d'après l'identification [4, Th. 3.12.1] on a aussi

$$[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_{\theta,p} = L^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p}), \quad p \in]1, +\infty[. \quad (2.2)$$

On a toujours un plongement de norme 1 :

$$[L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1)]_\theta \rightarrow L^\infty(\mathbb{T}, B_\theta). \quad (2.3)$$

En effet, si la fonction f est dans l'espace de gauche avec norme 1, elle est d'après (2.1) dans tous les $L^p(\mathbb{T}, B_\theta)$ avec norme ≤ 1 , $p \in [1, +\infty[$, donc f est (p.s.) fortement mesurable : $\mathbb{T} \rightarrow B_\theta$, et $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}, B_\theta)} \leq 1$. On aura besoin des autres rappels suivants, où (B_0, B_1) est un couple d'interpolation.

a) Il y a un plongement de norme 1 :

$$E_\theta = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta \rightarrow \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_\theta), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.4)$$

En effet, $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0) \cap \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)$ est dense dans E_θ par le rappel (i). Il suffit de montrer le plongement pour f dans cette intersection, et de norme 1 dans E_θ ; en particulier $f \in C(\mathbb{D}, B_0 \cap B_1)$. D'après (2.1) et (2.3),

$$\|f\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_\theta)} = \sup_r \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T}, B_\theta)} \leq \sup_r \|f_r\|_{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta}.$$

Soit $F \in \mathcal{F}(\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1))$, de norme $\leq 1 + \varepsilon$, telle que $F(\theta) = f$. Alors, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\|F(i\tau)\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0)} = \sup_r \|F(i\tau)(r \cdot)\|_{L^p(\mathbb{T}, B_0)} \leq 1 + \varepsilon$$

et de même en $1 + i\tau$ pour $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)$. Comme $F(\theta)(r \cdot) = f_r$ on en déduit

$$\|f_r\|_{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}(\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1))} \leq 1 + \varepsilon.$$

b) Il y a un plongement de norme 1 :

$$E_{\theta,p} = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)]_{\theta,p} \rightarrow \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p}), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.5)$$

En effet, comme en a), soit $f \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0) \cap \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)$, de norme 1 dans $E_{\theta,p}$. D'après (2.2) on a

$$\|f\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p})} = \sup_r \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p})} = \sup_r \|f_r\|_{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_{\theta,p}} \leq \|f\|_{E_{\theta,p}}$$

où l'inégalité vient de la définition des fonctionnelles K_t associées à $[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_{\theta,p}$ et $E_{\theta,p}$.

c) Si B_1 est séparable, alors B_θ est séparable.

Soient C_1 la boule unité de $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ et considérons l'application $J : C_1 \rightarrow L^1(Q(\theta, 1 + i \cdot)/\theta, B_1)$ définie par : $F \rightarrow F(1 + i \cdot)$. L'espace $L^1(Q(\theta, 1 + i\tau) d\tau/\theta, B_1)$ est séparable, donc $J(C_1)$ l'est aussi. Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite dans C_1 , telle que $(J(F_n))_{n \geq 1}$ soit dense dans $J(C_1)$. Alors $(F_n(\theta))_{n \geq 1}$ est dense dans la boule unité de $(B_0, B_1)_\theta$ car [4, th. 4.3.2]

$$\begin{aligned} \|(F - F_n)(\theta)\|_{B_\theta} &\leq \|(F - F_n)(i \cdot)\|_{L^1(Q(\theta, i\tau) d\tau/(1-\theta), B_0)}^{1-\theta} \\ &\quad \times \|(F - F_n)(1 + i \cdot)\|_{L^1(Q(\theta, 1+i\tau) d\tau/\theta, B_1)}^\theta. \end{aligned}$$

d) Si B_0 est un sous-espace de B_1 , si Y est l'adhérence de B_0 dans B_1 , on a isométriquement $(B_0, B_1)_{\theta,p} = (B_0, Y)_{\theta,p}$, quand $1 < p < \infty$, [4,

th. 3.4.2], on a $(B_0, B_1)_\theta = (B_0, Y)_\theta$ [4, th. 4.2.2] et $(B_0, B_1)^\theta = (B_0, Y)^\theta$ [3, Lemma].

e) Pour tout Banach X et tout $p \in]1, +\infty]$, le dual de $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$ s'identifie isométriquement à $h^p(\mathbb{D}, X^*)$.

En effet le dual de $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$ est égal à $VB^p(\mathbb{T}, X^*)$ [13, chap. II.13.3, corol. 1], où, pour un Banach Y , $VB^p(\mathbb{T}, Y)$ est défini comme espace des mesures absolument continues $G : \mathbb{T} \rightarrow Y$ qui sont à p -variation bornée $|G|_p$. D'après [5, prop. 1.1] et [6, prop. 3] ces mesures s'identifient aux opérateurs bornés $\tilde{G} : L^{p'}(\mathbb{T}) \rightarrow Y$ (en posant $\tilde{G}(1_A) = G(A)$, pour A borélien de \mathbb{T}) pour lesquels il existe une fonction positive $g \in L^p(\mathbb{T})$ telle que $\|\tilde{G}(\varphi)\|_Y \leq \int_{\mathbb{T}} g(\theta)|\varphi(\theta)| d\theta$, avec $\|g\|_p = |G|_p$.

On a un plongement de norme 1 : $VB^p(\mathbb{T}, Y) \rightarrow \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$, défini par : $\tilde{G} \rightarrow F(re^{it}) = \tilde{G}(P_r(t - \cdot))$ [5, th. 1.1]. En effet

$$\|\tilde{G}(P_r(t - \cdot))\|_Y \leq \int_{\mathbb{T}} g(\theta)P_r(t - \theta) dt = g * P_r(t),$$

d'où $\|F\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)} \leq \sup_{0 < r < 1} \|g * P_r\|_p \leq \|g\|_p$.

On va modifier [5, th. 2.1, Rem. 2.1] et [6, prop. 16, th. 17] pour obtenir l'isométrie annoncée. Soit $h \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X^*)$. Pour $x \in X$, $\langle h(\cdot), x \rangle$ est dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D})$, donc il existe $f_x \in L^p(\mathbb{T})$ telle que $\langle h_r(\cdot), x \rangle = f_x * P_r \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f_x$ en norme $L^p(\mathbb{T})$, donc pour $\sigma(L^p(\mathbb{T}), L^{p'}(\mathbb{T}))$. Cela définit un opérateur borné $T_h : L^{p'}(\mathbb{T}) \rightarrow X^*$ tel que $T_h * P_r = h_r$. Si de plus $h \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$ où Y est fermé dans X^* , T_h est borné : $L^{p'}(\mathbb{T}) \rightarrow Y$.

D'autre part les fonctions h_r sont bornées dans $L^p(\mathbb{T}, X^*)$ donc dans $L^{p'}(\mathbb{T}, X)^*$; toute valeur d'adhérence w^* dans cet espace coïncide avec T_h . Donc il existe une densité $H \in VB^p(\mathbb{T}, X^*)$ telle que $h_r \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} H$ pour la convergence simple sur $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$ et $h_r = H * P_r$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|H\|_{L^{p'}(\mathbb{T}, X)^*} &\leq \|h\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X^*)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|h_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X^*)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \|H * P_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X^*)} \leq \|H\|_{L^{p'}(\mathbb{T}, X)^*}. \end{aligned}$$

Si $h \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$, H est dans $VB^p(\mathbb{T}, Y)$ avec la même norme.

Le dual de $C(\mathbb{T}, X)$ s'identifie isométriquement à l'espace $M(\mathbb{T}, X^*)$ des mesures à variation bornée : $\mathbb{T} \rightarrow X^*$ [13, chap. III.19.3, th. 2, 4] et à $\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, X^*)$.

La preuve est la même que ci-dessus en remplaçant $L^{p'}(\mathbb{T})$ et $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$ par $C(\mathbb{T})$ et $C(\mathbb{T}, X)$, f_x par $\mu_x \in M(\mathbb{T})$, $VB^p(\mathbb{T}, X^*)$ par $M(\mathbb{T}, X^*)$. On obtient de même l'isométrie entre $M(\mathbb{T}, Y)$ et $\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, Y)$.

f) Si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1 , le dual de B_θ est $(B_0^*, B_1^*)^\theta$ (rappel (iii)) et le sous-espace fermé $(B_0^*, B_1^*)_\theta$ est normant pour B_θ . Autrement dit, B_θ est toujours isométriquement un sous-espace fermé de $[(B_0^*, B_1^*)_\theta]^*$.

C'est implicite dans [3, p. 777] (voir aussi [12, lemme 4]) : si h est de norme 1 dans $\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*) = \mathcal{G}$, et si

$$h_n(z) = e^{z^2/n} (i/n)^{-1} [h(z + i/n) - h(z)],$$

alors $\|h_n\|_{\mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)} \leq e^{1/n}$, et on a $h_n(\theta) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} h'(\theta)$ pour la topologie $\sigma(B_0^* + B_1^*, B_0 \cap B_1)$.

L'espace $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_θ , et pour $f \in B_0 \cap B_1$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_\theta} &= \sup_{\|h\|_{\mathcal{G}}=1} |\langle f, h'(\theta) \rangle| = \sup_{\|h\|_{\mathcal{G}}=1} \lim_n |\langle f, h_n(\theta) \rangle| \\ &\leq \sup_{\|F\|_{\mathcal{F}}=1} |\langle f, F(\theta) \rangle| = \sup_{\|\eta\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta}=1} |\langle f, \eta \rangle|. \end{aligned}$$

g) Si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1 , (2.1) et (2.2) impliquent par dualité, d'après les rappels (iii), (iv) et 2-e, les isomorphismes (avec isométrie dans (2.6)) :

$$[\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1^*)]^\theta = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (B_0^*, B_1^*)^\theta), \quad 1 < p \leq \infty, \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1^*)]_{\theta,p} = \mathbf{h}^p[\mathbb{D}, (B_0^*, B_1^*)_{\theta,p}], \quad 1 < p \leq \infty. \quad (2.7)$$

Le plongement dans (2.4) et (2.5) n'est pas surjectif en général, d'après la remarque finale de [7]. En effet, d'après [16], il existe un couple d'interpolation (B_0, B_1) où B_0 et B_1 sont isomorphes isométriquement à ℓ^1 et tous les espaces $B_\theta, B_{\theta,p}$ contiennent c_0 isomorphiquement, $p \in]1, +\infty[$. Alors B_0 et B_1 ont la propriété de Radon-Nikodym, on a donc $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0) = L^p(\mathbb{T}, B_0)$ et $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1) = L^p(\mathbb{T}, B_1)$. D'après (2.1) et (2.2), les espaces E_θ et $E_{\theta,p}$ sont égaux respectivement à $L^p(\mathbb{T}, B_\theta)$ et $L^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p})$. Comme $B_\theta, B_{\theta,p}$ n'ont pas la propriété de Radon-Nikodym, E_θ est un sous-espace fermé strict de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_\theta)$, de même pour $E_{\theta,p}$ et $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p})$.

On mentionnera après le corollaire 2.4 un autre exemple où le plongement dans (2.4) n'est pas d'image dense. Pour compléter (2.3) et (2.6), énonçons le résultat suivant, probablement connu, à comparer au corollaire 1.11.

LEMME 2.1. — Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation tel que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1 , et $\theta \in]0, 1[$. Alors isométriquement

$$\begin{aligned} [C(\mathbb{T}, B_0), C(\mathbb{T}, B_1)]_\theta &= C(\mathbb{T}, B_\theta), \\ [\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, B_0^*), \mathbf{h}^1(\mathbb{D}, B_1^*)]^\theta &= \mathbf{h}^1(\mathbb{D}, (B_0^*, B_1^*)^\theta). \end{aligned}$$

Démonstration. — Considérons deux fonctions $f \in C(\mathbb{T}, B_0 \cap B_1)$ et $F \in \mathcal{F}[C(\mathbb{T}, B_0), C(\mathbb{T}, B_1)]$ telles que $F(\theta) = f$, et que

$$\|F\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_{[C(\mathbb{T}, B_0), C(\mathbb{T}, B_1)]_\theta} + \varepsilon.$$

Pour $u \in \mathbb{T}$ on note $F_u(z) = F(z)(u)$, $z \in S$. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(\mathbb{T}, B_\theta)} &= \sup_u \|f(u)\|_{B_\theta} \leq \sup_u \|F_u\|_{\mathcal{F}(B_0, B_1)} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_{[C(\mathbb{T}, B_0), C(\mathbb{T}, B_1)]_\theta} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Par la densité de $C(\mathbb{T}, B_0 \cap B_1)$ dans l'interpolé, on obtient le plongement de norme 1 de l'interpolé dans $C(\mathbb{T}, B_\theta)$. Ceci n'utilise pas l'hypothèse de densité sur $B_0 \cap B_1$.

Réciproquement, par les rappels 2-e et 2-f, $[\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, B_0^*), \mathbf{h}^1(\mathbb{D}, B_1^*)]_\theta$ est normant pour $[C(\mathbb{T}, B_0), C(\mathbb{T}, B_1)]_\theta$; il se plonge avec norme 1 dans $\mathbf{h}^1[\mathbb{D}, (B_0^*, B_1^*)^\theta]$ d'après (2.4), donc, par les rappels (ii) et 2-e, dans $\mathbf{h}^1[\mathbb{D}, (B_0^*, B_1^*)^\theta] = C(\mathbb{T}, B_\theta)^*$. Ceci prouve la première isométrie, la deuxième s'en déduit par dualité (rappel (iii)). \square

Remarque 2.2. — On a $[c_0(B_0), c_0(B_1)]_\theta = c_0(B_\theta)$ si $B_0 \cap B_1$ est dense dans chaque B_j , $j = 0, 1$.

La preuve est analogue en notant que $[\ell^1(B_0^*), \ell^1(B_1^*)]_\theta = \ell^1((B_0^*, B_1^*)_\theta)$ [4, th. 5.1.2] donc se plonge dans $\ell^1((B_0^*, B_1^*)^\theta) = c_0(B_\theta)^*$.

PROPOSITION 2.3. — Soient B_0, B_1 deux Banach tels que B_0 soit un sous-espace de B_1 et que l'identité $i : B_0 \rightarrow B_1$ soit un opérateur de Radon-Nikodym. Alors, pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$ on a, isométriquement dans a), isomorphiquement dans b),

- a) $[h^p(\mathbb{D}, B_0), h^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta = L^p(\mathbb{T}, B_\theta)$,
- b) $[h^p(\mathbb{D}, B_0), h^p(\mathbb{D}, B_1)]_{\theta, p} = L^p(\mathbb{T}, B_{\theta, p})$.

Démonstration. —

a) L'une des inclusions ne nécessite aucune hypothèse sur i : si $1 \leq p < \infty$, d'après (2.1) et le théorème d'interpolation [4, th. 4.1.2] appliqué à

l'intégrale de Poisson, on a un plongement de norme 1 :

$$L^p(\mathbb{T}, B_\theta) = [L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta \rightarrow [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta = E_\theta.$$

Montrons l'inclusion inverse. D'après l'hypothèse et la définition 0.1, l'image de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0)$ par $I \otimes i$ est l'intégrale de Poisson d'un sous-espace de $L^p(\mathbb{T}, B_1)$. On note Y l'adhérence de l'image de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0)$ dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_1)$, qu'on identifie à un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{T}, B_1)$. D'après le rappel 2-d, $E_\theta = (\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), Y)_\theta$ isométriquement.

Soient $f \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0)$, $F \in \mathcal{F}(\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), Y) = \mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $F(\theta) = f$ et $\|f\|_{E_\theta} \geq \|F\|_{\mathcal{F}} - \varepsilon$. La fonction $F(1+i\cdot)$ prend ses valeurs dans un sous-espace fermé séparable de Y , donc dans un espace $L^p(\mathbb{T}, X)$, où X est un sous-espace fermé séparable de B_1 . Alors

$$f \in [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), L^p(\mathbb{T}, X)]_\theta = F_\theta, \quad \|f\|_{F_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}.$$

D'après (2.4) et [4, th. 4.1.2] appliqué à l'identité,

$$\|f\|_{\mathbf{h}^p[\mathbb{D}, (B_0, X)_\theta]} \leq \|f\|_{[\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)]_\theta} \leq \|f\|_{F_\theta}.$$

L'espace F_θ étant séparable (d'après le rappel 2-c), son adhérence $\overline{F_\theta}$ dans $\mathbf{h}^p[\mathbb{D}, (B_0, X)_\theta]$ l'est aussi. La tribu sur $\overline{F_\theta}$ engendrée par les boules ouvertes de cet espace est donc la tribu borélienne. Par définition de l'interpolé, la fonction $z \rightarrow f(e^{it}z)$ reste dans F_θ , avec la même norme que f . Considérons l'application

$$U_f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (B_0, X)_\theta), \quad U_f(e^{it}) = f(e^{it}).$$

D'après [10, preuve du corollaire 1], si B est une boule ouverte de $\mathbf{h}^p[\mathbb{D}, (B_0, X)_\theta]$, $U_f^{-1}(B)$ est un borélien de \mathbb{T} . Comme l'image de U_f est dans l'espace séparable $\overline{F_\theta}$, l'application U_f est fortement mesurable. D'après [10, Théorème p. 269], f admet p.s. des limites radiales, c.-à-d. $f \in L^p[\mathbb{T}, (B_0, X)_\theta]$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}, B_\theta)} &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}, (B_0, X)_\theta)} = \|f\|_{\mathbf{h}^p[\mathbb{D}, (B_0, X)_\theta]} \\ &\leq \|f\|_{F_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_{E_\theta} + \varepsilon. \end{aligned}$$

b) D'après le théorème de réitération [4, th. 4.7.2], le terme de gauche $E_{\theta,p}$ est isomorphe à l'interpolé (γ, p) des espaces $E_j = [h^p(\mathbb{D}, B_0), h^p(\mathbb{D}, B_1)]_{\theta_j}$, $j \in \{0, 1\}$, avec $\theta = (1-\gamma)\theta_0 + \gamma\theta_1$. D'après a) puis le théorème de réitération à nouveau et (2.2)

$$E_{\theta,p} = [L^p(\mathbb{T}, B_{\theta_0}), L^p(\mathbb{T}, B_{\theta_1})]_{\gamma,p} = L^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p}). \quad \square$$

COROLLAIRE 2.4. — *Sous les hypothèses de la proposition 2.3,*

a) *si le plongement dans (2.4) est d'image dense pour un $p \in]1, \infty[$, B_θ a la propriété de Radon-Nikodym ;*

b) *si le plongement dans (2.5) est d'image dense pour un $p \in]1, \infty[$, $B_{\theta,p}$ a la propriété de Radon-Nikodym. C'est le cas pour tout $p \in]1, \infty[$ si $B_j = A_j^*$ pour $j = 0, 1$.*

Démonstration. — a) D'après l'hypothèse et la proposition 2.3, l'espace $L^p(\mathbb{T}, B_\theta)$ est dense (et fermé) dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_\theta)$, donc lui est égal.

b) La preuve est la même. Lorsque les B_j sont des duaux on applique le rappel 2-g. □

Exemple. — D'après le corollaire 1.4, l'espace $(L^\infty, (L^\psi)^*)_\theta$ n'a pas la propriété de Radon-Nikodym alors que l'identité : $L^\infty \rightarrow (L^\psi)^*$ est un opérateur de Radon-Nikodym. D'après le corollaire 2.4, le plongement correspondant dans (2.4) n'est pas d'image dense. Donc l'espace $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, L^\infty)$, dense dans $[h^p(\mathbb{D}, L^\infty), h^p(\mathbb{D}, (L^\psi)^*)]_\theta$ (rappel (i)), ne peut pas être dense dans $h^p(\mathbb{D}, (L^\infty, (L^\psi)^*)_\theta)$, bien que L^∞ soit dense dans $(L^\infty, (L^\psi)^*)_\theta$, à nouveau par le rappel (i).

COROLLAIRE 2.5. — *On suppose que l'identité $i : A_0 \rightarrow A_1$ est faiblement compacte et que A_1 a la propriété RNa. Alors A_θ , $\theta \in]0, 1[$, se plonge isométriquement dans un espace dual possédant la propriété de Radon-Nikodym (en particulier A_θ hérite de cette propriété).*

Démonstration. — Soient $1 < p < \infty$ et Y l'adhérence de A_1^* dans A_0^* . Comme i est faiblement compacte, il en est de même pour $j = i^* : A_1^* \rightarrow Y$ et pour j^* . De plus $j^* : Y^* \rightarrow A_1$; c'est un opérateur de Radon-Nikodym et $I \otimes j^* : \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*) \rightarrow L^p(\mathbb{T}, A_1)$. Par le rappel 2-d,

$$[(\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1^{**}))]^\theta = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), L^p(\mathbb{T}, A_1)]^\theta. \quad (2.8)$$

Soit $Z = (Y, A_1^*)_\theta = (A_0^*, A_1^*)_\theta$ (rappel 2-d) ; il est normant pour A_θ (rappel 2-f), c.-à-d. A_θ se plonge isométriquement dans Z^* . On va montrer que l'espace Z^* a la propriété de Radon-Nikodym. D'après (2.6) et (2.8)

$$\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Z^*) = [(\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1^{**}))]^\theta = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), L^p(\mathbb{T}, A_1)]^\theta.$$

D'après les rappels (iii) et 2-d puis [17, proposition 3.1], comme A_1 a la propriété RNa, on a :

$$Z^* = (Y^*, A_1^{**})^\theta = (Y^*, A_1)^\theta = (Y^*, A_1)_\theta.$$

De plus $L^p(\mathbb{T}, A_1)$ conserve la propriété RNa [14]. D'après [17] à nouveau, puis le rappel 2-d,

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), L^p(\mathbb{T}, A_1)]^\theta &= [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), L^p(\mathbb{T}, A_1)]_\theta \\ &= [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1)]_\theta. \end{aligned}$$

Comme j^* est de Radon-Nikodym, la proposition 2.3 implique

$$[\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1)]_\theta = L^p(\mathbb{T}, (Y^*, A_1)_\theta) = L^p(\mathbb{T}, Z^*).$$

On a donc montré que $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Z^*) = L^p(\mathbb{T}, Z^*)$. □

On utilisera le lemme de réitération suivant dans la preuve des propositions 2.7 et 3.14. C'est un cas particulier de la preuve de [12, lemme 8.b)] ; on reprend des éléments de la preuve du lemme 1.8.

LEMME 2.6. — *Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation, $\alpha, \gamma, \delta \in]0, 1[$, $\alpha < \delta$, et $\theta = (1 - \gamma)\alpha + \gamma\delta$. Alors*

a) *il y a un plongement continu :*

$$B^\theta \rightarrow (B_\alpha, B_\delta)^\gamma ;$$

b) *si $B_j = A_j^*$ on a $B^\theta = (B_\alpha, B_\delta)^\gamma = (B^\alpha, B^\delta)^\gamma$.*

Démonstration. —

a) Soit $g \in \mathcal{G}(B_0, B_1)$. Soit $0 < \varepsilon' \leq \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}$; posons $g(1) - g(0) = a_0 + a_1$, avec

$$\|a_0\|_{B_0} + \|a_1\|_{B_1} \leq \|g(1) - g(0)\|_{B_0 + B_1} + \varepsilon' \leq \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} + \varepsilon' \leq 2\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}. \quad (2.9)$$

(i) On va d'abord montrer que $g - g(0) - a_0 = g - g(1) + a_1$ est continue sur $S_{\alpha, \delta} = \{x + i\tau \mid \alpha \leq x \leq \delta, \tau \in \mathbb{R}\}$ et holomorphe à l'intérieur, à valeurs dans $B_\alpha + B_\delta$. Il suffit de montrer que ces propriétés sont vérifiées par la fonction

$$z \rightarrow f(z) = e^{z^2} [g(z) - g(0) - a_0].$$

Par définition de g , la fonction f est continue sur S , holomorphe à l'intérieur, à valeurs dans $B_0 + B_1$. D'après la condition (C') vérifiée par g et (2.9), les fonctions $\|f(j + i\cdot)\|_{B_j}$ sont bornées sur \mathbb{R} par $e\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} + e\|a_j\|_{B_j} \leq 3e\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}$, $j \in \{0, 1\}$, et tendent vers 0 lorsque $|\tau| \rightarrow \infty$. La fonction f est donc dans $\mathcal{F}(\overline{B})$. Pour tout $\beta \in]0, 1[$ et $\tau \in \mathbb{R}$, par définition de B_β ,

$$\|f(\beta + i\tau)\|_{B_\beta} \leq 3e\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}. \quad (2.10)$$

Sur $S_{\alpha,\delta}$, la fonction f admet la représentation intégrale, a priori à valeurs dans $B_0 + B_1$:

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha + i\tau)Q(z, i\tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} f(\delta + i\tau)Q(z, 1 + i\tau) d\tau.$$

Cette représentation est donc à valeurs dans $B_\alpha + B_\delta$, ce qui prouve la continuité de f sur $S_{\alpha,\delta}$, à valeurs dans $B_\alpha + B_\delta$, avec

$$\|f(z)\|_{B_\alpha+B_\delta} \leq 3e\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}, \quad z \in S_{\alpha,\delta}.$$

Soit un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset S_{\alpha,\delta}^0$, avec $r < 1$. Comme f est holomorphe sur S^0 à valeurs dans $B_0 + B_1$, on a $f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k(z - z_0)^k$ sur ce disque, la série convergeant normalement dans $B_0 + B_1$. Comme

$$\|c_k\|_{B_\alpha+B_\delta} = \left\| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right\|_{B_\alpha+B_\delta} \leq 3e\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})},$$

la série converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ dans $B_\alpha + B_\delta$, sa somme f est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ à valeurs dans $B_\alpha + B_\delta$.

(ii) Posons

$$G(z) = g((\delta - \alpha)z + \alpha) - g(0) - a_0, \quad z \in S.$$

On va montrer que G est dans $\mathcal{G}(B_\alpha, B_\delta)$ et que

$$\|G\|_{\mathcal{G}(B_\alpha, B_\delta)} \leq (\delta - \alpha)\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}.$$

Comme $G'(\gamma) = (\delta - \alpha)g'(\theta)$, la preuve sera terminée.

D'après (i) G est continue sur S , holomorphe à l'intérieur, à valeurs dans $B_\alpha + B_\delta$. Fixons $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $\tau \neq \tau'$, et posons

$$F_{\tau, \tau'}(\xi) = \frac{g((\delta - \alpha)i\tau + \xi) - g((\delta - \alpha)i\tau' + \xi)}{\tau - \tau'}, \quad \xi \in S,$$

d'où

$$F_{\tau, \tau'}(\alpha) = \frac{G(i\tau) - G(i\tau')}{\tau - \tau'}, \quad F_{\tau, \tau'}(\delta) = \frac{G(1 + i\tau) - G(1 + i\tau')}{\tau - \tau'}.$$

Comme $g \in \mathcal{G}(\overline{B})$, $F_{\tau, \tau'}$ est continue sur S , holomorphe à l'intérieur, à valeurs dans $B_0 + B_1$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, d'après la condition (C') vérifiée par g ,

$$\|F_{\tau, \tau'}(j + it)\|_{B_j} \leq (\delta - \alpha)\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|e^{\varepsilon\xi^2} F_{\tau,\tau'}\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} \leq e^\varepsilon \max_{j \in \{0,1\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F_{\tau,\tau'}(j + it)\|_{B_j} \leq e^\varepsilon (\delta - \alpha) \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}.$$

Par définition de la norme B_α , $\|e^{\varepsilon\alpha^2} F_{\tau,\tau'}(\alpha)\|_{B_\alpha} \leq e^\varepsilon (\delta - \alpha) \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}$ et de même pour δ . Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient la condition (C') pour G :

$$\max \left\{ \left\| \frac{G(i\tau) - G(i\tau')}{\tau - \tau'} \right\|_{B_\alpha}, \left\| \frac{G(1 + i\tau) - G(1 + i\tau')}{\tau - \tau'} \right\|_{B_\delta} \right\} \leq (\delta - \alpha) \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}. \quad (2.11)$$

Vérifions la condition (C) pour G . D'après (2.11), pour $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$,

$$\max \{ \|G(i\tau) - G(0)\|_{B_\alpha}, \|G(1 + i\tau) - G(1)\|_{B_\delta} \} \leq |\tau| (\delta - \alpha) \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}.$$

La fonction $H_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} G(z)/(2 + z)$ vérifie donc

$$\begin{aligned} \|H_\varepsilon(i\tau)\|_{B_\alpha} &\leq e^{-\varepsilon\tau^2} \|G(i\tau)\|_{B_\alpha}/|2 + i\tau| \\ &\leq \frac{e^{-\varepsilon\tau^2}}{|2 + i\tau|} [|\tau| \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} + \|G(0)\|_{B_\alpha}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\leq \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} + \|f(\alpha)\|_{B_\alpha} \leq 4e \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}, \quad (2.13)$$

en notant que $G(0) = f(\alpha)$ où f est définie en (i) ; la dernière inégalité vient de (2.10) appliquée à $\beta = \alpha$. D'après (2.12) $\|H_\varepsilon(i\tau)\|_{B_\alpha} \rightarrow_{\tau \rightarrow \infty} 0$. On fait un calcul analogue pour $(1 + i\tau)$ et la norme dans B_δ , en notant que $G(1) = e^{-\delta^2} f(\delta)$.

D'autre part, la fonction H_ε est par définition continue bornée sur S , holomorphe à l'intérieur, à valeurs dans $B_0 + B_1$. D'après ce qui précède, H_ε est donc dans $\mathcal{F}(B_0, B_1)$. La représentation intégrale (0.2) à l'intérieur de S , à valeurs dans $B_0 + B_1$, puis (2.13) et son analogue en $1 + i\tau$, entraînent $\|H_\varepsilon(z)\|_{B_\alpha + B_\delta} \leq 4e \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}$ sur S . Il en résulte que

$$\|e^{\varepsilon z^2} G(z)\|_{B_\alpha + B_\delta} \leq 4e |2 + z| \|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})}, \quad z \in S.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient la condition (C) pour G .

b) Si $B_j = A_j^*$ on a toujours $B^\theta = (B^\alpha, B^\delta)^\gamma$, car ces espaces sont les duaux de A_θ et $(A_\alpha, A_\delta)_\gamma$ par le rappel (iii) et $A_\theta = (A_\alpha, A_\delta)_\gamma$ d'après le théorème de réitération [4, Th. 4.6.1]. L'identité est continue : $B^\theta \rightarrow (B_\alpha, B_\delta)^\gamma$ par a), et $(B_\alpha, B_\delta)^\gamma \rightarrow (B^\alpha, B^\delta)^\gamma$ par le rappel (ii), d'où l'égalité de ces trois espaces. \square

PROPOSITION 2.7. — Soient $p \in]1, +\infty[$, $\alpha, \gamma, \delta, \theta$ comme dans l'énoncé du lemme 2.6. Supposons que $i^* : A_1^* \rightarrow A_0^*$ soit un opérateur de Radon-Nikodym.

a) Alors, isométriquement,

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta) &\subset \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta) = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_0^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta \\ &= [L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha), L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\delta)]^\gamma. \end{aligned}$$

b) Si cette inclusion est une égalité, l'espace

$$(A_0^*, A_1^*)^\theta = [(A_0^*, A_1^*)^\alpha, (A_0^*, A_1^*)^\delta]^\gamma$$

a la propriété de Radon-Nikodym.

Démonstration. —

a) Désignons par B^θ l'espace $[\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_0^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta$. D'après les rappels (iii) et 2-e, $B_j = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_j^*)$ est le dual de $L^p(\mathbb{T}, A_j)$, $j \in \{0, 1\}$. D'après (2.6) on a $B^\theta = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$, donc $L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$ en est un sous-espace fermé. D'après le lemme 2.6, $B^\theta = (B_\alpha, B_\delta)^\gamma$. D'après l'hypothèse et la proposition 2.3,

$$B_\alpha = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_0^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_\alpha = L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha)$$

et de même pour δ . D'où l'égalité dans l'énoncé.

b) D'après ce qui précède l'hypothèse implique $L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta) = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$. \square

Dans la situation ci-dessus, par le lemme 2.6 b),

$$(A_0^*, A_1^*)^\theta = [(A_0^*, A_1^*)_\alpha, (A_0^*, A_1^*)_\delta]^\gamma = [(A_0^*, A_1^*)^\alpha, (A_0^*, A_1^*)^\delta]^\gamma$$

et $B^\theta = (B^\alpha, B^\delta)^\gamma$. Donc les plongements suivants sont en fait surjectifs :

$$\begin{aligned} B^\theta &= [L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha), L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\delta)]^\gamma \\ &\rightarrow [L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\alpha), L^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\delta)]^\gamma \\ &\rightarrow [\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\alpha), \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\delta)]^\gamma = B^\theta. \end{aligned}$$

On en déduit que (2.1) ne s'étend pas à l'interpolation $[\cdot, \cdot]^\theta$:

COROLLAIRE 2.8. — Soient $V_0 = ((L^\psi)^*, L^\infty)_\alpha$ et $V_1 = ((L^\psi)^*, L^\infty)_\delta$, avec $0 < \alpha < \delta < 1$. Pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $\gamma \in]0, 1[$, $L^p(\mathbb{T}, V^\gamma)$ est un sous-espace fermé strict de $[L^p(\mathbb{T}, V_0), L^p(\mathbb{T}, V_1)]^\gamma$.

On a la même conclusion avec $V_0 = ((L^\psi)^*, L^\infty)^\alpha$, $V_1 = ((L^\psi)^*, L^\infty)^\delta$.

Démonstration. — On peut appliquer la proposition 2.7 et la remarque qui la suit, puisque, d'après le corollaire 1.4, l'identité $i^* : L^\infty \rightarrow (L^\psi)^*$ est de Radon-Nikodym et que $((L^\psi)^*, L^\infty)^\theta$ n'a pas *RNa*, a fortiori n'a pas la propriété de Radon-Nikodym. \square

3. Interpolation des espaces de Hardy vectoriels

Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation et $0 < \theta < 1$. On a un *plongement de norme 1* :

$$[H^p(\mathbb{T}, B_0), H^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta \rightarrow H^p(\mathbb{T}, B_\theta), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (3.1)$$

En effet l'espace de gauche s'injecte canoniquement dans $L^p(\mathbb{T}, B_\theta)$ d'après (2.1) et (2.3) ; $H^p(\mathbb{T}, B_0) \cap H^p(\mathbb{T}, B_1)$ est dense à gauche, donc dans l'image. De même, d'après (2.2), on a un *plongement de norme 1* :

$$[H^p(\mathbb{T}, B_0), H^p(\mathbb{T}, B_1)]_{\theta,p} \rightarrow H^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p}), \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.2)$$

Soit $1 \leq p < \infty$. Le plongement dans (3.1) est surjectif si B_0 et B_1 sont des espaces *UMD* [7, p. 352 et prop. 5.4] ; dans (3.1) et (3.2) il ne l'est pas pour le couple $(L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})})$ [7, prop. 5.2, rem. 6.3].

Nous donnerons une méthode plus générale (corollaire 3.12) pour retrouver ce dernier résultat. L'idée est d'établir des liens entre la surjectivité et la propriété *RNa* de certains espaces. Nous considérerons aussi les espaces interpolés $[\cdot, \cdot]^\theta$ et reviendrons dans ce cadre sur l'exemple du corollaire 2.8. Au passage nous étudierons le lien entre la surjectivité dans (3.1) et la fermeture de l'image dans (3.3), puis dans (3.2) et (3.4), notant que, d'après (2.4) et (2.5), on a les *plongements de norme 1* :

$$[H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta \rightarrow H^p(\mathbb{D}, B_\theta), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (3.3)$$

$$[H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]_{\theta,p} \rightarrow H^p[\mathbb{D}, (B_0, B_1)_{\theta,p}], \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.4)$$

Commençons par quelques notations et quelques rappels. Si Y est un sous-espace fermé d'un espace de Banach X , on notera $[x]$ l'image de $x \in X$ dans l'espace quotient X/Y .

La notation $\overline{H}_0^p(\mathbb{D}, X)$ désignera l'espace des fonctions $f : \mathbb{D} \rightarrow X$ telles que l'application $z \rightarrow f(\bar{z})$ est dans $H^p(\mathbb{D}, X)$ et $f(0) = 0$, et $\overline{H}_0^p(\mathbb{T}, X)$ désignera l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ telles que

$$\int_{\mathbb{T}} e^{-ikt} f(t) dt = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

et $C_{\mathbb{Z}^-}(\mathbb{T}, X) = C(\mathbb{T}, X) \cap \overline{H}_0^\infty(\mathbb{T}, X)$.

a) Pour $p \in [1, +\infty[$, on note

$$E_p(X) = L^p(\mathbb{T}, X) / \overline{H}_0^p(\mathbb{T}, X), \quad E_\infty(X) = C(\mathbb{T}, X) / \overline{C_{\mathbb{N}^*}}(\mathbb{T}, X),$$

d'où, isométriquement, d'après le rappel 2-e,

$$E_p(X)^* = H^{p'}(\mathbb{D}, X^*), \quad E_\infty(X)^* = H^1(\mathbb{D}, X^*), \quad (3.5)$$

la dualité étant exprimée par

$$([f], g) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \langle f(t), g(r e^{-it}) \rangle dt.$$

b) Pour $p' \in [1, +\infty[$, on note

$$F_{p'}(X) = \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, X) / \overline{H}_0^{p'}(\mathbb{D}, X).$$

D'après le rappel 2-e, pour $p' \in]1, +\infty]$, notant $C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X) = C(\mathbb{T}, X) \cap H^\infty(\mathbb{T}, X)$,

$$F_{p'}(X^*) = \overline{H}^p(\mathbb{T}, X^*)^*, \quad F_1(X^*) = C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X^*)^*. \quad (3.6)$$

LEMME 3.1. — *L'espace $E_p(X)$ est isométriquement un sous-espace fermé de $F_p(X)$, $p \in [1, +\infty[$.*

Démonstration. — Supposons $p < \infty$. Comme $L^p(\mathbb{T}, X)$ et $\overline{H}_0^p(\mathbb{T}, X)$ s'identifient respectivement à des sous-espaces fermés de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ et de $\overline{H}_0^p(\mathbb{D}, X)$, l'application correspondante : $E_p(X) \rightarrow F_p(X)$ est de norme 1. Soient $[f] \in E_p(X)$, $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ un représentant, \tilde{f} son prolongement harmonique sur \mathbb{D} . Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \overline{H}_0^p(\mathbb{D}, X)$ telle que

$$\|\tilde{f} + g\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} \leq \|[\tilde{f}]\|_{F_p(X)} + \varepsilon.$$

Pour tout $r \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \| [f * P_r] \|_{E_p(X)} &\leq \| f * P_r + g_r \|_{L^p(\mathbb{T}, X)} \\ &\leq \| \tilde{f} + g \|_{h^p(\mathbb{D}, X)}. \end{aligned}$$

Comme $f * P_r \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} f$ dans $L^p(\mathbb{T}, X)$, on en déduit

$$\| [f] \|_{E_p(X)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \| [f * P_r] \|_{E_p(X)} \leq \| [\tilde{f}] \|_{F_p(X)}.$$

Pour $p = \infty$ la preuve est analogue, en remplaçant $L^p(\mathbb{T}, X)$ par $C(\mathbb{T}, X)$. \square

LEMME 3.2. — a) $H^p(\mathbb{T}, X)$ est normant pour $E_{p'}(X^*)$, $p \in [1, +\infty]$.

b) De même $H^p(\mathbb{T}, X^*)$ est normant pour $E_{p'}(X)$, $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration. — a) D'après le lemme 3.1, il suffit de voir que l'espace $H^p(\mathbb{T}, X)$ est normant pour $F_{p'}(X^*)$. C'est immédiat par (3.6) (et si $p = \infty$, $C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X)$, a fortiori $H^\infty(\mathbb{T}, X)$ est normant pour $F_1(X^*)$).

b) D'après a), l'espace $H^p(\mathbb{T}, X^*)$ est normant pour $E_{p'}(X^{**})$. Par le théorème des bipolaires et (3.5), sa boule unité est dense dans celle de $H^p(\mathbb{D}, X^{***})$ pour la convergence sur $E_{p'}(X^{**})$, en particulier dans celle de $H^p(\mathbb{D}, X^*)$ pour la convergence sur $E_{p'}(X)$. Par (3.5) à nouveau, $H^p(\mathbb{D}, X^*)$ est normant pour $E_{p'}(X)$, donc $H^p(\mathbb{T}, X^*)$ l'est aussi. \square

On en déduit également que $E_{p'}(X)$ s'identifie isométriquement à un sous-espace fermé de $E_{p'}(X^{**})$. On va s'intéresser à la relation entre la surjectivité dans (3.4) et la surjectivité dans (3.2), de même pour les deux types d'interpolés complexes. Si B_0 est un sous espace de B_1 , $E_{p'}(B_0)$ s'injecte canoniquement dans $E_{p'}(B_1)$, on l'identifie à son image, et de même pour les $F_{p'}(B_j)$.

LEMME 3.3. — Soit B_0 un sous-espace de B_1 , soient $\theta, r \in]0, 1[$ et soit $g \in \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, B_0)$. Alors

$$a) \quad \|[g_r]\|_{[E_{p'}(B_0), E_{p'}(B_1)]_{\theta, p'}} \leq \|[g]\|_{[F_{p'}(B_0), F_{p'}(B_1)]_{\theta, p'}}, \quad p' \in]1, +\infty[,$$

$$b) \quad \|[g_r]\|_{[E_{p'}(B_0), E_{p'}(B_1)]_{\theta}} \leq \|[g]\|_{[F_{p'}(B_0), F_{p'}(B_1)]_{\theta}}, \quad p' \in [1, +\infty].$$

Démonstration. — Soient X un Banach, $p' \in]1, +\infty[$ et $g \in \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, X)$. On a

$$\begin{aligned} \|[g_r]\|_{E_{p'}(X)} &= \inf_{\eta \in H_0^{p'}(\mathbb{T}, X)} \|g_r + \eta\|_{L^{p'}(\mathbb{T}, X)} \leq \inf_{h \in H_0^{p'}(\mathbb{D}, X)} \|g_r + h_r\|_{L^{p'}(\mathbb{T}, X)} \\ &\leq \inf_{h \in H_0^{p'}(\mathbb{D}, X)} \|g + h\|_{\mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, X)} = \|[g]\|_{F_{p'}(X)}. \end{aligned}$$

a) Si $g \in \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, B_0)$ on a donc $K_1([g_r], u) \leq K_2([g], u)$, $u \in \mathbb{R}^+$, pour les fonctionnelles K_1, K_2 associées aux couples $(E_{p'}(B_0), E_{p'}(B_1))$ et $(F_{p'}(B_0), F_{p'}(B_1))$, d'où la première inégalité.

b) D'après [4, lem. 4.2.3] le sous-espace \mathcal{F}_0 égal à

$$\left\{ F = \sum_{j=0}^n F_j \otimes [h_j] : h_j \in \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D}, B_0), F_j(\xi) = e^{\delta \xi^2} e^{\lambda_j \xi}, \delta > 0, \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}$$

est dense dans $\mathcal{F}[F_{p'}(B_0), F_{p'}(B_1)]$. En notant $F_r(\xi) = F(\xi)(r e^{i(\cdot)})$, $F \in \mathcal{F}_0$, $\xi \in S$, on a

$$\|F_r\|_{\mathcal{F}[E_{p'}(B_0), E_{p'}(B_1)]} \leq \|F\|_{\mathcal{F}[F_{p'}(B_0), F_{p'}(B_1)]},$$

ce qui implique la deuxième inégalité. \square

PROPOSITION 3.4. — *a) On suppose $[H^p(\mathbb{D}, A_0), H^p(\mathbb{D}, A_1)]_{\theta, p}$ fermé dans $H^p(\mathbb{D}, A_{\theta, p})$, $1 < p < \infty$. Alors, isomorphiquement,*

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0), H^p(\mathbb{T}, A_1)]_{\theta, p} = H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p}).$$

b) On suppose $[H^p(\mathbb{D}, A_0), H^p(\mathbb{D}, A_1)]_{\theta}$ fermé dans $H^p(\mathbb{D}, A_{\theta})$, $1 \leq p < +\infty$. Alors, isomorphiquement,

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0), H^p(\mathbb{T}, A_1)]_{\theta} = H^p(\mathbb{T}, A_{\theta}).$$

Démonstration. — Les hypothèses renforcent (3.4) et (3.3). Notons Y l'adhérence de A_1^* dans A_0^* .

a) On a les plongements de norme 1 :

$$\begin{aligned} Z &= [H^p(\mathbb{T}, A_0), H^p(\mathbb{T}, A_1)]_{\theta, p} \rightarrow [H^p(\mathbb{D}, A_0), H^p(\mathbb{D}, A_1)]_{\theta, p} \\ &\rightarrow [H^p(\mathbb{D}, Y^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^{**})]_{\theta, p}. \end{aligned}$$

Par les rappels (iv), (3.5) et 2-d, le dernier espace est isomorphe à V^* , où

$$V = [E_{p'}(Y), E_{p'}(A_1^*)]_{\theta, p'} = [E_{p'}(A_0^*), E_{p'}(A_1^*)]_{\theta, p'}.$$

Par le rappel (i) $H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p})$ s'identifie isométriquement à l'adhérence de $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ dans $H^p(\mathbb{D}, A_{\theta, p})$, et $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ est dense dans Z . Si Z est fermé dans V^* , il l'est dans $[H^p(\mathbb{D}, A_0), H^p(\mathbb{D}, A_1)]_{\theta, p}$, donc dans $H^p(\mathbb{D}, A_{\theta, p})$ par hypothèse, ce qui prouve a). Pour voir que Z est fermé dans V^* , il suffit de vérifier que les normes induites sur $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ par Z et V^* sont équivalentes.

D'après (3.6) et (iv) on a, isomorphiquement,

$$Z^* = [F_{p'}(A_0^*), F_{p'}(A_1^*)]_{\theta, p'},$$

et $F_{p'}(A_1^*)$ est dense dans Z^* (rappel (i)). Soit $f \in H^p(\mathbb{T}, A_0)$. Par le lemme 3.3, en se restreignant aux fonctions $[g] \in F_{p'}(A_1^*)$,

$$\begin{aligned} C^{-1}K^{-1}\|f\|_{V^*} &\leq K^{-1}\|f\|_Z \\ &\leq \sup \left\{ \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \langle f, [g_r] \rangle dt \right| ; \| [g] \|_{[F_{p'}(A_0^*), F_{p'}(A_1^*)]_{\theta, p'}} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \langle f, [g_r] \rangle dt \right| ; \| [g_r] \|_{[E_{p'}(A_0^*), E_{p'}(A_1^*)]_{\theta, p'}} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|f\|_{V^*}. \end{aligned}$$

b) La démonstration est analogue. On considère les plongements de norme 1 :

$$Z_\theta = [H^p(\mathbb{T}, A_0), H^p(\mathbb{T}, A_1)]_\theta \rightarrow (V_\theta)^* = [H^p(\mathbb{D}, Y^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^{**})]^\theta,$$

(l'égalité isométrique venant du rappel (iii)) où, par le rappel 2-d et (3.5),

$$V_\theta = [E_{p'}(Y), E_{p'}(A_1^*)]_\theta = [E_{p'}(A_0^*), E_{p'}(A_1^*)]_\theta.$$

Par le rappel (i), l'espace $H^p(\mathbb{T}, A_\theta)$ s'identifie isométriquement à l'adhérence de $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ dans $H^p(\mathbb{D}, A_\theta)$, et $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ est dense dans Z_θ . Si Z_θ est fermé dans $(V_\theta)^*$, il l'est dans $[H^p(\mathbb{D}, Y^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^{**})]_\theta$ par le rappel (ii), donc dans $[H^p(\mathbb{D}, A_0), H^p(\mathbb{D}, A_1)]_\theta$, donc dans $H^p(\mathbb{D}, A_\theta)$ par hypothèse, ce qui prouve b).

Pour voir que Z_θ est fermé dans $[V_\theta]^*$, il suffit de vérifier que les normes induites sur $H^p(\mathbb{T}, A_0)$ par Z_θ et $[V_\theta]^*$ sont équivalentes. On remplace $[Z_\theta]^*$, isométrique à $[F_{p'}(A_0^*), F_{p'}(A_1^*)]^\theta$, par son sous-espace $[F_{p'}(A_0^*), F_{p'}(A_1^*)]_\theta$ qui est normant pour Z_θ par le rappel 2-f et la dualité (3.6), et on applique le lemme 3.3 comme en a). \square

PROPOSITION 3.5. — Soit $\theta \in]0, 1[$.

a) Soit $p \in]1, +\infty[$. S'il y a un plongement continu :

$$H^p(\mathbb{T}, [A_0^*, A_1^*]_{\theta, p}) \rightarrow [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_{\theta, p},$$

alors, isomorphiquement,

$$[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_{\theta, p} = H^p(\mathbb{D}, [A_0^*, A_1^*]_{\theta, p}), \quad (3.7)$$

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0^*), H^p(\mathbb{T}, A_1^*)]_{\theta, p} = H^p(\mathbb{T}, [A_0^*, A_1^*]_{\theta, p}). \quad (3.8)$$

b) Soit $p \in [1, +\infty[$. On a toujours un plongement de norme 1 :

$$[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta \rightarrow H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta). \quad (3.9)$$

Si on a un plongement continu :

$$H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta) \rightarrow [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta,$$

l'application (3.9) est surjective et, isomorphiquement,

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0^*), H^p(\mathbb{T}, A_1^*)]_\theta = H^p(\mathbb{T}, [A_0^*, A_1^*]_\theta). \quad (3.10)$$

c) Supposons que A_θ (sous espace-fermé de $[(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$) y soit 1-complémenté. Alors on peut, dans b), remplacer l'hypothèse par l'existence d'un plongement :

$$H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\theta) \rightarrow [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta.$$

Commentaire : Sous l'hypothèse b), l'espace $H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$ est fermé dans $[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta$ grâce à (3.9). Se plonge-t-il dans (est-il égal à) $[H^p(\mathbb{T}, A_0^*), H^p(\mathbb{T}, A_1^*)]^\theta$? On retrouvera cette question au corollaire 3.15.

Démonstration. — On note Y l'adhérence de A_1^* dans A_0^* .

a) Pour montrer (3.7) il suffit, grâce à (3.4), de voir qu'il y a un plongement continu :

$$H^p(\mathbb{D}, [A_0^*, A_1^*]_{\theta, p'}) \rightarrow [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_{\theta, p'},$$

ou encore : $L^* = H^p(\mathbb{D}, [A_{\theta, p'}]^*) \rightarrow V^*$, en notant

$$L = E_{p'}(A_{\theta, p'}), \quad V = [E_{p'}(A_0), E_{p'}(A_1)]_{\theta, p'}.$$

Par (3.4) et la dualité (rappel (iv) et (3.5)), on a toujours un plongement continu (d'image dense par le rappel (i)) : $L \rightarrow V$. Comme $H^p(\mathbb{T}, [A_{\theta, p'}]^*)$ est normant pour L par le lemme 3.2, sa boule unité D est dense dans celle de L^* pour $\sigma(L^*, L)$ par le théorème des bipolaires. Par hypothèse, D se plonge dans une boule de rayon C de V^* , fermée pour $\sigma(V^*, V)$ et pour $\sigma(V^*, L)$. Par densité la boule unité de L^* s'y plonge aussi, ce qui prouve (3.7). On obtient (3.8) en appliquant la proposition 3.4 a) aux espaces A_1^* et Y , d'après le rappel 2-d.

b) Les espaces considérés dans (3.9) sont respectivement les duaux de $V_\theta = [E_{p'}(A_0), E_{p'}(A_1)]_\theta$ et $L_\theta = E_{p'}(A_\theta)$ par le rappel (iv) et (3.5).

(i) Comme $[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_\theta$ est normant pour V_θ par le rappel 2-f, sa boule unité est dense dans celle de $[V_\theta]^*$; par (3.3) et le rappel (ii) elle s'injecte dans la boule unité de $[L_\theta]^*$. Donc on a un plongement de norme 1 : $[V_\theta]^* \rightarrow [L_\theta]^*$, ce qui prouve (3.9).

(ii) On obtient le plongement : $[L_\theta]^* \rightarrow [V_\theta]^*$ comme en a), notant que $H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$ est normant pour L_θ par le lemme 3.2 et s'envoie continûment dans $[V_\theta]^*$ par hypothèse. D'après (i), $[L_\theta]^*$ et $[V_\theta]^*$ sont donc isomorphes. Alors $[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_\theta$, fermé dans $[V_\theta]^*$ par le rappel (ii), est fermé dans $[L_\theta]^* = H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$, donc dans $H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)_\theta)$ par le rappel (ii) et (3.3). La proposition 3.4 b) appliquée à A_1^* , Y et le rappel 2-d donnent (3.10).

c) On note $X = (A_0^*, A_1^*)_\theta = (Y, A_1^*)_\theta$, d'après le rappel 2-d. A_θ est toujours un sous-espace fermé de $[(A_0^*, A_1^*)_\theta]^* = X^*$ d'après le rappel 2-f. Si A_θ est 1-complémenté dans X^* , on note P la projection : $X^* \rightarrow A_\theta$. Alors P^* est une isométrie : $[A_\theta]^* \rightarrow X^{**}$ et, si $x \in A_\theta$, $y \in [A_\theta]^*$, $\langle P^*y, x \rangle = \langle y, Px \rangle = \langle y, x \rangle$. On modifie la preuve de b) (ii), en vérifiant que $H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\theta) = H^p(\mathbb{T}, X)$ est normant pour $L_\theta = E_{p'}(A_\theta)$. D'après le lemme 3.2 b), $H^p(\mathbb{T}, (A_\theta)^*)$ est normant pour $E_{p'}(A_\theta)$. Il suffit donc de voir que la boule unité C de $H^p(\mathbb{T}, X)$ est dense dans la boule unité de $H^p(\mathbb{T}, (A_\theta)^*)$ pour la convergence simple sur $E_{p'}(A_\theta)$.

Par le lemme 3.2 a), $H^p(\mathbb{T}, X)$ est normant pour $E_{p'}(X^*)$. Donc C est dense dans la boule unité G du dual de $E_{p'}(X^*)$, pour la convergence simple sur $E_{p'}(X^*)$, en particulier sur $E_{p'}(A_\theta)$. Par (3.5), G est la boule unité de $H^p(\mathbb{D}, X^{**})$. Soit donc f de norme 1 dans $H^p(\mathbb{T}, (A_\theta)^*)$. Alors $(I \otimes P^*)f$ est dans la boule unité de $H^p(\mathbb{T}, X^{**})$ donc dans G . En particulier, il existe une famille filtrante $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ dans C telle que, pour toute $g \in E_{p'}(A_\theta)$,

$$\langle f_\alpha, g \rangle \rightarrow \langle (I \otimes P^*)f, g \rangle = \langle f, (I \otimes P)g \rangle = \langle f, g \rangle,$$

ce qui achève la vérification. □

On comparera le lemme et le théorème suivants à la proposition 2.3.

LEMME 3.6. — *Soient B_0 un sous-espace de B_1 , $i : B_0 \rightarrow B_1$ un opérateur de Radon-Nikodym analytique, $p \in]1, +\infty[$. Alors*

a) *le plongement : $E_\theta = [H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta \rightarrow H^p(\mathbb{D}, B_\theta)$ a son image dans $H^p(\mathbb{T}, B_\theta)$;*

b) *le plongement : $E_{\theta,p} = [H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]_{\theta,p} \rightarrow H^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p})$ a son image dans $H^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p})$;*

c) *si $E_{\theta,p} = H^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p})$, l'espace $B_{\theta,p}$ a la propriété RNa.*

La clause a) signifie que, si $F \in E_\theta$, il existe $f \in H^p(\mathbb{T}, B_\theta)$ telle que $F = \tilde{f}$, prolongement harmonique de f , donc p.s. $F_r(e^{it}) \rightarrow f(e^{it})$ dans B_θ . Il en est de même en b).

Démonstration. — a) Le plongement vient de (3.4). On raisonne comme dans la preuve de la proposition 2.3 (seconde partie de a)).

b) se déduit de a) comme dans la preuve de la proposition 2.3 b) en remplaçant (2.2) par (3.2).

c) D'après l'hypothèse et b), $H^p(\mathbb{D}, B_{\theta,p}) = H^p(\mathbb{T}, B_{\theta,p})$. □

THÉORÈME 3.7. — Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$. Supposons que $i^* : A_1^* \rightarrow A_0^*$ soit un opérateur de Radon-Nikodym analytique et que l'espace $[A_0^*, A_1^*]_{\theta,p}$ n'ait pas la propriété *RNa*. Alors

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0^*), H^p(\mathbb{T}, A_1^*)]_{\theta,p} \subsetneq H^p(\mathbb{T}, [A_0^*, A_1^*]_{\theta,p}).$$

Démonstration. — Le plongement vient de (3.2). Supposons au contraire que ces deux espaces coïncident. La proposition 3.5 a) implique alors (3.7), le lemme 3.6 c) s'applique à A_0^*, A_1^* , donc $[A_0^*, A_1^*]_{\theta,p}$ a *RNa*, ce qui est contraire à la deuxième hypothèse. □

LEMME 3.8. — Pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$,

a) $A_{\theta,p} = [L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})}]_{\theta,p}$ est fermé dans $[C(\mathbb{T})^*, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]_{\theta,p} = B_{\theta,p}$.

b) $A_\theta = [L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})}]_\theta$ est fermé dans $B_\theta = [C(\mathbb{T})^*, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]_\theta$.

Démonstration. — Posons $A_0 = L^1(\mathbb{T})$, $A_1 = \widehat{c_0(\mathbb{Z})}$, $B_0 = C(\mathbb{T})^*$ et $B_1 = \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$.

a) Pour tout $r \in]0, 1[$, l'opérateur $a \rightarrow a * P_r$ est de norme 1 : $B_j \rightarrow A_j$, $j \in \{0, 1\}$, donc de norme ≤ 1 : $B_{\theta,p} \rightarrow A_{\theta,p}$, par interpolation [4, p. 27 et th. 3.1.2]. D'autre part, si $a \in A_0$, par le rappel (i),

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|a - a * P_r\|_{A_{\theta,p}} \leq \lim_{r \rightarrow 1^-} \|a - a * P_r\|_{A_0} = 0.$$

Par définition des normes $A_{\theta,p}$, $B_{\theta,p}$, on a donc, pour $a \in A_0$,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \|a * P_r\|_{A_{\theta,p}} \leq \|a\|_{B_{\theta,p}} \leq \|a\|_{A_{\theta,p}} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|a * P_r\|_{A_{\theta,p}}.$$

Cela prouve l'assertion puisque A_0 est dense dans $A_{\theta,p}$.

b) La preuve est analogue, en utilisant [4, th. 4.1.4]. □

PROPOSITION 3.9. — Pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in]1, +\infty[$, les plongements suivants ne sont pas surjectifs :

a)

$$[H^p(\mathbb{T}, M(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})})]_{\theta, p} \rightarrow H^p(\mathbb{T}, [M(\mathbb{T}), \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]_{\theta, p}),$$

b) [7]

$$[H^p(\mathbb{T}, L^1(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{c_0(\mathbb{Z})})]_{\theta, p} \rightarrow H^p(\mathbb{T}, [L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})}]_{\theta, p}).$$

Démonstration. — Les plongements viennent de (3.2). Avec les notations du lemme précédent, et d'après le lemme de Pisier [7, lemme 5.1], l'espace $A_{\theta, p}$ n'a pas *RNa*, et $B_{\theta, p}$ non plus puisque $A_{\theta, p}$ est fermé dans $B_{\theta, p}$ d'après le lemme 3.8. Enfin $C(\mathbb{T})^* = M(\mathbb{T})$ a la propriété *RNa*.

a) résulte alors du théorème 3.7.

b) Notons $X = [C(\mathbb{T}), \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}]_{\theta, p'}$, d'où $X^* = B_{\theta, p}$. On conserve les notations de la proposition 3.5 a). Supposons le plongement de b) surjectif et montrons que $A_{\theta, p}$ aurait la propriété *RNa*. D'après notre hypothèse, puis (3.5), le rappel (iii), et le lemme 3.6 appliqué à $C(\mathbb{T})^*, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$, on aurait les plongements

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p}) &= [H^p(\mathbb{T}, L^1(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{c_0(\mathbb{Z})})]_{\theta, p} \\ &\rightarrow [H^p(\mathbb{D}, M(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{D}, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})})]_{\theta, p} = V^* \\ &\rightarrow H^p(\mathbb{T}, B_{\theta, p}) \rightarrow H^p(\mathbb{D}, B_{\theta, p}) = L^* = [E_{p'}(X)]^*. \end{aligned}$$

D'après le rappel 2-e, tout élément $F \in H^p(\mathbb{D}, B_{\theta, p})$ est intégrale de Poisson d'une fonction $f \in VB^p(\mathbb{T}, B_{\theta, p}) = L^{p'}(\mathbb{T}, X)^*$; la famille $(f * P_r) = (F(r \cdot))$ est bornée dans $H^p(\mathbb{T}, B_{\theta, p})$ et $f * P_r \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} f$ pour la convergence simple sur $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$, donc sur $L = E_{p'}(X)$. D'après le lemme 3.8 $H^p(\mathbb{D}, A_{\theta, p})$ est fermé dans $H^p(\mathbb{D}, B_{\theta, p})$. En particulier, soit $F \in H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p})$. La famille $(f * P_r)$ est alors bornée dans $H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p})$. D'après notre hypothèse, cette famille serait bornée dans l'espace interpolé $[H^p(\mathbb{T}, M(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})})]_{\theta, p}$.

La famille des intégrales de Poisson $(f * P_r)$ serait bornée dans V^* ; toute valeur d'adhérence pour $\sigma(V^*, V)$ coïnciderait avec $F = \tilde{f}$ puisque L est d'image dense dans V d'après la preuve de la proposition 3.5 a). Par le lemme 3.6, f serait dans $H^p(\mathbb{T}, B_{\theta, p})$, donc $f * P_r(e^{it}) \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} f(e^{it})$ p.s. dans $B_{\theta, p}$, en fait dans $A_{\theta, p}$. Finalement, f serait dans l'espace $H^p(\mathbb{T}, A_{\theta, p})$. \square

LEMME 3.10. — Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation tel que les B_j sont séparables et que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_j , $j \in \{0, 1\}$. Soit $G \in \mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$. Alors

a) il existe des fonctions bornées : $\tau \rightarrow U_j(i\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, $\mathbb{R} \rightarrow B_j^*$, mesurables pour $\sigma(B_j^*, B_j)$, telles que $G'(z) \rightarrow U_j(i\tau)$ pour la topologie $\sigma(B_0^* + B_1^*, B_0 \cap B_1)$ lorsque $z \rightarrow i\tau + j$ non tangentielllement ;

b) pour $\theta \in]0, 1[$

$$\|G'(\theta)\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} \|U_0(i\tau)\|_{B_0^*} \frac{Q(\theta, i\tau)}{1-\theta} d\tau \right]^{1-\theta} \times \left[\int_{\mathbb{R}} \|U_1(i\tau)\|_{B_1^*} \frac{Q(\theta, 1+i\tau)}{\theta} d\tau \right]^\theta. \quad (3.11)$$

Démonstration. — a) Par définition, G' est holomorphe sur S^0 , à valeurs dans $B_0^* + B_1^*$, et bornée en norme sur S^0 par $\|G\|_{\mathcal{G}}$ comme on l'a rappelé au début de l'article. Par la théorie scalaire et la séparabilité de $B_0 \cap B_1$, la fonction G' admet au bord de S , pour presque tout τ , des limites préfaibles non tangentielles $U_j(i\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, à valeurs dans $B_0^* + B_1^*$, bornées par $\|G\|_{\mathcal{G}}$ et mesurables pour $\sigma(B_0^* + B_1^*, B_0 \cap B_1)$.

D'autre part, en adaptant l'argument de [4, p. 95] (la topologie préfaible de B_j^* remplaçant la topologie faible) on définit p.s. sur \mathbb{R} — grâce à la séparabilité de B_j — des fonctions bornées : $\tau \rightarrow V_j(i\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, à valeurs respectivement dans B_j^* avec $\|V_j(i\tau)\|_{B_j^*} \leq \|G\|_{\mathcal{G}}$, préfaiblement mesurables, telles que, pour $a_j \in B_j$, p.s.,

$$\int_0^s \langle V_j(i\tau), a_j \rangle i d\tau = \langle G(is + j) - G(j), a_j \rangle.$$

La séparabilité de B_j entraîne que $\tau \rightarrow \|V_j(i\tau)\|_{B_j^*}$ est mesurable.

Vérifions que p.s. $U_j(i\tau) = V_j(i\tau)$, $j \in \{0, 1\}$, dans $B_0^* + B_1^*$, d'où $\|U_j(i\tau)\|_{B_j^*} \leq \|G\|_{\mathcal{G}}$. Soit $a \in B_0 \cap B_1$. Par la continuité de $\langle G(\cdot), a \rangle$ sur S , puis par convergence dominée, avec $x > 0$ si $j = 0$, $x < 0$ si $j = 1$, on a, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle G(is + j) - G(j), a \rangle &= \lim_{x \rightarrow 0} \langle G(x + is + j) - G(x + j), a \rangle \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^s \langle G'(x + i\tau + j), a \rangle i d\tau \\ &= \int_0^s \langle U_j(i\tau), a \rangle i d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cela implique l'égalité p.s. cherchée.

b) Soient $\varepsilon > 0$ et $a \in B_0 \cap B_1$ tel que $\|a\|_{B_\theta} < 1$ et $\|G'(\theta)\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \leq |\langle G'(\theta), a \rangle| + \varepsilon$. D'après [4, lemma 4.2.3] dont on conserve la notation, il existe $F \in \mathcal{F}_0(B_0, B_1)$ tel que $F(\theta) = a$ et $\|F\|_{\mathcal{F}(B_0, B_1)} < 1$. Par définition de $\mathcal{F}_0(B_0, B_1)$ (utilisé dans la preuve du lemme 3.3)

$$F = \sum_{j=1}^n F_j \otimes a_j,$$

où F_j est une fonction scalaire holomorphe, les a_j sont dans $B_0 \cap B_1$.

Notant $U_j(i\tau) = G'(i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ et

$$\phi(z) = \langle G'(z), F(z) \rangle, \quad z \in S,$$

nous allons montrer que

$$|\phi(\theta)| \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |\phi(i\tau)| \frac{Q(\theta, i\tau)}{1-\theta} d\tau \right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbb{R}} |\phi(1+i\tau)| \frac{Q(\theta, 1+i\tau)}{\theta} d\tau \right]^\theta. \quad (3.13)$$

Cela impliquera (3.11), puisque, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(j+i\tau)| \leq \|U_j(i\tau)\|_{B_j^*} \|F(j+i\tau)\|_{B_j} \leq \|U_j(i\tau)\|_{B_j^*}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, considérons

$$\psi_{h,\varepsilon}(z) = \exp(\varepsilon z^2) \langle [G(z+ih) - G(z)] / (ih), F(z) \rangle.$$

Pour $z = \theta + iy \in S^0$ on a, par les rappels (ii) et (iii),

$$\begin{aligned} |\psi_{h,\varepsilon}(z)| &\leq \left\| \exp(\varepsilon z^2) [G(z+ih) - G(z)] / (ih) \right\|_{(B_0^*, B_1^*)_\theta} \|F(z)\|_{(B_0, B_1)_\theta} \\ &\leq \left\| \exp(\varepsilon(\cdot)^2) [G(\cdot+ih) - G(\cdot)] / (ih) \right\|_{\mathcal{F}(B_0^*, B_1^*)} \\ &\leq \exp(\varepsilon) \|G\|_{\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)}. \end{aligned}$$

De même, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a $|\psi_{h,\varepsilon}(j+i\tau)| \leq \exp(\varepsilon) \|G\|_{\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)}$, pour $j = 0, 1$. La fonction $\psi_{h,\varepsilon}$ est donc bornée et continue sur S , holomorphe sur S^0 . D'après [19, th. 1] (on applique la formule de représentation intégrale à la fonction $M_0^{z-1} M_1^{-z} \psi_{h,\varepsilon}(z)$)

$$\begin{aligned} |\psi_{h,\varepsilon}(\theta)| &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi_{h,\varepsilon}(i\tau)| \frac{Q(\theta, i\tau)}{1-\theta} d\tau \right]^{1-\theta} \times \\ &\quad \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi_{h,\varepsilon}(1+i\tau)| \frac{Q(\theta, 1+i\tau)}{\theta} d\tau \right]^\theta. \quad (3.14) \end{aligned}$$

D'après (3.12) et le théorème de différentiation de Lebesgue, pour presque tout $\tau \in \mathbb{R}$, pour $a \in B_0 \cap B_1$,

$$\langle [G(j+i\tau+ih) - G(j+i\tau)] / (ih), a \rangle \rightarrow_{h \rightarrow 0} \langle U_j(i\tau), a \rangle, \quad j = 0, 1.$$

Passant à la limite dans (3.14) lorsque $h \rightarrow 0$ en appliquant le théorème de convergence dominée, on peut y remplacer $|\psi_{h,\varepsilon}(\theta)|$ par

$$\exp(\varepsilon\theta^2) |\phi(\theta)|$$

et $|\psi_{h,\varepsilon}(j + i\tau)|$ par $\exp(-\varepsilon\tau^2)|\phi(j + i\tau)|$. Un passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et à nouveau le théorème de convergence dominée impliquent alors l'inégalité (3.13) cherchée. \square

Le théorème suivant est à rapprocher du lemme 3.6.

THÉORÈME 3.11. — *Supposons que A_0, A_1 sont séparables et que A_1^* a la propriété RNa. Pour $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$,*

a) *on a un plongement continu :*

$$E^\theta = [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta \rightarrow H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta);$$

b) *si $[H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta = H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$, l'espace $(A_0^*, A_1^*)^\theta$ a la propriété RNa.*

Démonstration. — a) Par (3.5) les $H^p(\mathbb{D}, A_j^*)$ sont bien des duals d'espaces séparables. Soient $G \in \mathcal{G}(H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)) = \mathcal{G}$ et U_j les limites de G' au bord de S définies par le lemme 3.10, à valeurs dans $H^p(\mathbb{D}, A_j^*)$, $j \in \{0, 1\}$. Pour tout $r \in]0, 1[$ la fonction $z \rightarrow G(z)(r \cdot)$ est encore dans \mathcal{G} , avec une norme $\leq \|G\|_{\mathcal{G}}$ tandis que la fonction $z \rightarrow G'(z)(r \cdot)$ admet les valeurs au bord : $\tau \rightarrow U_j(i\tau)(r \cdot) \in H^p(\mathbb{D}, A_j^*)$ pour presque tout τ . Soit $r_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$. D'après (3.11) appliquée à $z \rightarrow G(z)(r_m \cdot) - G(z)(r_n \cdot)$,

$$\begin{aligned} \|G'(\theta)(r_m \cdot) - G'(\theta)(r_n \cdot)\|_{E^\theta} &\leq (2\|G\|_{\mathcal{G}})^{1-\theta} \times \\ &\left[\int_{\mathbb{R}} \|U_1(i\tau)(r_m \cdot) - U_1(i\tau)(r_n \cdot)\|_{H^p(\mathbb{D}, A_1^*)} \frac{Q(\theta, 1 + i\tau)}{\theta} d\tau \right]^\theta. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour presque tout τ , la fonction $z \rightarrow U_1(i\tau)(r_m z)$ est continue sur le disque unité fermé, à valeurs dans A_1^* , donc sa norme dans $H^p(\mathbb{D}, A_1^*)$ n'est autre que la norme dans $H^p(\mathbb{T}, A_1^*)$ de $U_1(i\tau)(r_m e^{i(\cdot)})$, qui est majorée par $\|G\|_{\mathcal{G}}$.

Comme A_1^* a la propriété RNa, $[U_1(i\tau)(r_n e^{i(\cdot)})]_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $H^p(\mathbb{T}, A_1^*)$, pour presque tout τ , donc converge dans cet espace. Par convergence dominée, $[U_1(i \cdot)(r_n e^{i(\cdot)})]_{n \geq 0}$ converge dans l'espace $L^p(Q(\theta, i\tau)/\theta d\tau, H^p(\mathbb{T}, A_1^*))$. Par (3.15) $[G'(\theta)(r_n \cdot)]_{n \geq 0}$ converge dans E^θ , donc dans $H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$ par (3.9). Cela prouve a).

b) D'après l'hypothèse et a) tout élément de $H^p(\mathbb{D}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$ est l'intégrale de Poisson d'une fonction dans $H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)^\theta)$. \square

On reprend dans le corollaire suivant la première hypothèse de la proposition 3.5 c).

COROLLAIRE 3.12. — Soient θ, p, A_0, A_1 comme dans le théorème 3.11. Supposons que A_θ , qui est un sous-espace fermé de $[(A_0^*, A_1^*)_\theta]^* = X^*$, y soit 1-complémenté. Si $(A_0^*, A_1^*)^\theta$ n'a pas la propriété *RNa*, on a

$$[H^p(\mathbb{T}, A_0^*), H^p(\mathbb{T}, A_1^*)]_\theta \subsetneq H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\theta).$$

Démonstration. — Le plongement vient de (3.1). S'il était surjectif, on aurait $H^p(\mathbb{D}, [A_0^*, A_1^*]^\theta) = [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta$ par la proposition 3.5 c). D'après le théorème 3.11, l'espace $(A_0^*, A_1^*)^\theta$ aurait la propriété *RNa*. \square

COROLLAIRE 3.13. — Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$. Alors les plongements suivants ne sont pas surjectifs :

a)

$$[H^p(\mathbb{T}, M(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})})]_\theta \rightarrow H^p(\mathbb{T}, [M(\mathbb{T}), \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]_\theta),$$

b) [7]

$$[H^p(\mathbb{T}, L^1(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{T}, \widehat{c_0(\mathbb{Z})})]_\theta \rightarrow H^p(\mathbb{T}, [L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})}]_\theta).$$

Démonstration. — Notons $A_\theta = [C(\mathbb{T}), \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}]_\theta = [L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}]_\theta$ (rappel 2-d). D'après le lemme 3.8, $Y = [L^1(\mathbb{T}), \widehat{c_0(\mathbb{Z})}]_\theta$ est fermé dans $X = [M(\mathbb{T}), \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]_\theta$, lui-même fermé dans $A_\theta^* = [M(\mathbb{T}), \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})}]^\theta$ (rappel (iii)). Par le lemme de Pisier [7], Y n'a pas *RNa*, donc $(A_\theta)^*$ non plus. D'autre part Y^* est quotient de X^* . Comme $\ell^1(\mathbb{Z})$ est un dual séparable, la preuve de [4, Th. 4.3.1] s'adapte facilement et entraîne

$$A_\theta = [L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}]_\theta = [L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}]^\theta = Y^*.$$

Comme A_θ est fermé dans X^* d'après la preuve de la proposition 3.5 c), il y est donc 1-complémenté. La clause a) est alors une conséquence immédiate du corollaire 3.12.

b) D'après (3.9) on a le plongement :

$$[V_\theta]^* = [H^p(\mathbb{D}, M(\mathbb{T})), H^p(\mathbb{D}, \widehat{\ell^\infty(\mathbb{Z})})]^\theta \rightarrow H^p(\mathbb{D}, A_\theta^*) = [L_\theta]^*. \quad (3.16)$$

Supposons le plongement de b) (dû à (3.1)) surjectif. En particulier on aurait un plongement : $H^p(\mathbb{T}, Y) \rightarrow [V_\theta]^*$. On va montrer qu'il y aurait surjection dans (3.16). Le théorème 3.11 donne alors la contradiction puisque $(A_\theta)^*$ n'a pas *RNa*. On modifie la preuve de la proposition 3.5 c) (dont on garde les notations) en vérifiant que $H^p(\mathbb{T}, Y)$ (au lieu de $H^p(\mathbb{T}, X)$) est normant pour $L_\theta = E_{p'}(A_\theta)$. Cela résulte du lemme 3.2 puisque $E_{p'}(A_\theta) = E_{p'}(Y^*)$. \square

La proposition suivante est similaire à la proposition 2.7.

PROPOSITION 3.14. — *Soit $p \in]1, +\infty[$. Supposons que $i^* : A_1^* \rightarrow A_0^*$ soit un opérateur de Radon-Nikodym analytique. Alors pour $\alpha, \gamma, \delta \in]0, 1[$ et $\theta = (1 - \gamma)\alpha + \gamma\delta$, il y a un plongement continu :*

$$B^\theta = [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]^\theta \rightarrow [H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha), H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\delta)]^\gamma .$$

Démonstration. — En posant $B_j = H^p(\mathbb{D}, A_j^*) = E_{p'}(A_j)^*$, $j \in \{0, 1\}$, le lemme 2.6 donne $B^\theta = (B_0, B_1)^\theta = (B_\alpha, B_\delta)^\gamma$. L'hypothèse et un argument analogue à celui de la preuve de la proposition 2.3 a) (deuxième partie), donnent le plongement :

$$B_\alpha = [H^p(\mathbb{D}, A_0^*), H^p(\mathbb{D}, A_1^*)]_\alpha \rightarrow H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha),$$

et de même pour δ , d'où le plongement continu :

$$(B_\alpha, B_\delta)^\gamma \rightarrow [H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\alpha), H^p(\mathbb{T}, (A_0^*, A_1^*)_\delta)]^\gamma . \quad \square$$

Le corollaire suivant est moins satisfaisant que le corollaire 2.8.

COROLLAIRE 3.15. — *Notons $L^\infty = B_0$, $(L^\psi)^* = B_1$. Soient $p, \alpha, \gamma, \delta$ et θ comme dans la proposition 3.14. Alors au moins une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) *l'espace $[H^p(\mathbb{T}, B_\alpha), H^p(\mathbb{T}, B_\delta)]^\gamma$ ne se plonge pas dans l'espace $H^p(\mathbb{T}, [B_\alpha, B_\delta]^\gamma) = H^p(\mathbb{T}, B^\theta)$;*

(ii) *$H^p(\mathbb{T}, B^\theta)$ ne se plonge pas dans $[H^p(\mathbb{T}, B_0), H^p(\mathbb{T}, B_1)]^\theta$.*

Démonstration. — L'égalité dans (i) vient du lemme 2.6 b). L'identité : $L^\infty \rightarrow (L^\psi)^*$ est un opérateur de Radon-Nikodym d'après le corollaire 1.4. Si on avait les plongements dans (i) et (ii), on aurait :

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{D}, B^\theta) &= [H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]^\theta \\ &\rightarrow [H^p(\mathbb{T}, B^\alpha), H^p(\mathbb{T}, B^\delta)]^\gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\rightarrow H^p(\mathbb{T}, [B^\alpha, B^\delta]^\gamma) = H^p(\mathbb{T}, B^\theta), \quad (3.18)$$

où la première égalité résulterait du plongement de (ii) et de la proposition 3.5 b), le plongement (3.17) résulterait de la proposition 3.14, le plongement (3.18) résulterait du plongement de (i). L'espace B^θ aurait donc la propriété RNA , ce qui contredirait le corollaire 1.4. \square

Remerciement. — Je remercie chaleureusement Françoise Lust-Piquard et Bernard Maurey pour le temps qu'ils m'ont consacré lors de la préparation de ce travail. Je remercie également le directeur de mon établissement Hamad Alnafah, qui m'a encouragé à continuer à faire de la recherche.

Bibliography

- [1] BEAUZAMY (B.). — Espaces d'interpolation réels, topologie et géométrie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York vol. 66 (1978).
- [2] BEAUZAMY (B.). — Opérateurs uniformément convexifiants, *Studia Math.* 57, p. 103-139 (1976).
- [3] BERGH (J.). — On the relation between the two complex methods of interpolation, *Indiana Univ. Math. J.* 28, p. 775-777 (1979).
- [4] BERGH (J.), LÖFSTRÖM (J.). — Interpolation spaces an introduction, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1976).
- [5] BLASCO (O.). — Boundary values of functions in vector valued Hardy spaces and geometry of Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 78 n° 2, p. 346-364 (1988).
- [6] BLASCO (O.). — Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators, *Studia Math.* VXXXVI, p. 19-33 (1987).
- [7] BLASCO (O.), XU (Q.). — Interpolation between vector valued Hardy spaces, *J. Func. Anal.* 102, p. 331-359 (1991).
- [8] BUKHVALOV (A. V.), DANILEVICH (A. A.). — Boundary properties of analytic harmonic functions with values in Banach spaces, *Math. Zametki* 31, 203-214, (1982), English translation *Math. Notes*, p. 939-944 (1980).
- [9] CALDERÓN (A. P.). — Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.* 24, p. 113-190 (1964).
- [10] DAHER (M.). — Une remarque sur la propriété de Radon-Nikodym, *C. R. Acad. Sci. Paris* 313, p. 269-271 (1991).
- [11] DAHER (M.). — Une remarque sur les espaces d'interpolation A^θ qui sont LUR, *Colloq. Math.* Vol. 123, N° 2, p. 197-204 (2011).
- [12] DAHER (M.). — Une remarque sur les espaces d'interpolation faiblement localement uniformément convexes, arXiv:1206.4848.
- [13] DINCULEANU (N.). — Vector measures, Pergamon, New-York (1967).
- [14] DOWLING (N.). — The analytic Radon-Nikodym property in Lebesgue-Bochner function spaces, *Proc. A.M.S.*, 99-1, p. 119-122 (1987).
- [15] DIESTEL (J.), UHL (J. J.). — Vector measures, *Math. Surveys* 15 A.M.S (1977).
- [16] GARLING (D. J. H.), MONTGOMERY-SMITH (S. J.). — Complemented subspaces of spaces obtained by interpolation, *J. Lond. Math. Soc.* II, Ser. 44, No. 3, p. 503-513 (1991).

- [17] HAAGERUP (U.), PISIER (G.). — Factorization of analytic functions with values in non commutative L^1 -spaces and applications, *Can. J. Math.* XXLI, No. 5, p. 882-906 (1989).
- [18] LIONS (J. L.), PEETRE (J.). — Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. 1, Math.* 19, p. 5-68 (1964).
- [19] MEYER (P. A.). — Interpolation entre espaces d'Orlicz, *Séminaire de probabilités XVI 1980/81, Lecture Notes in Math.* 920, p. 153-158 (1982).
- [20] RAO (M. M.), REN (Z. D.). — Theory of Orlicz spaces, *Pure and Applied Mathematics*, 146, New-York (1991).
- [21] ROSENTHAL (H. P.). — A characterization of spaces containing ℓ^1 , *Proc. Nat. Sci. (U. S. A.)*, Vol. 71, No. 2, p. 2411-2413 (1974).