ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Mohammad Daher

Interpolation des opérateurs de Radon–Nikodym et des espaces L^p_Λ, $\mathbf{h}^p_\Lambda$

Tome XXVI, n[o] 1 (2017), p. 1-22.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2017_6_26_1_1_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVI, n° 1, 2017
pp. 1-22

Interpolation des opérateurs de Radon–Nikodym et des espaces L^p_Λ, $\mathbf{h}^p_\Lambda$ (*)

Mohammad Daher (1)

Résumé. — Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach et $i : A_0 \to A_1$ une injection continue d'image dense. Soient $0 < \alpha < \beta < 1$ et $p \in]1, +\infty[$; l'injection i induit une injection $A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ entre les espaces d'interpolation réels [4]. Dans la première partie, on montre que si $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym, alors $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. Le théorème 2.2 montre que ce résultat est faux pour l'interpolation complexe.

On montre ensuite qu'il existe deux espaces de Banach B_0, B_1 et $i : B_0 \to B_1$ une injection de Radon–Nikodym tels que pour tous $0 < \alpha < \beta < 1$, l'injection $i : B_\alpha \to B_\beta$ ne soit pas un opérateur de Radon–Nikodym. On introduit l'espace d'interpolation A^+_θ, $\theta \in]0, 1[$, et on montre que $\overline{A}^\theta$ est un sous-espace isométrique de A^+_θ.

Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation tel que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1. Dans la deuxième partie, on montre que $L^p(\mathbb{T}, \overline{B}^\theta)$ est un sous-espace isométrique de $\overline{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]}^\theta$, pour tout $p \in [1, +\infty[$. Pour $p = \infty$, on montre que $L^\infty(\mathbb{T}, B^\theta)$ est un sous-espace isométrique de $[L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1)]^\theta$. On retrouve notre résultat antérieur [10] concernant l'interpolation des espaces de Hardy vectoriels.

Abstract. — Let A_0, A_1 be two Banach spaces, $i : A_0 \to A_1$ a continuous injection with dense range and $0 < \alpha < \beta < 1$. In the first part of this work, we show that if $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ is a Radon–Nikodym operator, then $A_{\alpha,p}$ has the Radon–Nikodym property. We show that this result is false for complex interpolation (Theorem 2.2). We also show that there are two Banach spaces B_0, B_1 and $i : B_0 \to B_1$ a Radon–Nikodym injection such that for $0 < \alpha < \beta < 1$, $i : A_\alpha \to A_\beta$ is not a Radon–Nikodym operator. We introduce the interpolation spaces A^+_θ, $\theta \in]0, 1[$, and show that $\overline{A}^\theta$ is an isometric subspace of A^+_θ.

(*) Reçu le 24 novembre 2015, accepté le 24 février 2016.
Mots-clés : Interpolation des espaces $\mathbf{h}^p$ et L^p.
Classification math. : 45B70, 46B22, 46B28.
(1) 16 square Albert Schweitzer, 77350 Le Mée-sur-Seine, France — m.daher@orange.fr
Article proposé par Fabrice Gamboa.

In the second part of the article, we consider a regular interpolation pair (B_0, B_1) and show that $L^p(\mathbb{T}, \overline{B}^{\theta})$ is an isometric subspace of $\overline{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]}^{\theta}$ for every $p \in [1, +\infty[$. Moreover, we show that the space $L^\infty(\mathbb{T}, B^\theta)$ is an isometric subspace of $[L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1)]^\theta$. We retrieve our result from [10] concerning the interpolation of Hardy spaces of vector valued functions.

1. Introduction

On note $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, m la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbb{T}$. Pour tout espace de Banach X, on note $(x, x^*) = x^*(x)$ quand $x \in X$, $x^* \in X^*$.

Définition 1.1. — *Soient X un espace de Banach et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. On dit que la fonction $u : \mathbb{D} \to X$ est une fonction harmonique à spectre dans Λ s'il existe une suite $(x_k)_{k\in\Lambda}$ dans X vérifiant*

$$u(z) = \sum_{k\in\Lambda} r^{|k|} e^{ik\theta} x_k, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

et si cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on désigne par $\mathbf{h}^p_\Lambda(\mathbb{D}, X)$ l'espace des fonctions $u : \mathbb{D} \to X$ harmoniques à spectre dans Λ, bornées si $p = +\infty$, ou vérifiant si $p \in [1, +\infty[$ que

$$\|u\|^p_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)} = \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \|u(re^{it})\|^p_X \, dm(t) < +\infty.$$

Si $\Lambda = \mathbb{N}$, on note $\mathbf{h}^p_{\mathbb{N}}(\mathbb{D}, X) = H^p(\mathbb{D}, X)$ et $\mathbf{h}^p_{\mathbb{Z}}(\mathbb{D}, X) = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$. On désigne par $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ telles que $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikt} f(t) \, dm(t) = 0$ pour tout $k \notin \Lambda$. Pour $\Lambda = \mathbb{N}$, on note $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, X) = H^p(\mathbb{T}, X)$.

Le noyau de Poisson P_z au point $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ est défini par

$$\begin{aligned} P_z(t) &= \mathrm{Re}\big((e^{it} + z)/(e^{it} - z)\big) = (1 - r^2)/|1 - ze^{-it}|^2 \\ &= P_r(\theta - t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)}, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

On désigne par $L^{p+}(\mathbb{T})$ le cône des fonctions de $L^p(\mathbb{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors [11] $VB^p(\mathbb{T}, X)$, $1 < p \leqslant +\infty$, désigne l'espace des opérateurs $T : L^{p'}(\mathbb{T}) \to X$, tels qu'il existe $g^T \in L^{p+}(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\|Tf\|_X \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f(t)| g^T(t) \, dm(t), \quad f \in L^{p'}(\mathbb{T}), \tag{1.1}$$

où p' désigne l'exposant conjugué de p, $1/p + 1/p' = 1$. Cet espace est muni de la norme

$$\|T\|_{VB^p(\mathbb{T},X)} = \inf\left\{\|g^T\|_{L^p}\right\}.$$

L'espace $VB^\infty(\mathbb{T}, X)$ coïncide avec l'espace des opérateurs bornés de $L^1(\mathbb{T})$ dans X. L'espace $L^p(\mathbb{T}, X)$ s'identifie isométriquement à un sous espace fermé de $VB^p(\mathbb{T}, X)$ [5, Corollary 14]. L'espace $VB^p(\mathbb{T}, X^*)$ est le dual de $L^{p'}(\mathbb{T}, X)$, lorsque $1 < p \leqslant \infty$ [11, Chapter II, 13.3, Corollary 1.1]. D'après [9, lemme 3.2], on a $VB^p(\mathbb{T}, X) = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ isométriquement. Pour $f \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ on note $T_f \in VB^p(\mathbb{T}, X)$ l'opérateur associé à f, qui vérifie $T_f(P_z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Soient $\overline{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation complexe au sens de [4, Chapter II] et $\theta \in \,]0, 1[$. Soient $S = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$ et $S_0 = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. On note $\mathcal{F}(\overline{B})$ l'espace des fonctions $F : S \to B_0 + B_1$, F continue bornée sur S, holomorphe sur S_0, telle que l'application $\tau \to F(j + i\tau)$ soit continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans B_j et $\|F(j + i\tau)\|_{B_j} \to 0$ quand $|\tau| \to \infty$, pour $j \in \{0, 1\}$. Si $F \in \mathcal{F}(\overline{B})$ on pose

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} = \max\bigl\{\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{B_0}, \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(1 + i\tau)\|_{B_1}\bigr\}.$$

L'espace d'interpolation complexe $(B_0, B_1)_\theta = B_\theta$ est égal à l'ensemble $\bigl\{F(\theta);\ F \in \mathcal{F}(\overline{B})\bigr\}$. C'est un espace de Banach [4, Theorem 4.1.2] pour la norme définie par

$$\|a\|_{B_\theta} = \inf\bigl\{\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})};\ F(\theta) = a\bigr\}.$$

Toute fonction $F \in \mathcal{F}(\overline{B})$ est représentée à partir de ses valeurs au bord grâce à la mesure harmonique [4, Sections 4.3, 4.5] :

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} F(i\tau)Q_0(z, i\tau)\, d\tau + \int_{\mathbb{R}} F(1 + i\tau)Q_1(z, 1 + i\tau)\, d\tau, \quad z \in S_0. \tag{1.2}$$

On note $\mathcal{G}(\overline{B})$ le quotient par les constantes (à valeurs dans $B_0 + B_1$) de l'espace des fonctions g à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues sur S, holomorphes dans S_0 et telles que

(C) $\displaystyle\sup_{z\in S} \frac{\|g(z)\|_{B_0+B_1}}{1 + |z|} < +\infty$,

(C') on a $g(j + i\tau) - g(j + i\tau') \in B_j$, pour tous $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $j \in \{0, 1\}$ et la quantité suivante est finie :

$$\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})} = \max\begin{bmatrix} \sup_{\tau\neq\tau'\in\mathbb{R}}\bigl(\frac{\|g(i\tau)-g(i\tau')\|_{B_0}}{|\tau-\tau'|}\bigr), \\ \sup_{\tau\neq\tau'\in\mathbb{R}}\bigl(\frac{\|(g(1+i\tau)-g(1+i\tau')\|_{B_1}}{|\tau-\tau'|}\bigr) \end{bmatrix}.$$

L'espace $(B_0, B_1)^\theta = B^\theta = \{g'(\theta);\ g \in \mathcal{G}(\overline{B})\}$ est de Banach [4, Theorem 4.1.4] pour la norme définie par

$$\|a\|_{B^\theta} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}(\overline{B})};\ g'(\theta) = a\}.$$

Soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace d'interpolation réel $B_{\theta,p}$ est défini par

$$B_{\theta,p} = \Big\{a \in B_0 + B_1;\ \|a\|_{B_{\theta,p}} = \Big[\int_{\mathbb{R}^+} \big(K(a,t)/t^\theta\big)^p\, dt/t\Big]^{1/p} < +\infty\Big\},$$

où

$$K(a,t) = \inf\{\|a_0\|_{B_0} + t\|a_1\|_{B_1};\ a = a_0 + a_1,\ a_j \in B_j,\ j = 0, 1\}.$$

L'espace $B_{\theta,p}$, muni de $\|\,.\,\|_{B_{\theta,p}}$, est un espace de Banach [4, Theorem 3.4.2]. Pour tout $\theta \in [0,1]$ et tout $p \in [1, \infty[$, on désigne par B_θ^* (resp. $B_{\theta,p}^*$) le dual de B_θ (resp. le dual de $B_{\theta,p}$), avec la convention que $B_j = B_{j,p}$, $j = 0, 1$.

Les espaces d'interpolation ont les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'intersection $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_θ [4, Theorem 4.2.2] et dans $B_{\theta,p}$ [4, Theorem 3.4.2].
(ii) L'espace B_θ est un sous-espace isométrique de B^θ [3].
(iii) Le dual de B_θ s'identifie isométriquement à l'espace $(B_0^*, B_1^*)^\theta$ si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1 [4, Theorem 4.5.1].
(iv) Le dual de $B_{\theta,p}$, $1 < p < \infty$, s'identifie isomorphiquement à l'espace $(B_0^*, B_1^*)_{\theta,p'}$, si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1 [4, Theorem 3.7.1].

D'après [4, Theorem 3.5.2 et (1), p. 49], il existe une constante $C > 0$ telle que $\|a\|_{B_{\theta,1}} \leqslant C\|a\|_{B_0}^{1-\theta}\|a\|_{B_1}^\theta$, pour tout $a \in B_0 \cap B_1$. D'autre part, d'aprè s le théorème 3.4.1-(b) de [4], $B_{\theta,1}$ s'injecte continûment dans $B_{\theta,p}$, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|a\|_{\theta,p} \leqslant C\|a\|_{B_0}^{1-\theta}\|a\|_{B_1}^\theta,\ \forall a \in B_0 \cap B_1. \tag{1.3}$$

Dans cet article, A_0, A_1 désignent deux espaces de Banach, A_0 étant un sous-espace dense de A_1. On note $i : A_0 \to A_1$ l'injection identité définie par $i(a) = a$, $a \in A_0$, qu'on suppose de norme 1.

2. Interpolation des opérateurs de Radon–Nikodym

Soient $0 < \alpha < \beta < 1$ et $p \in]1, +\infty[$. Dans cette partie, nous montrons que si $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym, alors $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. Nous verrons que l'énoncé correspondant est faux pour l'interpolation complexe. Dans la suite, nous introduisons l'espace d'interpolation A_θ^+, $\theta \in]0,1[$. Nous montrons que $(A_0^*, A_1^*)_\theta^+ = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ et que $\overline{A}^\theta$ est un sous-espace isométrique de A_θ^+.

Définition 2.1. — *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur borné. L'opérateur T est un opérateur de Radon–Nikodym (resp. de Radon–Nikodym analytique) si pour toute $f \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, X)$ (resp. pour toute $f \in H^\infty(\mathbb{D}, X)$), la fonction $r \mapsto (T(f(re^{it})))_{r\in[0,1[}$ admet une limite dans Y lorsque r tend vers 1, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$.*

L'espace X a la propriété de Radon–Nikodym (resp. de Radon–Nikodym analytique) si l'identité de X a la propriété correspondante.

L'espace X a la propriété de Radon–Nikodym dès qu'on a l'égalité $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X) = L^p(\mathbb{T}, X)$ pour un $p \in]1, +\infty]$; l'égalité a alors lieu pour tout $p \in]1, +\infty]$. L'espace X a la propriété de Radon–Nikodym analytique si on a $H^p(\mathbb{D}, X) = H^p(\mathbb{T}, X)$ pour un $p \in [1, +\infty]$, et l'égalité a alors lieu pour tout $p \in [1, +\infty]$, voir [7].

Si ψ est une fonction convexe croissante sur $[0, +\infty[$ et telle que $\psi(0) = 0$, l'espace d'Orlicz $L^\psi([0, 1]) = L^\psi$ est défini par

$$L^\psi = \Big\{ f \in L^0([0, 1]);\ \int_0^1 \psi(\varepsilon^{-1}|f(t)|)\, dt < +\infty \text{ pour un } \varepsilon > 0 \Big\},$$

où $L^0([0, 1])$ désigne l'espace des fonctions mesurables définies (presque partout) sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. C'est un espace de Banach [14, III 3, Theorems 3 and 10] pour la norme définie par

$$\|f\|_{L^\psi} = \inf \Big\{ \varepsilon > 0;\ \int_0^1 \psi(\varepsilon^{-1}|f(t)|)\, dt \leqslant 1 \Big\}.$$

Théorème 2.2. — *Il existe deux espaces de Banach B_0, B_1 et $i : B_0 \to B_1$ une injection de Radon–Nikodym tels que $i : B_\alpha \to B_\beta$ est un opérateur de Radon–Nikodym pour tous $0 < \alpha < \beta < 1$, mais B_α n'a pas la propriété de Radon–Nikodym analytique.*

Lemme 2.3. — *Soient $\delta, \theta \in]0, 1[$ tels que $\delta > \theta$. Alors $\|a\|_{A_\delta} \leqslant \|a\|_{A^\theta}$, pour tout $a \in A^\theta$.*

Démonstration du lemme 2.3. — Considérons $a \in A^\theta$ et $\alpha, \gamma \in]0, 1[$ tels que $\theta = (1 - \gamma)\alpha + \gamma\delta$, $\alpha < \delta$. D'après [10, lemme 2.6] on a $\|a\|_{(A_\alpha, A_\delta)^\gamma} \leqslant \|a\|_{A^\theta}$. D'autre part, $(A_\alpha, A_\delta)^\gamma \subset A_\alpha + A_\delta = A_\delta$ et $\|a\|_{A_\delta} \leqslant \|a\|_{(A_\alpha, A_\delta)^\gamma}$, donc $\|a\|_{A_\delta} \leqslant \|a\|_{A^\theta}$. □

Lemme 2.4. — *Supposons que $i^* : A_1^* \to A_0^*$ soit un opérateur de Radon–Nikodym. Alors pour tous $0 < \alpha < \gamma < 1$, l'injection $i^* : (A_1^*, A_0^*)^\alpha \to (A_1^*, A_0^*)_\gamma$ est un opérateur de Radon–Nikodym.*

Démonstration du lemme 2.4. — D'après [4, Theorem 5.1.2] on sait que $\big[L^2(\mathbb{T}, A_1), L^2(\mathbb{T}, A_0)\big]_\alpha = L^2(\mathbb{T}, (A_1, A_0)_\alpha)$. Ensuite, d'après l'introduction, on a $(L^2(\mathbb{T}, A_j))^* = \mathbf{h}^2(\mathbb{D}, A_j^*)$, $j = 0, 1$ et $(L^2(\mathbb{T}, (A_1, A_0)_\alpha)^*$ est égal à $\mathbf{h}^2(\mathbb{D},(A_1,A_0)^*_\alpha)$. Ceci implique d'après le rappel (iii) que $(L^2(\mathbb{T},A_1), L^2(\mathbb{T},A_0))^*_\alpha$ est égal à $\left[\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_1^*),\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_0^*)\right]^\alpha$, donc

$$\left[\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_1^*),\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_0^*)\right]^\alpha = \mathbf{h}^2(\mathbb{D},(A_1,A_0)^*_\alpha) = \mathbf{h}^2(\mathbb{D},[A_1^*,A_0^*]^\alpha).$$

D'autre part, le lemme 2.3 nous montre que $\left[\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_1^*),\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_0^*)\right]^\alpha$ s'injecte continûment dans $\left[\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_1^*),\mathbf{h}^2(\mathbb{D},A_0^*)\right]_\gamma$. Ce dernier espace est égal à $L^2(\mathbb{T},[A_1^*,A_0^*]_\gamma)$ d'après [10, proposition 2.3], parce que l'injection i^* : $A_1^* \to A_0^*$ est de Radon–Nikodym. Par conséquent, toute fonction dans $\mathbf{h}^2(\mathbb{D},[A_1^*,A_0^*]^\alpha)$ admet des limites radiales presque partout dans $[A_1^*,A_0^*]_\gamma$. $\square$

Démonstration du théorème 2.2. — Considérons $\psi(t) = t\log(1+t)$ pour $t\in\mathbb{R}^+$, et $j : L^\psi \to L^1$ l'injection canonique. Soient $B_0 = (L^1)^* = L^\infty$, $B_1 = (L^\psi)^*$ et $i = j^* : B_0 \to B_1$. Remarquons que i est faiblement compacte (donc i est un opérateur de Radon–Nikodym), car j est uniformément convexifiant d'après [2]. D'autre part, d'après [10, corollaire 1.4], l'espace B_α n'a pas la propriété de Radon–Nikodym analytique. Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 2.4, en remarquant que B_α est un sous-espace isométrique de B^α. $\square$

Problème 2.5. — *Supposons que l'injection $i : A_0 \to A_1$ soit un opérateur de Radon–Nikodym. D'après* [10, proposition 2.3]*, on sait que l'espace $[\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_0),\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_1)]_\theta$ est égal à $L^p(\mathbb{T},A_\theta)$ (resp., on sait que l'espace $[\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_0),\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_1)]_{\theta,p}$ est égal à $L^p(\mathbb{T},A_{\theta,p})$), c'est donc un sous-espace fermé de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_\theta)$ (resp., de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},A_{\theta,p})$), pour tout $\theta\in\,]0,1[$ et tout $p\in\,]1,+\infty[$.*

Soit $i : A_0 \to A_1$ une injection continue d'image dense. A-t-on la même conclusion ?

Signalons qu'il existe un couple d'interpolation (B_0,B_1) tel que les espaces B_0,B_1 ont la propriété de Radon–Nikodym et tel que l'espace $[\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_0),\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_1)]^\theta = [\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_0),\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_1)]_\theta$ soit un sous-espace strict de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B^\theta) = \mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_\theta)$, pour tout $\theta\in\,]0,1[$ et tout $p\in\,]1,+\infty[$ (cf. [12]).

Remarque 2.6. — Soient $\theta\in\,]0,1[$, $p\in\,]1,+\infty[$ et $a\in A_{\theta,p}$. Il est clair que $K(a,t) = t\|a\|_{A_1}$ pour tout $t\in\,]0,1]$, donc

$$\begin{aligned}\|a\|^p_{A_{\theta,p}} &= \int_0^1 (t^{1-\theta}\|a\|_{A_1})^p\,\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\right)^p \frac{dt}{t}\\ &= \frac{\|a\|^p_{A_1}}{(1-\theta)p} + \int_1^\infty \left(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\right)^p \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Remarque 2.7. — Notons $N_{\theta,p}(a) = \|a\|_{A_1} + \left(\int_1^\infty (\frac{K(a,t)}{t^\theta})^p\,\frac{dt}{t}\right)^{1/p}$, pour $a\in A_{\theta,p}$. La quantité $N_{\theta,p}(\,.\,)$ est une norme équivalente sur $A_{\theta,p}$.

Démonstration. — En effet, pour tout $a \in A_{\theta,p}$, on a

$$\begin{aligned}
\|a\|_{A_{\theta,p}} &= \left[\frac{\|a\|_{A_1}^p}{(1-\theta)p} + \int_1^\infty \Big(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\Big)^p \frac{dt}{t}\right]^{1/p} \\
&\leqslant \frac{\|a\|_{A_1}}{[(1-\theta)p]^{1/p}} + \Big(\int_1^\infty \Big(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\Big)^p \frac{dt}{t}\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \max\big(1, [(1-\theta)p]^{-1/p}\big) N_{\theta,p}(a).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $a \in A_{\theta,p}$, on a

$$\begin{aligned}
N_{\theta,p}(a) &= \|a\|_{A_1} + \Big(\int_1^\infty \Big(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\Big)^p \frac{dt}{t}\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \|a\|_{A_{\theta,p}} + \|a\|_{A_{\theta,p}} = 2\|a\|_{A_{\theta,p}}.
\end{aligned}$$

Enfin, on voit que $\|i\|_{(A_{\theta,p},N_{\theta,p})\to(A_{\gamma,p},N_{\gamma,p})} \leqslant 1$ quand $\gamma \in]\theta, 1[$. $\square$

Pour tout $\theta \in]0,1[$ et tout $p \in [1,+\infty[$, on notera

$$A^+_{\theta,p} = \Big\{a \in \bigcap_{\gamma>\theta} A_{\gamma,p};\ \|a\|_{A^+_{\theta,p}} = \sup_{\gamma>\theta} N_{\gamma,p}(a) < +\infty\Big\}.$$

L'espace $A^+_{\theta,p}$ est un espace de Banach. Pour $\theta \in [0,1[$, désignons par A^+_θ l'espace

$$A^+_\theta = \Big\{a \in \bigcap_{\gamma>\theta} A_\gamma;\ \|a\|_{A^+_\theta} = \sup_{\gamma>\theta} \|a\|_{A_\gamma} < +\infty\Big\},$$

et par A^-_θ le complété de l'espace $N_\theta = \bigcup_{\beta<\theta} A_\beta$, pour la norme

$$\|a\|_{A^-_\theta} = \inf\big\{\|a\|_{A_\beta};\ a \in N_\theta \text{ et } \beta < \theta\big\}.$$

Remarque 2.8. — D'après le lemme 2.3, on sait que

$$A^+_\theta = \Big\{a \in \bigcap_{\gamma>\theta} A^\gamma;\ \|a\|_{A^+_\theta} = \sup_{\gamma>\theta} \|a\|_{A^\gamma} < +\infty\Big\}.$$

Théorème 2.9. — *Soient $0 < \alpha < \beta < 1$ et $p \in [1,\infty[$. Supposons que l'injection $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ soit un opérateur de Radon–Nikodym. Alors $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym.*

Lemme 2.10. — *Soient $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$. On a $(A_{\theta,p}, N_{\theta,p}) = A^+_{\theta,p}$ isométriquement.*

Démonstration du lemme 2.10. — D'après la remarque 2.6, $A_{\theta,p}$ se plonge continûment dans $A^+_{\theta,p}$. Soient $a \in A^+_{\theta,p}$ et $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante dans $]\theta, 1[$ convergeant vers θ. Par le lemme de Fatou on a

$$\begin{aligned} N_{\theta,p}(a) &= \|a\|_{A_1} + \Big(\int_1^\infty \Big(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\Big)^p \frac{dt}{t}\Big)^{1/p} \\ &\leqslant \|a\|_{A_1} + \Big(\liminf_{n\to+\infty} \int_0^\infty \Big(\frac{K(a,t)}{t^{\theta_n}}\Big)^p \frac{dt}{t}\Big)^{1/p} \leqslant \|a\|_{A^+_{\theta,p}}. \qquad \square \end{aligned}$$

Lemme 2.11. — *Soient $i : A_0 \to A_1$ une injection de Radon Nikodym, $\gamma \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$. Alors $i : A_0 \to A_{\gamma,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym.*

Démonstration du lemme 2.11. — Soient $f \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, A_0)$ et $(r_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans l'intervalle $]0,1[$ telle que $r_n \to 1$ quand $n \to +\infty$. Comme $i : A_0 \to A_1$ est un opérateur de Radon–Nikodym, la suite $(f(r_n e^{it}))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans A_1 pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. D'autre part, on a d'après (1.3) pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} &\|f(r_n e^{it}) - f(r_m e^{it})\|_{A_{\theta,p}} \\ &\qquad\qquad \leqslant C\|f(r_n e^{it}) - f(r_m e^{it})\|^{1-\theta}_{A_0} \|f(r_n e^{it}) - f(r_m e^{it})\|^{\theta}_{A_1}. \end{aligned}$$

Comme $\sup_{0\leqslant r<1} \|f(re^{it})\|_{A_0} < +\infty$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, la suite $(f(r_n e^{it}))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans $A_{\theta,p}$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, c'est-à -dire que f admet presque partout des limites radiales dans $A_{\theta,p}$. $\square$

Démonstration du théorème 2.9.

Étape 1. Considérons $\gamma \in]\alpha, \beta[$ et montrons que $i : A_{\alpha,p} \to A_{\gamma,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym. Il existe $\eta \in]0,1[$ tel que $\gamma = (1-\eta)\alpha + \eta\beta$. D'après le théorème de réitération [4, Theorem 3.11.5], $A_{\gamma,p} = (A_{\alpha,p}, A_{\beta,p})_{\eta,p}$. Par hypothèse, $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym donc, d'après le lemme 2.11, $i : A_{\alpha,p} \to (A_{\alpha,p}, A_{\beta,p})_\eta = A_{\gamma,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym.

Étape 2. Montrons que $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. Soient $g \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, A_{\alpha,p})$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante dans $]\alpha, \beta[$ telle que $\beta_n \to \alpha$ quand $n \to +\infty$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'étape 1 montre que $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta_n,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym. Il existe donc $\psi_n \in L^\infty(\mathbb{T}, A_{\beta_n,p})$ et un ensemble mesurable Ω_n dans $\mathbb{T}$ tels que $m(\Omega_n) = 1$ et $g(re^{it}) \to_{r\to 1^-} \psi_n(t)$ dans $A_{\beta_n,p}$ pour tout $t \in \Omega_n$. Considérons $\Omega = \bigcap_{n\geqslant 0} \Omega_n$ et $\psi(t) = \lim_{r\to 1^-} g(re^{it})$ (dans A_1), $t \in \Omega$.

Étape 3-a. Montrons que $\psi(t) \in A_{\alpha,p}$. Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in \mathbb{T}$ on a

$$\sup_{0\leqslant r<1} N_{\beta_n,p}(g(re^{it})) \leqslant \sup_{0\leqslant r<1} N_{\alpha,p}(g(re^{it})) < +\infty.$$

Ceci implique $\sup_{n\geqslant 0} N_{\beta_n,p}(\psi(t)) < +\infty$, donc $\psi(t) \in A^+_{\alpha,p}$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. En appliquant le lemme 2.10, on voit que $\psi(t) \in A_{\alpha,p}$.

Étape 3-b. Montrons que ψ est mesurable à valeurs dans $A_{\alpha,p}$. Remarquons qu'il existe des sous-espaces fermés séparables C_j de A_j, $j \in \{0,1\}$, C_1 adhérence dans A_1 de C_0, tels que g est à valeurs dans $C_{\alpha,p}$ qui est un espace séparable. On peut donc supposer que $A_{\alpha,p}$ est séparable. Comme ψ est mesurable à valeurs dans A_1 et que $A_{\alpha,p}$ est un espace polonais, ψ est mesurable à valeurs dans $A_{\alpha,p}$ d'après [1, Theorem 3.2.3 et son corollaire]. En appliquant le résultat de [7], on voit que $g(z) = \int_{\mathbb{T}} \psi(t)P_z(t)\, dm(t)$ dans A_1, pour $z \in \mathbb{D}$. Cette égalité vaut dans $A_{\alpha,p}$ puisque ψ est mesurable à valeurs dans $A_{\alpha,p}$. Il en résulte que g admet des limites radiales presque partout dans $A_{\alpha,p}$ [15, Theorem 7.6]. □

Corollaire 2.12. — *Soient $\alpha \in \,]0,1[$ et $p \in \,]1,+\infty[$. Supposons que A_1 a la propriété de Radon–Nikodym. Alors $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym.*

Démonstration. — Soit $\beta \in \,]\alpha,1[$. Par un argument analogue à celui du lemme 2.11, on montre que l'injection $i : A_{\alpha,p} \to A_{\beta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym. Donc d'après le théorème 2.9, $A_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. □

Corollaire 2.13. — *Soient $\alpha \in \,]0,1[$ et $p \in \,]1,+\infty[$, et supposons que $i^* : A_1^* \to A_0^*$ est un opérateur de Radon–Nikodym. Alors $(A_0^*, A_1^*)_{\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym.*

Démonstration. — Par un argument analogue à celui du lemme 2.4, on montre que pour tout $1 > \beta > 1-\alpha$, $i^* : (A_1^*, A_0^*)^*_{1-\alpha,p} \to (A_1^*, A_0^*)_{\beta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym. D'après le théorème 2.9, l'espace $(A_0^*, A_1^*)_{\alpha,p} = (A_1^*, A_0^*)_{1-\alpha,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. □

Remarque 2.14. — Dans le théorème 2.9, on peut remplacer « opérateur de Radon–Nikodym » par « opérateur de Radon–Nikodym analytique ». Donc, dans le corollaire 2.12, on peut remplacer « A_1 a la propriété de Radon–Nikodym » par « A_1 a la propriété de Radon–Nikodym analytique », ce qui améliore [10, corollaire 1.6].

Théorème 2.15. — *Il existe deux espaces de Banach B_0, B_1 et $i : B_0 \to B_1$ une injection de Radon–Nikodym tels que pour tous $0 < \alpha < \beta < 1$, l'injection $i : B_\alpha \to B_\beta$ n'est pas un opérateur de Radon–Nikodym.*

Lemme 2.16. — *Soient* $0 < \alpha < \beta < 1$ *et* $p \in \,]1, +\infty[$. *Supposons que l'injection* $i : A_\alpha \to A_\beta$ *est un opérateur de Radon–Nikodym. Alors il existe* $\theta_0 \in \,]0, 1[$ *tel que* $A_{\theta_0,p}$ *a la propriété de Radon–Nikodym.*

Démonstration du lemme 2.16. — Soient $\theta_1 \in \,]0, \alpha[$ et $\theta_2 \in \,]\beta, 1[$. D'après [4, Theorem 4.7.2], $(A_{\theta_1}, A_\alpha)_{\eta,p} = A_{\theta_0,p}$, et $(A_\beta, A_{\theta_2})_{\eta,p} = A_{\delta,p}$, où $\theta_0 = (1-\eta)\theta_1 + \eta\alpha$, $\delta = (1-\eta)\beta + \eta\theta_2$. Donc $A_{\theta_0,p} \subset A_\alpha \subset A_\beta \subset A_{\delta,p}$. Il en résulte que $i : A_{\theta_0,p} \to A_{\delta,p}$ est un opérateur de Radon–Nikodym. En appliquant le théorème 2.9, on voit que $A_{\theta_0,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym. □

Démonstration du théorème 2.15. — D'après [13] il existe deux espaces de Banach X, Y et $T : X \to Y$ un opérateur de Radon–Nikodym qui ne se factorise par aucun espace de Banach ayant la propriété de Radon–Nikodym. Considérons $B_0 = X/\ker(T)$ et $B_1 = Y$; il est clair que l'injection $i : B_0 \to B_1$ est un opérateur de Radon–Nikodym qui ne se factorise par aucun espace ayant la propriété de Radon–Nikodym.

Supposons maintenant qu'il existe $0 < \alpha < \beta < 1$ tels que $i : B_\alpha \to B_\beta$ soit un opérateur de Radon–Nikodym. D'après le lemme 2.16, il existe $\theta_0 \in \,]0, 1[$ tel que $B_{\theta_0,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym pour tout $p \in \,]1, +\infty[$. Il en résulte que i se factorise par un espace de Banach ayant la propriété de Radon–Nikodym, ce qui est impossible. □

Le théorème suivant montre que le lemme 2.4 n'est pas vrai si on remplace « opérateur de Radon–Nikodym » par « opérateur de Radon–Nikodym analytique ».

Théorème 2.17. — *Il existe deux espaces de Banach* B_0, B_1 *et une injection continue d'image dense* $i : B_0 \to B_1$, *tels que* B_1^* *a la propriété de Radon–Nikodym analytique, mais que pour tout* $0 < \theta < \beta < 1$, *l'injection* $i^* : (B_1^*, B_0^*)_\theta \to (B_1^*, B_0^*)_\beta$ *ne soit pas un opérateur de Radon–Nikodym analytique,*

Démonstration. — Considérons $B_0 = \ell^1(\mathbb{Z})$, $B_1 = C(\mathbb{T})$ et $i : B_0 \to B_1$ l'injection définie par $i(x)(\,.\,) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ik(\,.\,)}$, pour $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Remarquons que $B_1^* = M(\mathbb{T})$ a la propriété de Radon–Nikodym analytique. Supposons qu'il existe $0 < \theta < \beta < 1$ tels que $i^* : (B_1^*, B_0^*)_\theta \to (B_1^*, B_0^*)_\beta$ soit un opérateur de Radon–Nikodym analytique et fixons $p \in \,]1, +\infty[$. Par un argument analogue à celui du lemme 2.16, il existe $\theta_0 \in \,]0, 1[$ tel que $(B_1^*, B_0^*)_{\theta_0,p}$ a la propriété de Radon–Nikodym analytique. D'autre part, d'après le lemme de Pisier [6, Lemma 5.1], l'espace $E = (L^1(\mathbb{T}), c_0(\mathbb{Z}))_{\theta_0,p}$ contient c_0 isomorphiquement. Or E se plonge isométriquement dans $(B_1^*, B_0^*)_{\theta_0,p}$, d'après [10, lemme 3.8]. Il en résulte que $(B_1^*, B_0^*)_{\theta_0,p}$ n'a pas la propriété de Radon–Nikodym analytique, ce qui est impossible. □

Proposition 2.18. — *Il existe B_0, B_1 deux espaces de Banach et une injection de Radon–Nikodym $i : B_0 \to B_1$ tels que $i : B_0 \to B_0^+$ n'est pas un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit B_0, B_1 les espaces du théorème 2.15. Supposons que $i : B_0 \to B_0^+$ est un isomorphisme. On peut supposer que B_0 est séparable, donc B_0^+ est séparable. Comme $i : B_0 \to B_\beta$ est un opérateur de Radon–Nikodym pour tout $\beta \in]0,1[$ (par un argument analogue à celui du lemme 2.11), par un argument analogue à celui du théorème 2.9, $i : B_0 \to B_0^+$ est un opérateur de Radon–Nikodym, donc B_0^+ a la propriété de Radon–Nikodym, c'est-à-dire que $i : B_0 \to B_1$ se factorise par un espace ayant la propriété de Radon–Nikodym. C'est impossible d'après [13]. □

Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation tel que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1. Notons B_j' l'adhérence de $B_0^* \cap B_1^*$ dans B_j^*, $j = 0, 1$. Il est clair que $B_0' \cap B_1' = B_0^* \cap B_1^*$, isométriquement. D'après [4, Theorem 4.2.2-b)] on a isométriquement, pour $\theta \in]0,1[$,

$$(B_0', B_1')_\theta = (B_0^*, B_1^*)_\theta. \tag{2.1}$$

Comme $B_0' \cap B_1'$ est dense dans B_j', le dual de $B_\theta' = (B_0', B_1')_\theta$ est $((B_0')^*, (B_1')^*)^\theta$ [4, Theorem 4.5.1] et, d'après [4, Theorem 2.7.1], on a

$$(B_0')^* + (B_1')^* = (B_0' \cap B_1')^* = (B_0^* \cap B_1^*)^* = (B_0 + B_1)^{**}.$$

En particulier, $B_0 + B_1$ s'identifie isométriquement à un sous-espace fermé de $(B_0')^* + (B_1')^*$. Soit $i_j : B_j' \to B_j^*$ l'injection canonique ; la restriction de son adjoint $i_j^* : B_j \to (B_j')^*$, $j = 0, 1$, est contractante. Le lemme suivant provient de [8, lemme 1].

Lemme 2.19. — *Soit $R : \mathcal{G}(B_0, B_1) \to \mathcal{G}((B_0')^*, (B_1')^*)$ l'application définie par $g(j+i.) \to i_j^*(g(j+i.))$, $j = 0, 1$. L'application R est une contraction et induit une contraction injective*

$$R^\theta : B^\theta \to ((B_0')^*, (B_1')^*)^\theta,\ \theta \in]0,1[.$$

Démonstration. — Il est clair que R est une contraction (non injective en général). On identifie B^θ et $((B_0')^*, (B_1')^*)^\theta$ à des quotients de $\mathcal{G}(B_0, B_1)$ et $\mathcal{G}((B_0')^*, (B_1')^*)$ respectivement. Notant que $(R\, g(\,.\,))'(\theta) = R^\theta(g'(\theta))$, on voit que R induit une contraction R^θ sur ces quotients. Notons que, pour $a \in B^\theta$ et $b \in B_0' \cap B_1' = B_0^* \cap B_1^* = (B_0 + B_1)^*$, on a

$$(R^\theta(a), b) = (a, b).$$

Si $R^\theta(a) = 0$, alors $(a, b) = 0$ pour tout $b \in B_0' \cap B_1' = (B_0 + B_1)^*$, d'où $a = 0$ dans $B_0 + B_1$, et donc dans B^θ. □

Notons $\overline{B}^\theta$ le complété de $R^\theta(B^\theta)$ dans $((B_0')^*, (B_1')^*)^\theta$, $\theta \in]0,1[$, cet espace a été introduit dans [8]. Signalons que $R^\theta(B_\theta)$ est un sous-espace isométrique de $[(B_0')^*, (B_1')^*]^\theta$ [8, lemme 4]. Pour tout espace de Banach X, on désigne par $\Lambda(X)$ l'espace des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à variation bornée, telles que $f(t_1) - f(t_2) \in X$ pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, et $\|f\|_{\Lambda(X)} = \sup_{t_1 \neq t_2} \|f(t_1) - f(t_2)\|_X / |t_1 - t_2| < +\infty$.

Proposition 2.20. — *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors $\overline{A}^\theta$ est un sous-espace isométrique de A_θ^+.*

Proposition 2.21. — *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors $(A_1^*, A_0^*)^\theta = [A_1^*, A_0^*]_\theta^+$, isométriquement.*

Avant de démontrer ces propositions rappelons les lemmes classiques suivants (bien connus) :

Lemme 2.22. — *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}$, uniformément bornée sur S_0. Si $f_n \to_{n\to+\infty} f$ simplement sur S_0, alors f est holomorphe sur S_0.*

Lemme 2.23. — *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite comme dans le lemme 2.22. Alors $f_n \to_{n\to+\infty} f$ uniformément sur toute boule fermée dans S_0 (donc sur tout compact de S_0).*

Démonstration des lemmes 2.22 et 2.23. — Soient $z_0 \in S_0$ et $r > 0$ tels que la boule fermée de centre z_0 et de rayon r soit contenue dans S_0, ce qui implique $r < 1$. Notons $\Gamma = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\}$. D'après la formule de Cauchy, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in B(z_0, r)$, on a que

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on voit que pour tout $z \in B(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

par conséquent f est holomorphe dans S_0. Il existe donc une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k (z - z_0)^k$, $z \in B(z_0, r)$ et pour tout n, il existe une suite $(a_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ telle que $f_n(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k^{(n)} (z - z_0)^k$, $z \in B(z_0, r)$. Alors $a_k^{(n)} - a_k = \int_\mathbb{T} \left[f_n(\rho e^{it} + z_0) - f(\rho e^{it} + z_0)\right] e^{-ikt}\, dm(t)$, où $\rho \in]0, r[$. En appliquant le théorème de convergence dominée, on voit que

$$\sup_{k\geqslant 0} |a_k^{(n)} - a_k| \leqslant \int_\mathbb{T} |f_n(\rho e^{it} + z_0) - f(\rho e^{it} + z_0)|\, dm(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement on a

$$\sup_{z\in B(z_0,r)} |f_n(z) - f(z)| \leqslant \Big(\sup_{k\geqslant 0} |a_k^{(n)} - a_k|\Big) \Big(\sum_{k\geqslant 0} r^k\Big) \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Démonstration de la proposition 2.21.

Étape 1. Soit $a \in (A_1^*, A_0^*)_\theta^+$, et soit $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante dans l'intervalle $]\theta, 1[$ telle que $\beta_n \to \theta$. Il est clair que $\|a\|_{(A_1^*,A_0^*)_\theta^+} = \sup_{n\geqslant 0} \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)_{\beta_n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $F_n \in \mathcal{F}(A_1^*, A_0^*)$ vérifiant $F_n(\beta_n) = a$ et $\|F_n\|_{\mathcal{F}(A_1^*,A_0^*)} < \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)_{\beta_n}} + 1/(n+1)$. On définit $g_n \in \mathcal{G}(A_1^*, A_0^*)$, primitive de F_n, en posant $g_n(z) = \int_0^z F_n(\xi)\, d\xi$, pour $z \in S$ et $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(g_n(j + i(\,.\,)))_{n\geqslant 0}$ est bornée dans l'espace $\Lambda(A_{1-j}^*)$. D'après [4, Lemma 4.5.3], il existe une sous-suite $(g_{n_k}(j + i(\,.\,)))_{k\geqslant 0}$ telle que $g_{n_k}(j + i(\,.\,)) \to_{k\to+\infty} g(j + i(\,.\,)) \in \Lambda(A_{1-j}^*)$ pour la topologie $\sigma(\Lambda(A_{1-j}^*), L^1(\mathbb{R}, d\tau, A_{1-j}))$, et pour $j \in \{0, 1\}$. On définit la fonction F sur S_0 à valeurs dans $A_0^* + A_1^* = (A_0 \cap A_1)^*$, par dualité : pour tout $x \in A_0 \cap A_1 = A_0$ on pose

$$\begin{aligned}(x, F(z)) = &\int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} Q_0(z, i\tau) \frac{d}{d\tau}(x, g(i\tau))\, d\tau \\ &+ \int_{\mathbb{R}} e^{(1+i\tau)^2} Q_1(z, 1+i\tau)\, \frac{d}{d\tau}(x, g(1+i\tau))\, d\tau, \quad z \in S_0.\end{aligned}$$

Étape 2. Soit $x \in A_0$. Montrons que la fonction $(x, F(\,.\,))$ est holomorphe sur S_0. D'après (1.2), pour tout $z \in S_0$ on a

$$\begin{aligned}(x, e^{z^2} F_{n_k}(z)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} (x, F_{n_k}(i\tau)) Q_0(z, i\tau)\, d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} e^{(1+i\tau)^2} (x, F_{n_k}(1+i\tau)) Q_1(z, 1+i\tau)\, d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} Q_0(z, i\tau) \frac{d}{d\tau}(x, g_{n_k}(i\tau))\, d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} e^{(1+i\tau)^2} Q_1(z, 1+i\tau) \frac{d}{d\tau}(x, g_{n_k}(1+i\tau))\, d\tau \\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} Q_0(z, i\tau) \frac{d}{d\tau}(x, g(i\tau))\, d\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} e^{(1+i\tau)^2} Q_1(z, 1+i\tau) \frac{d}{d\tau}(x, g(1+i\tau))\, d\tau \\ &= (x, F(z))\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$(x, e^{z^2} F_{n_k}(z)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x, F(z)), \text{ pour tout } z \in S_0. \tag{2.2}$$

D'après le lemme 2.22, la fonction $(x, F(\,.\,))$ est holomorphe. Il est clair d'après (2.2) que pour tout $z \in S_0$ on a

$$(x, F_{n_k}(z)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x, e^{-z^2}F(z)) = (x, \psi_1(z)). \tag{2.3}$$

Le rappel (iii) nous montre que $(A_1, A_0)^*_\theta = (A_1^*, A_0^*)^\theta$. Il existe donc une sous-suite $(F_{n_{k'}})_{k'\geqslant 0}$ telle que $F_{n_{k'}}(\theta) \to_{k'\to\infty} a_1 \in (A_1^*, A_0^*)^\theta$ pour la topologie préfaible. Il est évident d'après (2.3) que $a_1 = \psi_1(\theta)$.

Étape 3. Montrons que $a = a_1$. Soit $x \in A_0$. D'après le lemme 2.23, $(x, e^{(\,.\,)^2}F_{n_{k'}}(\,.\,)) \to_{k'\to+\infty} (x, F(\,.\,))$ uniformément sur toute boule fermée de S_0. Donc $(x, F_{n_{k'}}(\,.\,)) \to_{k'\to+\infty} (x, e^{-(\,.\,)^2}F(\,.\,)) = (x, \psi_1(\,.\,))$ uniformément sur toute boule fermée de S_0. Il existe k_0' tel que

$$\forall k' \geqslant k_0',\ \sup_{m\geqslant 0} |(x, F_{n_{k'}}(\beta_m)) - (x, \psi_1(\beta_m))| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

D'après la continuité de $(x, \psi_1(\,.\,))$ sur S_0, il existe $k_1' \geqslant k_0'$ tel que $|(x, \psi_1(\theta) - \psi_1(\beta_{n_{k_1}}))| < \varepsilon$, pour tout $k_1 \geqslant k_1'$. D'après (2.4) on a

$$|(x, F_{n_{k_1'}}(\beta_{n_{k_1'}})) - (x, \psi_1(\beta_{n_{k_1'}}))| < \varepsilon,$$

d'où $|(x, \psi_1(\theta) - a)| \leqslant 2\varepsilon$. Ceci implique que $a_1 = a$.

Étape 4. Montrons que $\|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^\theta} = \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^+_\theta}$. D'après ce qui précède, la suite $(F_{n_k}(\theta))_{k\geqslant 0}$ converge préfaiblement vers a dans l'espace $(A_1^*, A_0^*)^\theta = ((A_1, A_0)_\theta)^*$, donc

$$\begin{aligned}\|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^\theta} &\leqslant \liminf_{k\to+\infty} \|F_{n_k}(\theta)\|_{(A_1^*,A_0^*)_\theta} \\ &\leqslant \liminf_{k\to+\infty} \|F_{n_k}\|_{\mathcal{F}(A_1^*,A_0^*)} \leqslant \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^+_\theta}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

D'après le lemme 2.3, on a $\|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^+_\theta} \leqslant \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^\theta}$, d'où l'égalité $\|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^\theta} = \|a\|_{(A_1^*,A_0^*)^+_\theta}$. ☐

Démonstration de la proposition 2.20. — Soit $a \in \overline{A}^\theta$. D'après la proposition 2.21, on sait que $\|a\|_{\overline{A}^\theta} = \|a\|_{((A_0')^*,(A_1')^*)^\theta} = \|a\|_{((A_0')^*,(A_1')^*)^+_\theta}$. D'autre part, d'après [8, lemme 4], A_β est un sous-espace isométrique de $[(A_0')^*, (A_1')^*]^\beta$, pour tout $\beta \in\,]0,1[$. Donc $\|a\|_{((A_0')^*,(A_1')^*)^+_\theta} = \|a\|_{A_\theta^+}$ et $\|a\|_{\overline{A}^\theta} = \|a\|_{A_\theta^+}$. ☐

Proposition 2.24. — *Soit $\theta \in\,]0,1[$. Supposons que A_θ est faiblement séquentiellement complet et que $(A_0^*, A_1^*)_\theta = (A_0^*, A_1^*)^\theta$. Alors $A_\theta = A_\theta^+$.*

Démonstration. — Soient $a \in A_\theta^+$ et $\beta_n \searrow \theta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $F_n \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tel que $F_n(\beta_n) = a$ et $\|F_n\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1)} < \|a\|_{A_{\beta_n}} + 1/(n+1)$. On a vu au cours de la démonstration de la proposition 2.21 qu'il existe une sous-suite $(F_{n_k})_{k\geqslant 0}$ vérifiant $(F_{n_k}(\theta), a^*) \to_{k\to+\infty} (a, a^*)$, pour tout

$a^* \in (A_0^*, A_1^*)_\theta = (A_\theta)^*$. La suite $(F_{n_k}(\theta))_{k\geqslant 0}$ est donc faiblement de Cauchy dans A_θ. Il existe donc $b \in A_\theta$ tel que $F_{n_k}(\theta) \to_{k\to+\infty} b$ faiblement dans A_θ. Il est évident que $b = a \in A_\theta$. $\square$

Problème 2.25. — *Soit $\theta \in]0,1[$. L'espace $\overline{A}^\theta$ est-t-il égal à A_θ^+ isométriquement ?*

Par un argument analogue à celui du théorème 2.9 (en utilisant la proposition 2.20), on montre le théorème suivant :

Théorème 2.26. — *Soient $0 < \alpha < \beta < 1$. Si l'injection $i : A_\alpha \to A_\beta$ est un opérateur de Radon–Nikodym et si A_α^+ est séparable, alors A_α a la propriété de Radon–Nikodym.*

Proposition 2.27. — *Considérons $\alpha < \gamma$ dans $]0,1[$, $\eta \in]0,1[$ et posons $\theta = (1-\eta)\alpha + \eta\gamma$. Alors $A_\theta^+ = (A_\alpha, A_\gamma)_\eta^+$ isométriquement.*

Démonstration. — Soit $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante dans $]\eta, 1[$, telle que $\eta_n \to_{n\to+\infty} \eta$. Alors $\theta_n = (1-\eta_n)\alpha + \eta_n\gamma$ décroît vers θ quand $n \to +\infty$. D'après le théorème de réitération, on a pour tout $n \geqslant 0$ que $A_{\theta_n} = (A_\alpha, A_\gamma)_{\eta_n}$, donc A_θ^+ est égal à $\bigcap_{n\geqslant 0} A_{\theta_n} = \bigcap_{n\geqslant 0}(A_\alpha, A_\gamma)_{\eta_n} = (A_\alpha, A_\gamma)_\eta^+$. $\square$

Proposition 2.28. — *Soit $\theta \in]0,1[$. Alors $A_\theta^- = A_\theta$ isométriquement.*

Démonstration. — Il est évident que A_θ^- se plonge continûment dans A_θ avec norme $\leqslant 1$.

Étape 1. Montrons que A_θ^- est un sous-espace isométrique de A_θ. Il suffit de montrer que le dual de A_θ^- se plonge continûment dans $(A_1^*, A_0^*)_{1-\theta}^+ = [(A_0, A_1)_\theta]^*$ avec norme $\leqslant 1$. Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante dans $]1-\theta, 1[$ et vérifiant que $\gamma_n \to_{n\to+\infty} 1-\theta$, et soit $a^* \in (A_\theta^-)^*$. D'après le lemme 2.3 et la remarque 2.8 , on a

$$(A_1^*, A_0^*)_{1-\theta}^+ = \bigcap_{n\geqslant 0} (A_1^*, A_0^*)_{\gamma_n} = \bigcap_{n\geqslant 0} (A_1^*, A_0^*)^{\gamma_n}$$
$$= \bigcap_{n\geqslant 0} [(A_1, A_0)_{\gamma_n}]^* = \bigcap_{n\geqslant 0} A_{1-\gamma_n}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la forme linéaire a_n^* sur $A_{1-\gamma_n}$ en posant $(x, a_n^*) = (x, a^*)$, pour $x \in A_{1-\gamma_n} \subset A_-^\theta$. On a alors

$$|(x, a_n^*)| \leqslant \|a^*\|_{(A_-^\theta)^*} \|x\|_{A_-^\theta} \leqslant \|a^*\|_{(A_\theta^-)^*} \|x\|_{A_{1-\gamma_n}}.$$

Il en résulte que $a_n^* \in (A_{1-\gamma_n})^*$. On définit $u_{\alpha^*} \in (A_1^*, A_0^*)_{1-\theta}^+ = \bigcap_{n\geqslant 0} A_{1-\gamma_n}^*$ par $(x, u_{a^*}) = (x, a_n^*)$, $x \in A_{1-\gamma_n}$. D'après ce qui précède, $u_{a^*} \in \bigcap_{n\geqslant 0} A_{1-\gamma_n}^*$ et $\|u_{a^*}\|_{(A_1^*, A_0^*)_{1-\theta}^+} = \sup_{n\geqslant 0} \|a_n^*\|_{A_{1-\gamma_n}^*} \leqslant \|a^*\|_{(A_\theta^-)^*}$.

Étape 2. Comme A_0 est dense dans A_θ^- et dans A_θ, on a $A_\theta^- = A_\theta$ isométriquement, d'après l' étape 1. $\square$

3. Interpolation des espaces L^p_Λ et $\mathbf{h}^p_\Lambda$ à valeurs vectorielles

On désigne par (B_0, B_1) un couple d'interpolation, qui restera fixé pour la suite de cette partie, tel que $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et dans B_1. On va montrer que l'espace $L^p(\mathbb{T}, \overline{B}^\theta)$ est un sous-espace isométrique de $\overline{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]}^\theta$.

Dans la suite, on montre que si $\left[\mathbf{h}^p_\Lambda(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^p_\Lambda(\mathbb{D}, B_1)\right]_\theta$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{h}^p_\Lambda(\mathbb{D}, B_\theta)$, alors $\left[L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_0), L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_1)\right]_\theta = L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_\theta)$ isomorphiquement. De plus on montre que pour tout $\theta \in]0,1[$, l'espace $(L^\infty(\mathbb{T}, A_0), L^\infty(\mathbb{T}, A_1))_\theta$ est un sous-espace strict de $L^\infty(\mathbb{T}, A_\theta)$, sauf si l'inclusion $i : A_0 \to A_1$ est un isomorphisme.

Proposition 3.1. — *Soient X un espace de Banach, $1 < p_0, p_1 < +\infty$ et $\theta \in]0,1[$. Alors $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D}, X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D}, X)]_\theta = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ isométriquement, où $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.*

Démonstration. — On sait que $[L^{p_0}(\mathbb{T}, X), L^{p_1}(\mathbb{T}, X)]_\theta = L^p(\mathbb{T}, X)$ d'après [4, Theorem 5.1.2], donc $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D}, X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D}, X)]_\theta \subset \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soient $f \in \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'introduction, on a que $VB^p(\mathbb{T}, X) = \mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$. Il existe donc une fonction $\psi \in L^{p+}(\mathbb{T})$ telle que $\|T_f(g)\|_X \leqslant \int_\mathbb{T} |g(t)|\psi(t)\, dm(t)$ pour tout $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, et telle que $\|T_f\|_{VB^p(\mathbb{T},X)} = \|f\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)} = \|\psi\|_{L^p}$. Comme $[L^{p_0}(\mathbb{T}), L^{p_1}(\mathbb{T})]_\theta = L^p(\mathbb{T})$ [4, Theorem 5.1.2], il existe $F \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\mathbb{T}), L^{p_1}(\mathbb{T}))$ vérifiant que $F(\theta) = \psi + \varepsilon$ et $\|F\|_{\mathcal{F}(L^{p_0}, L^{p_1})} \leqslant \|\psi\|_{L^p} + 2\varepsilon$.

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et pour $j \in \{0,1\}$, on définit l'opérateur $F_1(j + i\tau)$ de $L^{p'_j}(\mathbb{T})$ dans X en posant $F_1(j+i\tau)(g) = T_f\big(g\frac{F(j+i\tau)}{\psi+\varepsilon}\big)$, $g \in C(\mathbb{T})$. Il est clair que $\|F_1(j+i\tau)\|_{VB^{p_j}(\mathbb{T},X)} \leqslant \|F\|_{\mathcal{F}(L^{p_0}, L^{p_1})}$. Considérons $F_1(z) = \int_\mathbb{R} F_1(i\tau) Q_0(z, i\tau)\, d\tau + \int_\mathbb{R} F_1(1+i\tau) Q_1(z, 1+i\tau)\, d\tau$. Comme $F_1(z)(g) = T_f\big(g\frac{F(z)}{\psi+\varepsilon}\big)$ pour tout $g \in C(\mathbb{T})$ et tout $z \in S$, on voit que $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D}, X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D}, X))$ et $F_1(\theta) = T_f$. Il en résulte que f est dans $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D}, X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D}, X)]_\theta$ et

$$\begin{aligned}\|f\|_{(\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X))_\theta} &\leqslant \|F_1\|_{\mathcal{F}(\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X))} \leqslant \|\psi\|_{L^p} + 2\varepsilon \\ &= \|T_f\|_{VB^p(\mathbb{D},X)} + 2\varepsilon = \|f\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D},X)} + 2\varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

Corollaire 3.2. — *Soient X un espace de Banach,* $1 < p_0, p_1 < +\infty$ *et* $\theta \in]0,1[$*. Alors* $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]_\theta = [\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta$ *isométriquement, où* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Démonstration. — Soit $f \in [\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\theta+\varepsilon \in]0,1[$, et posons $1/p_\varepsilon = \frac{1-(\theta+\varepsilon)}{p_0} + \frac{\theta+\varepsilon}{p_1}$. Le lemme 2.3 nous montre que f est élément de $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]_{\theta+\varepsilon} \subset \mathbf{h}^{p_\varepsilon}(\mathbb{D},X)$, c'est-à -dire que, pour tout $r \in [0,1[$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} \|f(re^{it})\|_X^{p_\varepsilon}\, dm(t) \leqslant \|f\|^{p_\varepsilon}_{[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta}.$$

D'après le lemme de Fatou on a, pour tout $r \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \|f(re^{it})\|_X^{p}\, dm(t) &\leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{T}} \|f(re^{it})\|_X^{p_\varepsilon}\, dm(t)\\ &\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \|f\|^{p_\varepsilon}_{[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta} = \|f\|^{p}_{[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta},\end{aligned}$$

donc $[\mathbf{h}^{p_0}(\mathbb{D},X), \mathbf{h}^{p_1}(\mathbb{D},X)]^\theta \subset \mathbf{h}^{p}(\mathbb{D},X)$. Pour obtenir le corollaire, il suffit d'appliquer la proposition 3.1, l'isométrie cherchée provenant alors de [3]. □

Pour $p \in [1,+\infty]$ et $j \in \{0,1\}$ notons $X_j = L^p(\mathbb{T},B_j)$. Rappelons que $X_0 \cap X_1$ est dense dans $L^p(\mathbb{T},B_j)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Théorème 3.3. — *Soient* $\theta \in]0,1[$*. Alors*

(i) pour tout $p \in [1,+\infty[$*, l'espace* $L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)$ *est un sous-espace isométrique de l'espace* $\overline{[L^p(\mathbb{T},B_0), L^p(\mathbb{T},B_1)]}^\theta$ *;*

(ii) l'espace $L^\infty(\mathbb{T},B^\theta)$ *est un sous-espace isométrique de l'espace* $[L^\infty(\mathbb{T},B_0), L^\infty(\mathbb{T},B_1)]^\theta$.

Lemme 3.4. — *L'espace* $L^p(\mathbb{T},(B'_j)^*)$ *se plonge continûment dans* $(X'_j)^*$*, pour* $j \in \{0,1\}$.

Démonstration du lemme 3.4. — Soit $f \in L^p(\mathbb{T},(B'_j)^*)$. On définit une forme linéaire $u_f \in (X'_j)^*$ par $(h,u_f) = \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} (h(re^{it}), f(t))\, dm(t)$, pour chaque élément $h \in X_0^* \cap X_1^* = \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_0^*) \cap \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_1^*)$, et pour $j \in \{0,1\}$. Il est clair que

$$|(h,u_f)| \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{T},(B'_j)^*)} \|h\|_{\mathbf{h}^p(\mathbb{D},B_j^*)}.$$

Comme $\mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_0^*) \cap \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_1^*)$ est dense dans X'_j, u_f se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur X'_j, $j \in \{0,1\}$. □

Démonstration du théorème 3.3.

(i) : Considérons $f = \sum_{k=0}^n x_k \mathcal{X}_{C_k}$, élément de $L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)$, où $x_k \in B^\theta \subset \overline{B}^\theta$ et où les C_k sont des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{T}$ deux-à-deux disjoints. L'ensemble des fonctions f de cette forme est dense dans $L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout k, il existe $g_k \in \mathcal{G}((B_0')^*, (B_1')^*)$ et $h_k \in \mathcal{G}(B_0, B_1)$ tels que $g_k'(\theta) = h_k'(\theta) = x_k$ et $\|g_k\|^p_{\mathcal{G}((B_0')^*,(B_1')^*)} \leqslant \|x_k\|^p_{\overline{B}^\theta} + \varepsilon^p$. On définit $g \in \mathcal{G}\big(L^p(\mathbb{T},(B_0')^*), L^p(\mathbb{T},(B_1')^*)\big)$ par la formule $g(z) = \sum_{k=0}^n g_k(z)\mathcal{X}_{C_k}$, $z \in S$. Remarquons que

$$g'(\theta) = f = \sum_{k=0}^n g_k'(\theta)\mathcal{X}_{C_k} = \sum_{k=0}^n h_k'(\theta)\mathcal{X}_{C_k}$$

est dans $[L^p(\mathbb{T},B_0), L^p(\mathbb{T},B_1)]^\theta \subset \overline{[L^p(\mathbb{T},B_0), L^p(\mathbb{T},B_1)]}^\theta$. D'après le lemme 3.4, on sait que $g \in \mathcal{G}((X_0')^*, (X_1')^*)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\|g\|_{\mathcal{G}((X_0')^*,(X_1')^*)} &\leqslant \|g\|_{\mathcal{G}(L^p(\mathbb{T},(B_0')^*),L^p(\mathbb{T},(B_1')^*))} \\ &\leqslant (\|f\|^p_{L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)} + \varepsilon^p)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)} + \varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|f\|_{\overline{[L^p(\mathbb{T},B_0),L^p(\mathbb{T},B_1)]}^\theta} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)}$.

D'après le lemme 2.19, $\overline{B}^\theta$ se plonge isométriquement dans l'espace $[(B_0')^*, (B_1')^*]^\theta$, donc f est isométriquement dans $L^p(\mathbb{T}, [(B_0')^*, (B_1')^*]^\theta)$ qui lui même se plonge isométriquement dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, [(B_0')^*, (B_1')^*]^\theta)$, égal à $[\mathbf{h}^p(\mathbb{D},(B_0')^*), \mathbf{h}^p(\mathbb{D},(B_1')^*)]^\theta = [(L^{p'}(\mathbb{T},B_0'), L^{p'}(\mathbb{T},B_1'))_\theta]^*$. Si $p = 1$, on a que $\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, [(B_0')^*, (B_1')^*]^\theta) = \big[\mathbf{h}^1(\mathbb{D},(B_0')^*), \mathbf{h}^1(\mathbb{D},(B_1')^*)\big]^\theta = [(C(\mathbb{T},B_0'), C(\mathbb{T},B_1'))_\theta]^*$ d'après [10, lemme 2.1]. Ceci implique que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\mathbb{T},\overline{B}^\theta)} &= \sup\Big\{|(f,u)|;\ u \in (L^{p'}(\mathbb{T},B_0'), L^{p'}(\mathbb{T},B_1'))_\theta \\ &\qquad\qquad \text{et } \|u\|_{(L^{p'}(\mathbb{T},B_0'),L^{p'}(\mathbb{T},B_1'))_\theta} \leqslant 1\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{|(f,u)|;\ u \in (L^{p'}(\mathbb{T},B_0^*), L^{p'}(\mathbb{T},B_1^*))_\theta \\ &\qquad\qquad \text{et } \|u\|_{(L^{p'}(\mathbb{T},B_0^*),L^{p'}(\mathbb{T},B_1^*))_\theta} \leqslant 1\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{|(f,u)|;\ u \in (\mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_0^*), \mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_1^*))_\theta \\ &\qquad\qquad \text{et } \|u\|_{(\mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_0^*),\mathbf{h}^{p'}(\mathbb{D},B_1^{*\prime}))_\theta} \leqslant 1\Big\} \\ &= \|f\|_{\overline{[L^p(\mathbb{T},B_0),L^p(\mathbb{T},B_1)]}^\theta}.\end{aligned}$$

(ii) : D'après le résultat de [10, lemme 1.8], on sait qu'on a l'égalité $[\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1)]^\theta = \ell^\infty(B^\theta)$. Notons

$$H = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^\infty(\mathbb{T},B^\theta); f = \sum_{k\geqslant 0} x_k\mathcal{X}_{C_k},\ \text{les } (C_k)_{k\geqslant 0} \text{ sont des} \\ \text{sous-ensembles mesurables de } \mathbb{T} \text{ deux-à-deux disjoints.} \end{array} \right\}$$

Soient $f = \sum_{k \geqslant 0} x_k \mathcal{X}_{C_k} \in H$ fixée et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $g \in \mathcal{G}(\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1))$ tel que $g'(\theta) = (x_k)_{k \geqslant 0}$ et que

$$\|g\|_{\mathcal{G}(\ell^\infty(B_0),\ell^\infty(B_1))} < \|(x_k)_{k\geqslant 0}\|_{\ell^\infty(B^\theta)} + \varepsilon = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},B^\theta)} + \varepsilon.$$

Pour $z \in S$, écrivons $g(z) = (g(z)_k)_{k \geqslant 0}$, élément de $\ell^\infty(B_0) + \ell^\infty(B_1)$ et $u(z) = \sum_{k\geqslant 0} g(z)_k \mathcal{X}_{C_k}$. Montrons que $u \in \mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1))$.

Soit $J_j : \ell^\infty(B_j) \to L^\infty(\mathbb{T}, B_j)$ l'opérateur défini par $J_j((y_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{k\geqslant 0} y_k \mathcal{X}_{C_k}$, $(y_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^\infty(B_j)$, $j \in \{0,1\}$. Les J_j sont bornés et induisent un opérateur borné $J : \ell^\infty(B_0)+\ell^\infty(B_1) \to L^\infty(\mathbb{T}, B_0)+L^\infty(\mathbb{T}, B_1)$. Par conséquent $u = J(g(\,.\,)) \in \mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1))$. Il est clair que $u'(\theta) = f$ et

$$\|u\|_{\mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{T},B_0),L^\infty(\mathbb{T},B_1))} \leqslant \|g\|_{\mathcal{G}(\ell^\infty(B_0),\ell^\infty(B_1))} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},B^\theta)} + \varepsilon,$$

donc $\|f\|_{(L^\infty(\mathbb{T},B_0),L^\infty(\mathbb{T},B_1))^\theta} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},B^\theta)}$. Comme H est dense dans $L^\infty(\mathbb{T}, B^\theta)$, on déduit que $L^\infty(\mathbb{T}, B^\theta)$ se plonge continûment dans l'espace $(L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1))^\theta$.

On définit $U_{j,f} : L^\infty(\mathbb{T}, A_j) \to \ell^\infty(A_j)$ par $g \to (y_n)_{n\geqslant 0}$, où $y_n = (U_{j,f}(g))_n = \int_{C_n} g(t)\, dm(t)/m(C_n)$ pour $j \in \{0, 1\}$. Les $U_{j,f}$ induisent un opérateur borné $U_f : L^\infty(\mathbb{T}, B_0) + L^\infty(\mathbb{T}, B_1) \to \ell^\infty(B_0) + \ell^\infty(B_1)$. Considérons maintenant $h \in \mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{T}, B_0), L^\infty(\mathbb{T}, B_1))$ telle qu'on ait $h'(\theta) = f$. On définit $g \in \mathcal{G}(\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1))$ par $g(z) = U_f(h(z))$, $z \in S$. Remarquons que $g'(\theta) = (x_k)_{k\geqslant 0} \in (\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1))^\theta$.

D'après [10, lemme 1.8], on a $(x_k)_{k\geqslant 0} \in \ell^\infty(B^\theta)$ et

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},B^\theta)} &= \|(x_k)_{k\geqslant 0}\|_{\ell^\infty(B^\theta)} \\ &\leqslant \|g\|_{\mathcal{G}(\ell^\infty(B_0),\ell^\infty(B_1))} \leqslant \|h\|_{\mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{T},B_0),L^\infty(\mathbb{T},B_1))}. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.5. — D'après [10, corollaire 2.8] il existe un couple d'interpolation (B_0, B_1) tel que $L^p(\mathbb{T}, B^\theta) = L^p(\mathbb{T}, \overline{B}^\theta)$ est un sous-espace strict de $[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]^\theta = \overline{[L^p(\mathbb{T}, B_0), L^p(\mathbb{T}, B_1)]}^\theta$, pour tout $\theta \in\,]0, 1[$ et tout $p \in\,]1, +\infty]$.

Proposition 3.6. — *Soit $\theta \in\,]0, 1[$. Alors $[L^\infty(\mathbb{T}, A_0), L^\infty(\mathbb{T}, A_1)]_\theta$ est un sous-espace strict de $L^\infty(\mathbb{T}, A_\theta)$, sauf si l'inclusion $i : A_0 \to A_1$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $E_\theta = [L^\infty(\mathbb{T}, A_0), L^\infty(\mathbb{T}, A_1)]_\theta$ est un sous-espace isométrique de $L^\infty(\mathbb{T}, A_\theta)$. Soit $f \in E_\theta$. D'après la proposition 3.3, on a

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},A_\theta)} = \|f\|_{[L^\infty(\mathbb{T},A_0),L^\infty(\mathbb{T},A_1)]^\theta} = \|f\|_{E_\theta}.$$

Supposons maintenant que $E_\theta = L^\infty(\mathbb{T}, A_\theta)$. Soit $(C_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{T}$ deux-à-deux disjoints et tels que $m(C_k) > 0$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On définit $J_j : \ell^\infty(A_j) \to L^\infty(\mathbb{T}, A_j)$ par $J_j((x_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{k\geqslant 0} x_k \mathcal{X}_{C_k}$, $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^\infty(A_j)$ et $U_j : L^\infty(\mathbb{T}, A_j) \to \ell^\infty(A_j)$ par $x_n = (U_j(f))_n = \int_{C_n} f(t)\,dm(t)/m(C_n)$, $j \in \{0,1\}$. Il est clair que les J_j et les U_j sont bornés et induisent des opérateurs bornés $J : \ell^\infty(A_0) + \ell^\infty(A_1) = \ell^\infty(A_1) \to L^\infty(\mathbb{T}, A_0) + L^\infty(\mathbb{T}, A_1) = L^\infty(\mathbb{T}, A_1)$ et $U : L^\infty(\mathbb{T}, A_0) + L^\infty(\mathbb{T}, A_1) \to \ell^\infty(A_0) + \ell^\infty(A_1)$.

Montrons que $\ell^\infty(A_\theta) \subset [\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$. Considérons $\alpha = (x_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\ell^\infty(A_\theta)$. Comme $f = J(\alpha) = \sum_{k\geqslant 0} x_k \mathcal{X}_{C_k} \in L^\infty(\mathbb{T}, A_\theta)$, on a $f \in E_\theta$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}(L^\infty(\mathbb{T}, A_0), L^\infty(\mathbb{T}, A_1))$ tel que $F(\theta) = f$ et que $\|F\|_{\mathcal{F}(L^\infty(\mathbb{T},A_0),L^\infty(\mathbb{T},A_1))} < \|f\|_{E_\theta} + \varepsilon \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T},A_\theta)} + \varepsilon \leqslant \|\alpha\|_{\ell^\infty(A_\theta)} + \varepsilon$. On définit $F_1(z) = U(F(z))$, $z \in S$. Il est é vident que $F_1 \in \mathcal{F}(\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1))$. On a

$$\|F_1\|_{\mathcal{F}(\ell^\infty(A_0),\ell^\infty(A_1))} \leqslant \|F\|_{\mathcal{F}(L^\infty(\mathbb{T},A_0),L^\infty(\mathbb{T},A_1))} \leqslant \|\alpha\|_{\ell^\infty(A_\theta)} + \varepsilon$$

et $F_1(\theta) = \alpha$. Par conséquent $\|\alpha\|_{(\ell^\infty(A_0),\ell^\infty(A_1))_\theta} \leqslant \|\alpha\|_{\ell^\infty(A_\theta)}$. Donc $\ell^\infty(A_\theta) \subset [\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$. D'après [10, corollaire 2.8], ce dernier espace est inclus dans $\ell^\infty(A_\theta)$. Il en résulte que $\ell^\infty(A_\theta) = [\ell^\infty(A_0), \ell^\infty(A_1)]_\theta$. C'est impossible d'après [10, corollaire 1.11]. $\square$

Proposition 3.7. — *Soient (B_0, B_1), (C_0, C_1) deux couples d'interpolation. Supposons qu'il existe des injections contractantes $I_j : B_j \to C_j$ et $I'_j : C_j \to (B'_j)^*$ telles que $I'_j \circ I_j = i^*_j : B_j \to (B'_j)^*$, $j \in \{0,1\}$, où i^*_j est l'injection canonique : $B_j \to (B'_j)^*$, et telles que $I_0(a) = I_1(a)$ si $a \in B_0 \cap B_1$, $I'_0(x) = I'_1(x)$ si $x \in C_0 \cap C_1$. Alors B_θ est un sous-espace isométrique de C_θ.*

Démonstration. — Les opérateurs I_j, I'_j induisent respectivement des opérateurs contractants $I_\theta : B_\theta \to C_\theta$ et $I'_\theta : C_\theta \to [(B'_0)^*, (B'_1)^*)]_\theta$, or par hypothèse $I'_\theta \circ I_\theta$ coïncide avec la restriction de l'application R^θ définie au lemme 2.19, qui est une isométrie d'après [8, lemme 4]. Soit $a \in B_\theta$. D'après ce qui précède, on obtient donc que $\|a\|_{B_\theta} = \|R^\theta(a)\|_{(B^*_0,B^*_1)^*_\theta} = \|I'_\theta \circ I_\theta(a)\|_{(B^*_0,B^*_1)^*_\theta} \leqslant \|I_\theta(a)\|_{C_\theta} \leqslant \|a\|_{B_\theta}$. $\square$

Corollaire 3.8. — *Soit (X_0, X_1) un couple d'interpolation, soient $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $\theta \in]0,1[$. Supposons que $X_0 \cap X_1$ est dense dans X_0 et dans X_1. Alors $\left[L^{p_0}_\Lambda(\mathbb{T}, X_0), L^{p_1}_\Lambda(\mathbb{T}, X_1)\right]_\theta$ est un sous-espace isométrique de $\left[\mathbf{h}^{p_0}_\Lambda(\mathbb{D}, X_0), \mathbf{h}^{p_1}_\Lambda(\mathbb{D}, X_1))\right]_\theta$.*

Démonstration. — Soit $(r_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans l'intervalle $]0,1[$ convergeant vers 1 et fixons un ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$. Considérons l'injection canonique $I_j : B_j = L^{p_j}_\Lambda(\mathbb{T}, X_j) \to \mathbf{h}^{p_j}_\Lambda(\mathbb{D}, X_j) = C_j$, et soit $I'_j : \mathbf{h}^{p_j}_\Lambda(\mathbb{D}, X_j) \to (B'_j)^*$ l'injection définie par

$$(I'_j(f), [u]) = \lim_{n,\mathcal{U}} \Big[\lim_{m,\mathcal{U}} \big(f(r_m e^{i(\,\cdot\,)}), u(r_n e^{i(\,\cdot\,)}) \big) \Big].$$

Ici $[u] \in B'_j \subset (L^{p_j}_\Lambda(\mathbb{T}, X_j))^* = \mathbf{h}^{p'_j}(\mathbb{D}, X^*_j)/\mathbf{h}^{p'_j}_{\Lambda^c}(\mathbb{D}, X^*_j)$, pour $j \in \{0,1\}$ et $(f(r_m e^{i(\,\cdot\,)}), u(r_n e^{i(\,\cdot\,)})) = \int_\mathbb{T} (f(r_m e^{it}), u(r_n e^{it}))\, dm(t)$. Pour obtenir le corollaire, il suffit de remarquer que $I'_j \circ I_j = i^*_j : B_j \to (B'_j)^*$. $\square$

Corollaire 3.9. — *Supposons que* $\left[\mathbf{h}^{p_0}_\Lambda(\mathbb{D}, B_0), \mathbf{h}^{p_1}_\Lambda(\mathbb{D}, B_1)\right]_\theta$ *est un sous-espace fermé de* $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, B_\theta)$. *Alors* $\left[L^{p_0}_\Lambda(\mathbb{T}, B_0), L^{p_1}_\Lambda(\mathbb{T}, B_1)\right]_\theta = L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_\theta)$ *isomorphiquement, où* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *et* $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$.

Démonstration. — Comme $E_\theta = \left[L^{p_0}_\Lambda(\mathbb{T}, B_0), L^{p_1}_\Lambda(\mathbb{T}, B_1)\right]_\theta$ est dense dans $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_\theta)$, il suffit de montrer que E_θ est un sous-espace qui est fermé dans $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, B_\theta)$. Soit $f \in E_\theta$. D'après le corollaire 3.8 et l'hypothèse, $\|f\|_{E_\theta} = \|f\|_{(\mathbf{h}^{p_0}_\Lambda(\mathbb{D},B_0),\mathbf{h}^{p_1}_\Lambda(\mathbb{D},B_1))_\theta} \leqslant C\|f\|_{\mathbf{h}^p_\Lambda(\mathbb{D},B_\theta)} = C\|f\|_{L^p_\Lambda(\mathbb{T},B_\theta)}$. $\square$

Corollaire 3.10. — [10, proposition 3.4] *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *Supposons que l'espace* $[H^p(\mathbb{D}, B_0), H^p(\mathbb{D}, B_1)]_\theta$ *est fermé dans* $H^p(\mathbb{D}, B_\theta)$. *On a alors que* $[H^p(\mathbb{T}, B_0), H^p(\mathbb{T}, B_1)]_\theta = H^p(\mathbb{T}, B_\theta)$, *isomorphiquement.*

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Bernard Maurey et Françoise Lust-Piquard pour le temps qu'ils m'ont consacré lors de la préparation de ce travail. Je remercie également le directeur de mon établissement, Monsieur Hamad Alnafeh, qui m'a encouragé à continuer à faire de la recherche.

Bibliographie

[1] W. Arveson, *An invitation to C^*-algebras*, Graduate Texts in Math., vol. 39, Springer-Verlag, 1976, x+106 pages.

[2] B. Beauzamy, « Opérateurs uniformément convexifiants », *Stud. Math.* **57** (1976), p. 103-139.

[3] J. Bergh, « On the relation between the two complex methods of interpolation », *Indiana Univ. Math. J.* **28** (1979), p. 775-778.

[4] J. Bergh & J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol. 223, Springer-Verlag, 1979, x+207 pages.

[5] O. Blasco, « Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators », *Stud. Math.* **86** (1987), p. 19-33.

[6] O. Blasco & Q. Xu, « Interpolation between vector valued Hardy spaces », *J. Funct. Anal.* **102** (1991), n° 2, p. 331-359.

[7] A. V. Bukhvalov & A. A. Danilevich, « Boundary properties of analytic harmonic functions with values in Banach space », *Math. Notes* **31** (1982), p. 104-110, translation from *Mat. Zametki* **31** (1982) 203-214.

[8] M. Daher, « Une remarque sur les espaces d'interpolation faiblement localement uniformément convexes », `https://arxiv.org/abs/1206.4848`.

[9] ———, « Propriétés géométriques de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ et généralisations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **20** (2011), n° 2, p. 439-463.

[10] ———, « Interpolation des espaces de Hardy vectoriels », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **24** (2015), n° 2, p. 389-425.

[11] N. Dinculeanu, *Vector measures*, Hochschulbücher für Mathematik, vol. 64, Pergamon Press, 1967, x+432 pages.

[12] D. J. H. Garling & S. J. Montgomery-Smith, « Complemented subspaces of spaces obtained by interpolation », *J. Lond. Math. Soc.* **44** (1991), n° 3, p. 503-512.

[13] N. A. Ghoussoub & W. B. Johnson, « Counterexamples to several problems on the factorization of bounded linear operators », *Proc. Am. Math. Soc.* **92** (1984), p. 233-238.

[14] M. M. Rao & Z.-D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, 1991, ix+449 pages.

[15] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1966, xi+412 pages.