ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

GUILLAUME DESCHAMPS

Espace des twisteurs d'une variété quaternionique Kähler généralisée

Tome XXVI, nº 3 (2017), p. 539-568.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2017_6_26_3_539_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVI, n° 3, 2017
pp. 539-568

Espace des twisteurs d'une variété quaternionique Kähler généralisée [(*)]

Guillaume Deschamps [(1)]

Résumé. — Munir une variété M de dimension $4n$ d'une structure presque quaternionique Q revient précisément à lui associer un fibré des twisteurs $Z(Q) \longrightarrow M$. Lorsque Q est stable par une connexion sans torsion, on peut munir $Z(Q)$ d'une structure presque complexe $\mathcal{J}$. Dans le cas $n = 1$, les travaux d'Atiyah, Hitchin et Singer [2] ont permis de relier l'intégrabilité de $\mathcal{J}$ à la géométrie de la variété (M, Q). Pour $n > 1$, Salamon [23, 24] a montré que la structure presque complexe $\mathcal{J}$ sur $Z(Q)$ est toujours intégrable. Pantilie [21] a remarqué qu'on pouvait étendre ces résultats à la géométrie complexe généralisée. Ainsi il définit ce qu'est une variété presque quaternionique généralisée $(M, \mathcal{Q})$ et lui associe un $\mathbb{S}^2$-fibré $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$. Comme dans le cas classique, lorsque $\mathcal{Q}$ est stable par une connexion sans torsion (au sens des connexions généralisées), il munit $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ d'une structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ mais ne donne pas de critère d'intégrabilité. Le but de cette article est précisément de donner un critère d'intégrabilité pour $\mathbb{J}$. Nous étudierons ensuite plus particulièrement le cas où $(M, g, \mathcal{Q})$ est une variété quaternionique Kähler généralisée et verrons qu'alors $\mathcal{J}$ est automatiquement intégrable dès que $n > 1$. Nous illustrerons ces résultats en donnant plusieurs exemples.

Abstract. — Specifying an almost quaternionic structure Q on a $4n$-manifold M is equivalent to specifying a twistor bundle $Z(Q) \longrightarrow M$. When Q is invariant under a torsion free connection, $Z(Q)$ can be endowed with an almost complex structure $\mathcal{J}$. For $n = 1$ Atiyah, Hitchin and Singer [2] have related the integrability of $\mathcal{J}$ to the geometry of (M, Q). For $n > 1$ Salamon [23, 24] showed that the almost complex structure $\mathcal{J}$ on $Z(Q)$ is always integrable. Recently, Pantilie [21] introduced the concept of a generalized quaternionic Kähler structure $\mathcal{Q}$ on M; defined a generalized twistor space $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$; and showed that $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ comes naturally equiped with a tautological almost generalized complex structure, but leaves open the problem of the integrability. The purpose of this paper is precisely to fill this gap by showing that the almost generalized complex

[(*)] Reçu le 4 janvier 2016, accepté le 10 mai 2016.
[(1)] Université de Brest, UMR 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, 6 avenue Victor le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest Cedex 3, France
Article proposé par Gilles Carron.

structure on $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ is always integrable for $n > 1$. We will conclude by giving several examples.

1. Introduction

Introduite par Penrose [22], la théorie des twisteurs a pris tout son essor avec l'article d'Atiyah, Hitchin et Singer [2] qui, à toute 4-variété riemannienne orientée (M, g), associe un fibré $Z(M, g) \longrightarrow M$ en sphère $\mathbb{S}^2$. L'espace $Z(M, g)$ est alors muni d'une structure presque complexe naturelle $\mathbb{J}$ dont l'intégrabilité dépend de la métrique g sur M. En dimension plus grande et pour une variété presque quaternionique (M, Q), on peut toujours définir un fibré des twisteurs $Z(Q) \longrightarrow M$ qui est encore un fibré en sphère $\mathbb{S}^2$. Lorsque Q est stable par une connexion sans torsion on peut munir $Z(Q)$ d'une structure presque complexe $\mathbb{J}$. Dans ce cas Salamon [23, 24] a montré que l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ est automatique.

C'est alors qu'a été introduit par Hitchin [18] le concept de structures complexes généralisées, dans le but d'unifier les notions de structures complexes et de structures symplectiques. En utilisant cette théorie, Pantilie [21] a pu définir de façon très naturelle la notion de variétés presque quaternioniques généralisées $(M, \mathcal{Q})$ et d'espace de twisteurs associé $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. Contrairement à certaines généralisations [6, 8, 9, 12, 14], ici l'espace des twisteurs reste un fibré en sphères $\mathbb{S}^2$. Lorsque $\mathcal{Q}$ est stable par une connexion sans « torsion généralisée » (cf. section 2.3 pour des définitions précises), la variété $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ admet une structure presque complexe généralisée, que nous noterons encore $\mathbb{J}$.

Dans son article, Pantilie donne deux exemples d'espace de twisteurs pour lesquelles il vérifie que la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ est intégrable mais ne donne pas de critère d'intégrabilité. Pour palier à cela, on se propose dans cet article d'établir un théorème d'intégrabilité similaire à ceux d'Atiyah, Hitchin, Singer et de Salamon c'est-à-dire qui exprime l'intégrabilité de la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ en fonction de la géométrie de la variété $(M, \mathcal{Q})$. Pour cela nous rappellerons dans la partie 2, les différentes constructions d'espaces de twisteurs. On dira en particulier ce qu'est une structure presque quaternionique généralisée $\mathcal{Q}$ sur une variété M ; ce qu'est l'espace des twisteurs $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$ associé à $(M, \mathcal{Q})$ et enfin, lorsque $\mathcal{Q}$ est une structure quaternionique généralisée, nous rappellerons la construction de la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. Dans la partie 3 nous énoncerons le théorème d'intégrabilité de $\mathbb{J}$, nous verrons qu'il dépend de la courbure de la connexion qui définit $\mathbb{J}$. Dans la partie 4, nous appliquerons ce résultat dans le cas particulier des variétés quaternioniques Kähler généralisées :

Théorème. — *Soit* $(M, g, \mathcal{Q})$ *une 4n-variété quaternionique Kähler généralisée avec* $n > 1$. *La structure presque complexe généralisée* $\mathbb{J}$ *sur son espace de twisteurs* $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ *est toujours intégrable.*

Pour les 4-variétés, l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ dépend de la courbure de la métrique g (cf théorèmes 4.4 et 4.5). Dans la partie 5, nous illustrerons ces résultats par des exemples.

Lorsque $n > 1$ et que (M, g, Q) est une $4n$-variété quaternionique Kähler à courbure de Ricci positive, on sait que son espace des twisteurs est une variété kählérienne [23]. Dans la partie 6, nous verrons que ce résultat ne s'étend pas au cadre de la géométrie généralisée.

2. Rappels et définitions

Soit $E \longrightarrow M$ un fibré au-dessus de M, nous noterons $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections lisses.

2.1. Structure quaternionique.

Une structure *presque complexe* sur une variété M est un endomorphisme du fibré tangent $J \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ qui satisfait $J^2 = -\mathrm{Id}$. Cela revient à munir les fibres du tangent $TM \longrightarrow M$ d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et force donc la dimension de M à être paire. Si la variété M est complexe elle est munie d'une structure presque complexe canonique. Réciproquement, on dira qu'une structure presque complexe J sur M est *intégrable* si elle provient d'un atlas holomorphe. Le théorème de Newlander–Nirenberg nous donne un critère d'intégrabilité.

Théorème 2.1 ([19]). — *Soit* (M, J) *une variété presque complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La structure presque complexe* J *est intégrable.*
(2) *Le tenseur de Nijenhuis défini par*

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

est nul pour toutes sections $X, Y \in \Gamma(TM)$.
(3) *Le sous-espace espace propre* $T^{1,0}$ *de* J *dans* $TM \otimes \mathbb{C}$ *associé à la valeur propre* i, *est stable par crochet de Lie (*i.e. $T^{1,0}$ *involutif).*

Soit (M, g) une variété riemannienne munie d'une structure presque complexe J. Nous dirons que J est compatible avec g si J est un endomorphisme orthogonal pour g et nous noterons $O_g(TM)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux pour g. Nous noterons plus généralement $\mathrm{End}(TM)$ l'ensemble des endomorphismes de TM. Lorsque J est compatible avec g, on peut définir la 2-forme fondamentale

$$w(X, Y) = g(JX, Y) \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(TM).$$

Nous dirons que (M, g, J) est une variété *kählérienne* si J est intégrable et si w est fermée.

Supposons maintenant que la variété M admette deux structures presque complexes I et J, qui anti-commutent. Si on pose $K = IJ$ alors K est une nouvelle structure presque complexe sur M et plus généralement pour tout point $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ l'endomorphisme $aI + bJ + cK$ définit aussi une structure presque complexe. C'est pourquoi nous dirons que la variété (M, I, J, K) est *presque hypercomplexe*. Elle sera dite hypercomplexe dès que I et J sont intégrables. Dans ce cas toute la $\mathbb{S}^2$-famille de structures presque complexes est intégrable. Par ailleurs, nous dirons que la variété (M, g, I, J) est *hyperkählérienne* lorsque les structures complexes I et J sont kählériennes. Là aussi, la terminologie se justifie car pour tout point $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2$, la structure presque complexe $aI + bJ + cK$ est kählérienne. Dans tous ces cas, la dimension de M est nécessairement un multiple de quatre.

Définition 2.2. — *Une structure* presque quaternionique *sur une variété M est un sous-fibré de rang trois $Q \subset \mathrm{End}(TM)$ localement engendré par une structure presque hypercomplexe.*

Une connexion sur TM induit une connexion sur $\mathrm{End}(TM)$ en posant, pour tout $\psi \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ et pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$(\nabla_X \psi)(Y) = \nabla_X \psi(Y) - \psi(\nabla_X Y).$$

Lorsqu'il existe une connexion sans torsion sur TM qui stabilise Q au sens où $\nabla Q \subset Q$, on parle d'une structure *quaternionique*. Une structure presque quaternionique sur M équivaut à se donner une $GL(n, \mathbb{H})Sp(1)$-structure sur M. Et une connexion sans torsion sur TM qui stabilise Q revient à se donner une $GL(n, \mathbb{H})Sp(1)$-connexion sans torsion [5]. Lorsque (M, g, Q) est une variété presque quaternionique munie d'une métrique riemannienne g telle que Q soit localement engendré par une structure presque hypercomplexe, où I, J et K sont compatibles avec g, on dit que (M, g, Q) est une structure *presque quaternionique hermitienne*. Cela correspond à se donner une $Sp(n)Sp(1)$-structure sur M. Si de plus Q est stable par la connexion de Levi Civita on dit que (M, g, Q) est une variété *quaternionique Kähler*. Une variété quaternionique Kähler est donc précisément une variété riemannienne dont le groupe d'holonomie est inclus dans $Sp(n)Sp(1)$. Lorsque $n > 1$, Alekseevskii et Berger ont montré que cela imposait à la métrique g d'être Einstein [1, 4]. En particulier, si on regarde le tenseur de courbure R associé à la métrique g : $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$; vu comme endomorphisme auto-adjoint du fibré extérieur $\bigwedge^2 TM$ on a

$$R|_Q = \lambda \operatorname{Id}|_Q,$$

où λ est un multiple positif de la courbure scalaire de (M,g) et où on identifie les éléments u de Q aux éléments $\phi(u)$ de $\bigwedge^2 TM$ via

$$g\Big(\phi(u), X \wedge Y\Big) = g(uX,Y) \quad \forall\, X,Y \in TM.$$

En dimension 4 une structure presque quaternionique revient à se donner une structure conforme orientée et les structures presque quaternioniques sont automatiquement stables par toute connexion. Plus précisément, si (M,g) est une 4-variété riemannienne, l'opérateur étoile de Hodge induit la décomposition $\bigwedge^2 TM = \bigwedge^+ \oplus \bigwedge^-$ et les seules structures presque quaternioniques hermitiennes de TM sont précisément $\bigwedge^+$ et $\bigwedge^-$. Notons enfin que dans cette base, le tenseur de courbure $R : \bigwedge^2 TM \longrightarrow \bigwedge^2 TM$ se décompose en blocs [5, 25] :

$$R = \begin{bmatrix} \mathcal{W}^+ + \frac{s}{12}\operatorname{Id} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\star & \mathcal{W}^- + \frac{s}{12}\operatorname{Id} \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ + \mathcal{W}^-$ est l'opérateur de Weyl, s la courbure scalaire, $\mathcal{B}$ le tenseur de Ricci sans trace, $\mathcal{B}^\star$ son adjoint et Id la matrice identité.

Lorsque (M,Q) est une variété presque quaternionique de dimension $4n$ avec $n \geqslant 1$, on peut définir le fibré des twisteurs $\pi : Z(Q) \longrightarrow M$ comme le fibré des structures presque complexes sur M appartenant à Q. C'est un fibré de fibres $\mathbb{S}^2$ et de groupe structural $SO(3)$. Les fibres admettent donc naturellement une structure complexe. Une connexion qui stabilise Q fournit alors une décomposition de l'espace tangent de $Z(Q)$:

$$TZ(Q) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

en une distribution horizontale $\mathcal{H}$ et une distribution verticale $\mathcal{V} = \ker d\pi$ (*i.e.* tangente aux fibres). En un point p de $Z(Q)$, comme $\mathcal{H}_p$ est isomorphe à $T_{\pi(p)}M$ via $d\pi$, la distribution horizontale hérite naturellement de la structure presque complexe induite par p. La somme de cette structure presque complexe et de celle sur les fibres munit $Z(Q)$ d'une structure presque complexe naturelle notée $\mathbb{J}$. En dimension quatre, un critère d'intégrabilité de $\mathbb{J}$ a été donné par Atiyah, Hitchin et Singer.

Théorème 2.3 ([2]). — *Soit* (M, g) *une 4-variété riemannienne orientée. La structure presque complexe* $\mathbb{J}$ *sur* $Z(\bigwedge^+)$ *associée à la connexion de Levi-Civita, est intégrable si et seulement si* g *est anti-autoduale (*i.e. $\mathcal{W}^+ = 0$*).*

En dimension plus grande, l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ a été démontré par Salamon.

Théorème 2.4 ([23, 24]). — *Soit* $n > 1$ *et* (M, Q) *une 4n-variété quaternionique alors la structure presque complexe* $\mathbb{J}$ *sur* $Z(Q)$ *est toujours intégrable.*

Remarque. — Pour une 4-variété riemannienne orientée (M, g), la structure presque complexe $\mathbb{J}$ sur $Z(\bigwedge^+)$ associée à la connexion de Levi-Civita ne dépend que de la classe conforme de g. Pour que ces deux théorèmes coïncident, certains auteurs définissent donc les 4-variétés quaternioniques comme des 4-variétés munies de structures conformes orientées anti-autoduales. Pour d'autres les variétés quaternioniques sont de dimension $4n > 4$.

2.2. Structure complexe généralisée.

Soit M une variété de dimension $2n$. En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent de M mais la somme du fibré tangent et du fibré cotangent que nous noterons $\mathbb{T}M = TM \oplus T^\star M$. Sur $\mathbb{T}M$ il y a une pseudo-métrique naturelle de signature $(2n, 2n)$ définie par :

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \frac{1}{2}\Big(\xi(Y) + \eta(X)\Big) \quad \forall\, X, Y \in TM \text{ et } \forall\, \xi, \eta \in T^\star M.$$

Sur $\mathbb{T}M$ on a également le crochet de Courant [7], défini pour toutes sections $X + \xi$, $Y + \eta \in \Gamma(\mathbb{T}M)$ par

$$[X + \xi, Y + \eta] = [X, Y] + \mathcal{L}_X \eta - \mathcal{L}_Y \xi - \frac{1}{2} d(i_X \eta - i_Y \xi)$$

où $[X, Y]$ est le crochet de Lie, $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie et i_X le produit intérieur (*i.e.* la contraction par le premier argument).

Définition 2.5. — *Une structure* presque complexe généralisée [18, 15] *sur* M *est la donnée d'un endomorphisme du fibré tangent généralisée* $\mathcal{J} \in \Gamma(\mathrm{End}(\mathbb{T}M))$ *telle que*

(1) $\mathcal{J}^2 = -\,\mathrm{Id}$
(2) $\mathcal{J}$ *préserve la pseudo-métrique* $\langle\, .\, ,.\, \rangle$.

Théorème-Définition 2.6 ([15]). — *Une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}$ sur M est intégrable si et seulement si l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes est vérifiée :*

(1) *Le tenseur de Nijenhuis défini par*

$$\mathcal{N}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = [\mathcal{J}\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{Y}] - \mathcal{J}[\mathcal{J}\mathcal{X},\mathcal{Y}] - \mathcal{J}[\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{Y}] - [\mathcal{X},\mathcal{Y}]$$

est nul pour toutes sections $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ de $\mathbb{T}M$.

(2) *Le sous-espace propre $\mathbb{T}^{1,0}$ de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ associé à la valeur propre i, est stable par crochet de Courant.*

On note $pr_1 : (TM \oplus T^\star M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow TM \otimes \mathbb{C}$ la première projection. La codimension dans $TM \otimes \mathbb{C}$ de $pr_1(\mathbb{T}^{1,0})$ est un invariant de la structure presque complexe appelé le *type* de $\mathcal{J}$.

Comme le montre les exemples suivants, la notion de structure complexe généralisée regroupe sous un même formalisme les notions de structures complexes et de structures symplectiques.

Exemple 2.7. — Une structure presque complexe J sur M définit la structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^\star \end{pmatrix}$ où $J^\star$ est l'adjoint de J. De plus, $\mathcal{J}_J$ est intégrable si et seulement si J l'est. Le type de $\mathcal{J}_J$ est constant égale à n.

Exemple 2.8. — De même, une structure presque symplectique w sur M (*i.e.* une 2-forme non dégénérée) définit la structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_w = \begin{pmatrix} 0 & -w^{-1} \\ w & 0 \end{pmatrix}$. La structure $\mathcal{J}_w$ est intégrable si et seulement si w l'est (*i.e.* w fermée). Le type de $\mathcal{J}_w$ est 0.

Exemple 2.9. — Toute 2-forme B sur M définit l'application orthogonale suivante :

$$\begin{array}{rcccc} e^B & : & TM \oplus T^\star M & \longrightarrow & TM \oplus T^\star M \\ & & X + \xi & \longmapsto & X + \xi + i_X B. \end{array}$$

Si $\mathcal{J}$ est une structure presque complexe généralisée sur M alors $e^{-B}\mathcal{J}e^B$ aussi et de même type que $\mathcal{J}$. De plus, lorsque B est fermée, $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement sa B-transformation $e^{-B}\mathcal{J}e^B$ l'est.

Une structure complexe sur une $2n$-variété est par définition localement difféomorphe à $\mathbb{C}^n$. D'autre part, le théorème de Darboux nous dit qu'une structure symplectique sur une $2n$-variété est localement difféomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$ où :

$$w_0 = dx_1 \wedge dx_2 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

De même, en un point régulier (*i.e.* où le type est constant égale à k dans un voisinage du point) une structure complexe généralisée est, à B-transformation près, localement difféomorphe au produit de $\mathbb{C}^k$ et de $(\mathbb{R}^{2n-2k}, w_0)$ [15].

2.3. Structure quaternionique généralisée.

Comme l'a remarqué Pantilie [21], les définitions données dans la partie 2.1 s'étendent naturellement dans le cadre de la géométrie complexe généralisée. Ainsi, une variété M est *presque hypercomplexe généralisée* s'il existe une paire de structures presque complexes généralisées $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ qui anticommutent. Là encore, si on pose $\mathcal{K} = \mathcal{I}\mathcal{J}$ alors $\mathcal{K}$ définit une structure presque complexe généralisée, tout comme l'endomorphisme $a\mathcal{I} + b\mathcal{J} + c\mathcal{K}$ associé au point $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2$.

Définition 2.10. — *Une structure* presque quaternionique généralisée *sur une variété M est un sous-fibré de rang trois $\mathcal{Q} \subset \mathrm{End}(\mathbb{T}M)$ localement engendré par une structure presque hypercomplexe généralisée.*

Nous noterons $\overrightarrow{\mathcal{X}} \in TM$ la partie vectorielle de $\mathcal{X} \in \mathbb{T}M$, c'est-à-dire la projection sur TM parallèlement à $T^\star M$:

$$\begin{array}{cccc} \overrightarrow{} : & \mathbb{T}M & \longrightarrow & TM \\ & X + \xi & \longmapsto & X. \end{array}$$

Une connexion (classique) ∇ sur $\mathbb{T}M$ s'étend naturellement en une connexion généralisée [16] sur $\mathbb{T}M$ en posant :

$$\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{Y} := \nabla_{\overrightarrow{\mathcal{X}}} \mathcal{Y} \quad \forall\, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(\mathbb{T}M).$$

La torsion d'une connexion généralisée sur $\mathbb{T}M$ est définie pour toutes sections $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ de $\mathbb{T}M$ par [16] :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \langle \nabla_{\mathcal{X}_1} \mathcal{X}_2 - \nabla_{\mathcal{X}_2} \mathcal{X}_1 - [\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2], \mathcal{X}_3 \rangle \\ + \frac{1}{2} \Big(\langle \nabla_{\mathcal{X}_3} \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \rangle - \langle \nabla_{\mathcal{X}_3} \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1 \rangle \Big). \end{aligned}$$

On appellera torsion généralisée de ∇ l'opérateur $\mathcal{T}$.

Définition 2.11. — *S'il existe une connexion (classique) ∇ sur $\mathbb{T}M$ compatible avec la pseudo-métrique, qui stabilise $\mathcal{Q}$ (*i.e. $\nabla \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}$*) et qui est sans torsion généralisée, on dit que $(M, \mathcal{Q}, \nabla)$ est une variété* quaternionique généralisée.

Une métrique riemannienne g sur M se prolonge en une métrique sur $\mathbb{T}M$. Une structure presque complexe généralisée est dite hermitienne ou compatible avec g si elle agit comme un endomorphisme orthogonal pour g.

Définition 2.12. — *Une variété riemannienne* $(M, g, \mathcal{Q})$ *est dite* quaternionique Kähler généralisée *si* $\mathcal{Q}$ *est une structure presque quaternionique hermitienne généralisée, stable par la connexion de Levi-Civita.*

Comme dans le cas classique, on peut donner une interprétation de ces définitions en termes de G-structure. Pour cela, notons $\mathbb{R}^{4n\star}$ le dual de $\mathbb{R}^{4n}$ et $\mathcal{O}(\mathbb{T}M)$ le sous-groupe de $\mathrm{End}(\mathbb{T}M)$ des isométries pour la pseudo-métrique. Le groupe $GL(2n, \mathbb{H})$ agit naturellement à gauche sur $\mathbb{R}^{4n} \oplus \mathbb{R}^{4n\star}$. On notera $\mathcal{S}p(2n)$ le sous-groupe de $GL(2n, \mathbb{H})$ des isométries pour la pseudo-métriques :

$$\mathcal{S}p(2n) = GL(2n, \mathbb{H}) \cap \mathcal{O}\Big(\mathbb{R}^{4n} \oplus \mathbb{R}^{4n\star}\Big).$$

Le groupe $Sp(1)$ des quaternions de norme 1 agit naturellement à droite sur $\mathbb{R}^{4n} \oplus \mathbb{R}^{4n\star}$. On notera G le groupe produit $\mathcal{S}p(2n)Sp(1)$. Une structure quaternionique généralisée $\mathcal{Q}$ sur M équivaut à se donner un G-fibré principal $\mathcal{P} \longrightarrow M$ qui est un sous-fibré de $\mathcal{O}(\mathbb{T}M) \longrightarrow M$, ainsi qu'une G-connexion sur $\mathcal{P}$ sans torsion généralisée.

2.4. Espace des twisteurs.

Lorsque $(M, \mathcal{Q})$ est une variété presque quaternionique généralisée, on peut lui associer tout naturellement un fibré des twisteurs $\pi : \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$. C'est le fibré des structures presque complexes généralisées sur M appartenant à $\mathcal{Q}$. C'est un fibré en sphère $\mathbb{S}^2$ et de groupe structural $SO(3)$. C'est aussi le fibré associé au fibré principal $\mathcal{P} \longrightarrow M$ par l'action par conjugaison à droite de G sur $\mathbb{S}^2$ (cf. section 3.3).

Comme $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est un fibré associé, une G-connexion sur $\mathcal{P} \longrightarrow M$ permet de décomposer l'espace tangent $T\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ en la somme directe d'une distribution horizontale $\mathcal{H}$ et de la distribution verticale $\mathcal{V} = \ker d\pi$. On identifie le dual de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{V}$) noté $\mathcal{H}^\star$ (resp. $\mathcal{V}^\star$) aux formes linéaires sur $T\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ nulles sur $\mathcal{V}$ (resp. sur $\mathcal{H}$). Comme dans le cas classique, on peut munir $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ d'une structure presque complexe généralisée naturelle. En effet, en un point p de $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ comme $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_p^\star$ est isomorphe à $\mathbb{T}_{\pi(p)}M$ via $d\pi \oplus d\pi^\star$, il hérite de la structure presque complexe généralisée induite par p. La somme de cette structure presque complexe généralisée et de la structure complexe sur les fibres munit $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ d'une structure presque complexe généralisée encore notée $\mathbb{J}$.

La question est de savoir sous quelle condition la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable ? Avant de répondre à cette question, rappelons les exemples proposés par Pantilie [21].

Exemple 2.13. — Comme pour l'exemple 2.7, une variété quaternionique (Kähler) est naturellement quaternionique (Kähler) généralisée.

Exemple 2.14 ([21]*).* — Soit (M, g, I, J, K) une variété hyperkählérienne. Cette variété étant hyperkählérienne, elle est aussi quaternionique Kähler généralisée. Mais on peut aussi construire une structure « tordue ». Ainsi, notons $\mathcal{J}_I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et $\mathcal{J}_w = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$ les structures complexes généralisées associées à la structure complexe I et à la structure symplectique $w = g(J., .)$. Comme M est hyperkählérienne, on a $\mathcal{J}_I\mathcal{J}_w = -\mathcal{J}_w\mathcal{J}_I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{J}_{Iw}$ cette dernière structure complexe généralisée. La distribution $\mathcal{Q} = \{a\mathcal{J}_I + b\mathcal{J}_w + c\mathcal{J}_{Iw}/(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ définit une structure quaternionique Kähler généralisée sur (M, g). Pour une telle variété, il est facile de vérifier que la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable.

Exemple 2.15 ([21]*).* — Soit (N, c, ∇) une 3-variété Einstein–Weyl et $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, c, \nabla)$ son « heaven space ». La 4-variété M est alors parallélisable et la métrique g est anti-autoduale, Einstein à courbure scalaire non nul. Comme toute 4-variété riemannienne orientée, (M, g) est naturellement quaternionique Kähler et donc quaternionique Kähler généralisée. Mais là encore, on peut munir (M, g) d'une structure « tordue ». En effet, l'application $\varphi : M \longrightarrow N$ induit une décomposition $TM \simeq \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}^\star$ avec $\mathcal{V} = \ker d\varphi$ et $\mathcal{H} = \mathcal{V}^\perp$, de sorte que sous cet isomorphisme, la structure quaternionique Kähler naturelle devient une structure quaternionique généralisée $\mathcal{Q}$. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est alors intégrable.

3. Espace des twisteurs et critère d'intégrabilité

3.1. Opérateur de courbure.

Soit $(M, \mathcal{Q}, \nabla)$ une variété quaternionique généralisée et $\pi : \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$ l'espace des twisteurs associé. Soit $\mathcal{U}$ un petit ouvert de M sur lequel on a une trivialisation $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{S}^2$ et $(m, u) \in \mathcal{U} \times \mathbb{S}^2$ un système de coordonnées locales. Une connexion généralisée admet un opérateur de courbure $\mathcal{R}$ défini sur $\mathbb{T}M$ par [16] :

$$\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\mathcal{Z} = [\nabla_\mathcal{X}, \nabla_\mathcal{Y}]\mathcal{Z} - \nabla_{[\mathcal{X},\mathcal{Y}]}\mathcal{Z}, \quad \forall\, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \Gamma(\mathbb{T}M).$$

Par anti-symétrie en $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ on écrira parfois $\mathcal{R}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$ plutôt que $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et pour alléger l'écriture, si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma\Big(\mathbb{T}\mathcal{Z}(\mathcal{Q})\Big)$ on écrira $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ plutôt que $\mathcal{R}(\pi_\star\mathcal{X}, \pi_\star\mathcal{Y})$.

Remarque. — Les connexions que nous considérons dans cette article vérifient $\nabla_\xi = 0$ pour tout $\xi \in \Gamma(T^\star M)$ si bien que $\mathcal{R}$ est linéaire en $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

La connexion ∇ agit sur $\mathrm{End}(\mathbb{T}M)$; pour tous $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(\mathbb{T}M)$ on peut donc faire agir l'opérateur de courbure $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sur $\mathrm{End}(\mathbb{T}M)$. Comme ∇ stabilise $\mathcal{Q}$, pour tout $u \in \Gamma(\mathcal{Q})$ on a toujours $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})u \in \Gamma(\mathcal{Q})$. Mais l'opérateur $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est par définition un élément de $\mathrm{End}(\mathbb{T}M)$. On peut donc aussi regarder le commutateur d'un élément $u \in \mathcal{Q}$ avec $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

$$[u, \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})] = u\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) - \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})u.$$

On vérifie qu'on a l'égalité :

$$[u, \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})] = -\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})u, \quad \forall\, u \in \Gamma(\mathcal{Q}).$$

Le commutateur $[u, \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$ est donc un élément de $\mathcal{Q}$, et plus précisément, on peut voir que c'est un champ de vecteurs vertical sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$.

3.2. Énoncé.

Le résultat central de cet article est le suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $(M, \mathcal{Q}, \nabla)$ *une* $4n$*-variété munie d'une structure quaternionique généralisée avec* $n \geqslant 1$. *La structure presque complexe généralisée* $\mathbb{J}$ *sur* $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ *est intégrable si et seulement si pour tous champs* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star)$ *et pour tout point* $(m, u) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ *on a :*

$$\Big[u, \mathcal{R}\Big(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} - u\mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big) + u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} + \mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big)\Big] = 0.$$

Notation. — Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{T}\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, on note $\mathcal{X}^{1,0} \in \mathbb{T}^{1,0}$ (resp. $\mathcal{X}^{0,1} \in \mathbb{T}^{0,1}$) la partie $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) du champ $\mathcal{X}$, c'est-à-dire la projection sur le sous-espace propre de $\mathbb{J}$ associé à la valeur propre i (resp. $-i$) :

$$\mathcal{X}^{1,0} = \frac{\mathcal{X} - i\mathbb{J}\mathcal{X}}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}^{0,1} = \frac{\mathcal{X} + i\mathbb{J}\mathcal{X}}{2}.$$

Avec cette notation, on peut reformuler le théorème précédent de manière plus intrinsèque.

THÉORÈME 3.1*bis*. — *Soit* $(M, \mathcal{Q}, \nabla)$ *une* $4n$*-variété munie d'une structure quaternionique généralisée avec* $n \geqslant 1$. *La structure presque complexe généralisée* $\mathbb{J}$ *sur* $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ *est intégrable si et seulement si*

$$\Big(\mathcal{R}(\mathcal{X}^{1,0}, \mathcal{Y}^{1,0})\mathcal{Z}^{1,0}\Big)^{0,1} = 0 \;\; \textit{pour tout } \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \Gamma(\mathbb{T}M).$$

3.3. Démonstration.

Soit $X+\xi$ une section de $\mathbb{T}M \longrightarrow M$. On rappelle qu'on identifie $\mathcal{H}^\star$ aux formes linéaires sur $T\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ qui sont nulles sur $\mathcal{V}$. Notons $\widehat{X}+\widehat{\xi} \in \Gamma(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^\star)$ le relevé du champ $X+\xi$. Un tel champ est dit *basique*.

Proposition 3.2. — *Soient $A, B \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ deux champs de vecteurs verticaux sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. On se donne $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur M et $\xi \in \Gamma(T^\star M)$ une 1-forme sur M. Alors :*

(1) $[A, B] \in \Gamma(\mathcal{V})$;
(2) $[\widehat{X}, A] \in \Gamma(\mathcal{V})$;
(3) $[\widehat{X}+\widehat{\xi}, \mathbb{J}A] = \mathbb{J}[\widehat{X}+\widehat{\xi}, A]$;
(4) $[\mathbb{J}(\widehat{X}+\widehat{\xi}), \mathbb{J}A] = \mathbb{J}[\mathbb{J}(\widehat{X}+\widehat{\xi}), A]$.

Démonstration. — Le premier point provient du fait que la distribution verticale est l'espace tangent aux fibres de $\pi : \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$. Comme $\widehat{X}$ est un champ relevé, le deuxième point est immédiat. Et comme le transport parallèle suivant les directions horizontales respecte l'orientation et la métrique sur les fibres, elle respecte la structure complexe sur l'espace tangent vertical, on a $[\widehat{X}, \mathbb{J}A] = \mathbb{J}[\widehat{X}, A]$. De plus, par définition du crochet de Courant on vérifie que $[\widehat{\xi}, A] = 0 = [\widehat{\xi}, \mathbb{J}A]$. Ce qui termine la preuve du troisième point. Le quatrième point s'obtient par « linéarité ». En effet soit $(\widehat{\mathcal{X}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{X}}_{8n}) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^\star$ une base de champs horizontaux basiques définie au-dessus de $\mathcal{U}$. Comme $\mathbb{J}$ stabilise $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^\star$, on note $[\mathbb{J}_{ij}]$ la matrice de la restriction de $\mathbb{J}$ à $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^\star$ dans cette base. En utilisant le point (3), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}}_j, A] &= \mathbb{J}[\mathbb{J}_{ij}\widehat{\mathcal{X}}_i, A] \\
&= \mathbb{J}\big(\mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, A] - A\widehat{\mathcal{X}}_j\big) \\
&= \mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A] - \mathbb{J}A\widehat{\mathcal{X}}_j \\
\text{et} \quad [\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}}_j, \mathbb{J}A] &= [\mathbb{J}_{ij}\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A] \\
&= \mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A] - \mathbb{J}A\widehat{\mathcal{X}}_j.
\end{aligned}$$ □

Corollaire 3.3. — *Le tenseur de Nijenhuis de $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ vérifie $\mathcal{N}(\mathcal{X}, A) = 0$ pour tout $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^\star)$ et pour tout $A \in \Gamma(\mathcal{V})$.*

Démonstration. — Par linéarité, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un champ basique. Le corollaire est alors une conséquence immédiate des points (3) et (4) de la proposition 3.2. □

Proposition 3.4. — *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(\mathbb{T}M)$. Au-dessus de notre ouvert $\mathcal{U}$, la décomposition du champ $[\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Y}}]$ en partie horizontale et verticale est donnée au point $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ par*

$$[\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{Y}}] = \widehat{[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]} + [u, \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})].$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{P} \longrightarrow M$ le G-fibré principal, θ la G-connexion sur $\mathcal{P}$ et $\ker\theta$ la distribution horizontale associée. Commençons par étudier le cas où X et Y sont deux champs de vecteurs sur M. Pour cela on note $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ leur relevé horizontal dans $\mathcal{P}$. La décomposition du champ de vecteurs $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ en partie horizontale et verticale est donnée par (cf. [20] and [5, Chap. 9]) :

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} + (\theta|_{\mathcal{V}})^{-1}(\mathcal{R}(X, Y)),$$

où par définition, $(\theta|_{\mathcal{V}})^{-1}(\mathcal{R}(X, Y))$ est le champ de vecteurs vertical sur $\mathcal{P}$ définie au point $p \in \mathcal{P}$ par :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\Big(p.\, exp(t\mathcal{R}(X, Y))\Big) = p.\, \mathcal{R}(X, Y).$$

D'autre part, la variété $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est le fibré associé de fibre $\mathbb{S}^2$. Plus précisément, le groupe G agit à droite sur $\mathcal{P} \times \mathbb{S}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} \times \mathbb{S}^2 \times G & \longrightarrow & \mathcal{P} \times \mathbb{S}^2 \\ (p, j, g) & \longmapsto & (p.g, g^{-1}.j) = (p.g, gjg^{-1}) \end{array}$$

et $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est le quotient de $\mathcal{P} \times \mathbb{S}^2$ par cette action. On notera Π la projection

$$\begin{array}{cccc} \Pi \ : & \mathcal{P} \times \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \\ & (p, j) & \longmapsto & u = p^{-1}jp. \end{array}$$

Comme au point $p \in \mathcal{P}$ on a $d\Pi\Big(p.\mathcal{R}(X, Y)\Big) = [u, \mathcal{R}(X, Y)]$, au point $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ on a bien

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{[X, Y]} + [u, \mathcal{R}(X, Y)].$$

Considérons maintenant X un champ de vecteurs et η une 1-forme sur M alors par définition du crochet de Courant on voit que $[\widehat{X}, \widehat{\eta}] = \widehat{[X, \eta]}$ et comme $\nabla_\eta = 0$ on a $\mathcal{R}(X, \eta) = 0$ soit :

$$[\widehat{X}, \widehat{\eta}] = \widehat{[X, \eta]} + [u, \mathcal{R}(X, \eta)]. \qquad \square$$

Corollaire 3.5. — *Soient $U^\sharp \in \Gamma(\mathcal{V}^\star)$ une 1-forme verticale et $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star)$ un champ de vecteurs et de formes horizontal. Au point $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})$ est la 1-forme horizontale définie pour tout $\overrightarrow{\mathcal{Y}} \in \Gamma(\mathcal{H})$ par*

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})(\overrightarrow{\mathcal{Y}}) \\ &\qquad = U^\sharp\left(\Big[u, \mathcal{R}\Big(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} - u\mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big) + u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} + \mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big)\Big]\right). \end{aligned}$$

Démonstration. — Par définition du crochet de Courant on sait que $[U^\sharp, \mathcal{X}] = [U^\sharp, \overrightarrow{\mathcal{X}}]$ est une 1-forme. Soient $A \in \Gamma(\mathcal{V})$ et $\overrightarrow{\mathcal{Y}} \in \Gamma(\mathcal{H})$ deux champs de vecteurs, au point $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ on a par définition

$$\begin{aligned}
[U^\sharp, \mathcal{X}](A + \overrightarrow{\mathcal{Y}}) &= dU^\sharp(\overrightarrow{\mathcal{X}}, \overrightarrow{\mathcal{Y}} + A)\\
&= \overrightarrow{\mathcal{X}}.U^\sharp(A) - U^\sharp([\overrightarrow{\mathcal{X}}, \overrightarrow{\mathcal{Y}} + A])\\
&= \overrightarrow{\mathcal{X}}.U^\sharp(A) - U^\sharp([\overrightarrow{\mathcal{X}}, A]) - U^\sharp([u, \mathcal{R}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})]).
\end{aligned}$$

Le point (3) de la proposition 3.2 nous assure alors que $[\mathbb{J}U^\sharp, \mathcal{X}](A) = \mathbb{J}[U^\sharp, \mathcal{X}](A)$. La partie verticale de la 1-forme $\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})$ est donc nulle. Pour la partie horizontale le calcul précédent nous dit qu'au point u on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})(\overrightarrow{\mathcal{Y}})\\
&\qquad = U^\sharp \left(\left[u, \mathcal{R}\Big(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} - u\mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y} \Big) + u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} + \mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y} \Big) \right] \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Corollaire 3.6. — *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star)$ deux champs horizontaux. Au point $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est le champ de vecteurs vertical défini par*

$$\mathcal{N}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = -\left[u, \mathcal{R}\Big(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} - u\mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y} \Big) + u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} + \mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y} \Big) \right].$$

Démonstration. — On note $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{8n})$ une base orthonormée de $\mathbb{T}M$ définie au-dessus de $\mathcal{U}$. La distribution $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ est stable par $\mathbb{J}$, on notera $[\mathbb{J}_{ij}]$ sa matrice dans la base relevée $(\widehat{\mathcal{X}_1}, \ldots, \widehat{\mathcal{X}_{8n}})$. Par définition du crochet de Courant

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_i}, \mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_j} \right] &= \overrightarrow{\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_i}}.(\mathbb{J}_{rj})\, \widehat{\mathcal{X}_r} - \overrightarrow{\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_j}}.(\mathbb{J}_{li})\, \widehat{\mathcal{X}_l} + \mathbb{J}_{li}\mathbb{J}_{rj} \left[\widehat{\mathcal{X}_l}, \widehat{\mathcal{X}_r} \right]\\
&\quad - \mathbb{J}_{ri} d\mathbb{J}_{rj} + \mathbb{J}_{lj} d\mathbb{J}_{li}\\
\left[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_j} \right] + \left[\widehat{\mathcal{X}_i}, \mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_j} \right] &= -\overrightarrow{\widehat{\mathcal{X}_j}}.(\mathbb{J}_{li})\, \widehat{\mathcal{X}_l} + \mathbb{J}_{li} \left[\widehat{\mathcal{X}_l}, \widehat{\mathcal{X}_j} \right] + \overrightarrow{\widehat{\mathcal{X}_i}}.(\mathbb{J}_{rj})\, (\widehat{\mathcal{X}_r})\\
&\quad + \mathbb{J}_{rj} \left[\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_r} \right] + d\mathbb{J}_{ji} - d\mathbb{J}_{ij}.
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.4, on en déduit qu'au point u, la partie verticale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}}_i, \widehat{\mathcal{X}}_j)$ vaut

$$-\left[u, \mathcal{R}\Big(\mathcal{X}_i \wedge \mathcal{X}_j - u\mathcal{X}_i \wedge u\mathcal{X}_j \Big) + u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X}_i \wedge \mathcal{X}_j + \mathcal{X}_i \wedge u\mathcal{X}_j \Big) \right].$$

Pour la partie horizontale, on se donne s une section locale de $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$ telle que $s(m) = u$ et $(\nabla s)_m = 0$. La partie horizontale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}}_i, \widehat{\mathcal{X}}_j)$ restreinte à la sous-variété $s(M)$ est égale au relevé horizontal du tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j)$ de M munie de la structure presque complexe généralisée induite par s. On se place dans des coordonnées normales en m. En ce point, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}}_i,\widehat{\mathcal{X}}_j),\widehat{\mathcal{X}}_k\rangle &= \mathcal{T}(\mathcal{X}_i,\mathcal{X}_j,\mathcal{X}_k) - \mathcal{T}(u\mathcal{X}_i,u\mathcal{X}_j,\mathcal{X}_k)\\ &\qquad - \mathcal{T}(u\mathcal{X}_i,\mathcal{X}_j,u\mathcal{X}_k) - \mathcal{T}(\mathcal{X}_i,u\mathcal{X}_j,u\mathcal{X}_k).\end{aligned}$$

Comme la connexion est sans torsion généralisée, on en déduit qu'au point m on a $\mathcal{N}(\mathcal{X}_i,\mathcal{X}_j)=0$. La partie horizontale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}}_i,\widehat{\mathcal{X}}_j)$ est nulle au point (m,u) donc partout. $\square$

Démonstration du théorème 3.1. — Comme les fibres de $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \longrightarrow M$ sont complexes, il est clair que quels que soient $A,B \in \Gamma(\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}^\star)$ on a $\mathcal{N}(A,B)=0$. Le théorème 3.1 est alors une conséquence directe des corollaires 3.3, 3.5 et 3.6 et de la linéarité de $\mathcal{N}$. $\square$

Démonstration du théorème 3.1bis. — Par définition, au point (m,u) on a :

$$\begin{aligned}&8\mathbb{R}(\mathcal{X}^{1,0},\mathcal{Y}^{1,0})\mathcal{Z}^{1,0}\\ &\quad= \Big(\mathcal{R}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}-u\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y}) - \mathcal{R}(\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y}+u\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y})u\Big)\mathcal{Z}\\ &\qquad\quad - i\Big(\mathcal{R}(\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y}+u\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}) + \mathcal{R}(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}-u\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y})u\Big)\mathcal{Z}.\end{aligned}$$

De sorte que la partie $(0,1)$ du vecteur $8\mathcal{R}(\mathcal{X}^{1,0},\mathcal{Y}^{1,0})\mathcal{Z}^{1,0}$ est nulle si et seulement si

$$\Big[u,\mathcal{R}\Big(\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}-u\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y}\Big)+u\mathcal{R}\Big(u\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}+\mathcal{X}\wedge u\mathcal{Y}\Big)\Big]=0. \qquad \square$$

4. Variétés quaternioniques Kähler généralisées

4.1. Théorèmes d'intégrabilités

Soit $(M,g,\mathcal{Q})$ une $4n$-variété riemannienne munie d'une structure presque quaternionique hermitienne généralisée. En identifiant $\mathbb{T}M$ et $\mathbb{T}^\star M$ grâce à la pseudo-métrique $\langle\,.\,,.\,\rangle$, la métrique g sur $\mathbb{T}M$ peut être vue comme un endomorphisme $G=\begin{pmatrix}0 & g^{-1}\\ g & 0\end{pmatrix}$ de $\mathbb{T}M = TM\oplus T^\star M$. Comme $G^2=\mathrm{Id}$, on notera $C^\pm$ le sous-espace propre de G associé à la valeur propre ±1. Si au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$, on se donne $(\theta_1,\ldots,\theta_{4n})$ une base orthonormée de TM et si on note $(\theta_1^\star,\ldots,\theta_{4n}^\star)$ sa base duale, alors

$$C^\pm = Vect\Big(\theta_1\pm\theta_1^\star,\ldots,\theta_{4n}\pm\theta_{4n}^\star\Big).$$

Comme les éléments de $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ sont compatibles avec g, ils stabilisent les espaces propres $C^\pm$. De plus comme $\mathcal{Q}-\{0\}\simeq\mathbb{R}^{+\star}\times\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, les éléments de $\mathcal{Q}$ stabilisent aussi $C^{\pm}$. La matrice d'un élément $u \in \mathcal{Q}$ dans une base adaptée à $\mathbb{T}M = C^+ \oplus C^-$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} u^+ & 0 \\ 0 & u^- \end{pmatrix}$. D'autre part, les projections $p^{\pm} : C^{\pm} \longrightarrow TM$ sont des isomorphismes qui permettent de descendre la distribution $\mathcal{Q}$ en deux structures presque quaternioniques sur M que nous noterons $Q^{\pm} := p^{\pm}_{\star}(\mathcal{Q})$. Par abus de notation, nous écrirons $u^{\pm} = p^{\pm}_{\star}(u)$. Enfin on définit l'application

$$\begin{array}{rccccc} f : & Q^- & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & Q^+ \\ & u^- & \longmapsto & p^{-\star}(u^-) = \begin{pmatrix} u^+ & 0 \\ 0 & u^- \end{pmatrix} & \longmapsto & p^+_{\star} \circ p^{-\star}(u^-) = u^+. \end{array}$$

Convention. — Nous dirons que $f : Q^- \longrightarrow Q^+$ est un isomorphisme d'algèbre au sens où l'application f se prolonge naturellement en un isomorphisme entre les algèbres $Q^- \oplus Vect(\mathrm{Id})$ et $Q^+ \oplus Vect(\mathrm{Id})$.

Corollaire 4.1. — *La donnée d'une structure presque quaternionique hermitienne généralisée sur (M, g) revient à se donner un triplet (Q^+, Q^-, f) où Q^+, Q^- sont deux structures presque quaternioniques hermitiennes et où $f : Q^- \longrightarrow Q^+$ est un isomorphisme d'algèbres. En particulier les espaces de twisteurs $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, $Z(Q^+)$ et $Z(Q^-)$ sont difféomorphes :*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \arrow[dl, "p^-_{\star}"'] \arrow[dr, "p^+_{\star}"] & \\ Z(Q^-) \arrow[rr, "f"] & & Z(Q^+). \end{tikzcd}$$

Proposition 4.2. — *Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g), $\mathcal{Q}$ est une structure quaternionique Kähler généralisée si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Q^+ et Q^- sont des structures quaternioniques Kähler sur (M, g),*
(2) *$\nabla f(u^-) = f(\nabla u^-)$ pour tout $u^- \in Q^-$.*

Remarque. — La première condition est automatiquement vraie en dimension quatre.

Démonstration. — La connexion de Levi-Civita stabilise $C^{\pm}$, donc si elle stabilise $\mathcal{Q}$, elle stabilise $Q^{\pm}$. Plus précisément, pour tout $u = \begin{pmatrix} u^+ & 0 \\ 0 & u^- \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ on a $\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u^+ & 0 \\ 0 & \nabla u^- \end{pmatrix}$. De sorte que $\nabla u \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla u^+ \in Q^+ \\ \nabla u^- \in Q^- \\ \nabla u^+ = f(\nabla u^-) \end{cases}$. $\square$

Dans le cas particulier où $(M, g, \mathcal{Q})$ est une variété riemannienne munit d'une structure quaternionique Kähler généralisée, on peut reformuler l'intégrabilité de la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ plus explicitement que dans le théorème 3.1. Comme dans le cas classique étudié par Salamon, l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ est automatique dès lors que $n > 1$:

Théorème 4.3. — *Soit $(M, g, \mathcal{Q})$ une $4n$-variété quaternionique Kähler généralisée avec $n > 1$. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur son espace des twisteurs $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable.*

Une 4-variété riemannienne orientée n'admet que deux structures quaternioniques hermitiennes différentes : $\bigwedge^+$ et $\bigwedge^-$. Quitte à renverser l'orientation, il y a donc deux classes de structures quaternioniques Kähler généralisées suivant que $Q^+ = Q^- = \bigwedge^+$ ou que $Q^+ = \bigwedge^+$ et $Q^- = \bigwedge^-$.

Théorème 4.4. — *Soit $(M, g, \mathcal{Q})$ une 4-variété quaternionique Kähler généralisée telle que $Q^+ = Q^- = \bigwedge^+$. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $R|_{\bigwedge^+} = 0$,
(2) $f = \mathrm{Id}$ *et g anti-autoduale.*

Remarque. — Les seules 4-variétés riemanniennes compactes qui vérifient la première contrainte sont les quotients du tore plat ou d'une surface K3 [17]. D'autre part, si $f = \mathrm{Id}$ alors l'espace des twisteurs $\big(\mathcal{Z}(\mathcal{Q}), \mathbb{J}\big)$ coïncident exactement avec l'espace des twisteurs $\big(Z(\bigwedge^+), \mathbb{J}\big)$ défini par Atiyah, Hitchin et Singer.

Théorème 4.5. — *Soit $(M, g, \mathcal{Q})$ une 4-variété quaternionique Kähler telle que $Q^+ = \bigwedge^+$ et $Q^- = \bigwedge^-$. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable si et seulement si g est localement conformément plate.*

Ces trois théorèmes permettent de retrouver l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ pour les deux exemples donnés dans la section 2.

Exemple 4.6. — Si (M, Q) est une variété quaternionique Kähler alors elle est naturellement quaternionique Kähler généralisée. Avec nos notations, cela revient à prendre $Q^+ = Q^- = Q$ et f l'isomorphisme identité. Pour $n > 1$, l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ est automatique et on retrouve le résultat de Salamon. Pour $n = 1$, l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ équivaut à g anti-autoduale et on retrouve le théorème d'Atiyah, Hitchin et Singer.

Exemple 4.7. — Soit (M, g, I, J, K) une variété hyperkählérienne, $(\theta_1, \ldots, \theta_{4n})$ une base orthonormée locale de (TM, g) et $(\theta_1^\star, \ldots, \theta_{4n}^\star)$ sa base duale. Dans la base $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta^\star_{4n})$ de $\mathbb{T}M$ la structure quaternionique Kähler « tordue » décrite dans la section 2.4, s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \{a\mathcal{J}_I + b\mathcal{J}_w + c\mathcal{J}_{Iw} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} aI & bJ + cK \\ bJ + cK & aI \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.\end{aligned}$$

Dans la base $(\theta_1 + \theta^\star_1, \ldots, \theta_{4n} - \theta^\star_{4n})$ de $C^+ \oplus C^-$ cela donne donc :

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} aI + bJ + cK & 0 \\ 0 & aI - bJ - cK \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Avec nos notations, cela correspond donc à prendre $Q^+ = Q^- = Q$ et

$$\begin{array}{rccc} f \ : & Q^- & \longrightarrow & Q^+ \\ & aI + bJ + cK & \longmapsto & aI - bJ - cK \end{array}$$

Qu'on ait $n = 1$ (comme la métrique est anti-autoduale et Ricci plate) ou $n > 1$, on rentre dans les hypothèses des théorèmes 4.3 and 4.4 : la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est bien intégrable. De plus, on vérifie facilement que le type de $\mathbb{J}$ est $2n+1$ au point $(m, \pm\mathcal{J}_I)$ et de type 1 ailleurs.

La démonstration de ces trois théorèmes repose sur la proposition suivante.

Proposition 4.8. — *Soit $(M, g, \mathcal{Q})$ une variété quaternionique Kähler généralisée et R le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ est intégrable si et seulement si pour tous champs de vecteurs X, Y sur M et pour tout élément $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$, les trois tenseurs suivants sont nuls :*

$$\begin{aligned}
&(1)\ G_1(X,Y,u^+) \\
&\qquad = \Big[u^+, R\Big(X\wedge Y - u^+X \wedge u^+Y\Big) + u^+R\Big(u^+X\wedge Y + X\wedge u^+Y\Big)\Big],\\
&(2)\ G_2(X,Y,u^+) \\
&\qquad = \Big[u^+, R\Big(X\wedge Y - u^+X \wedge u^-Y\Big) + u^+R\Big(u^+X\wedge Y + X\wedge u^-Y\Big)\Big],\\
&(3)\ G_3(X,Y,u^-) \\
&\qquad = \Big[u^-, R\Big(X\wedge Y - u^-X \wedge u^-Y\Big) + u^-R\Big(u^-X\wedge Y + X\wedge u^-Y\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Démonstration. — La connexion de Levi-Civita ∇ stabilise $C^\pm$ donc pour tous $X, Y \in TM$, le tenseur de courbure $\mathcal{R}(X,Y)$ aussi. Plus exactement, dans la base de $\mathbb{T}M = C^+ \oplus C^-$, la matrice du tenseur de courbure $\mathcal{R}(X,Y)$

s'écrit $\begin{pmatrix} R(X,Y) & 0 \\ 0 & R(X,Y) \end{pmatrix}$. Au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}$ de M, on a la trivialisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) \\ (m, u^-) & \longmapsto & \left(m, \begin{pmatrix} f(u^-) & 0 \\ 0 & u^- \end{pmatrix}\right). \end{array}$$

Les vecteurs verticaux sont donc de la forme $\left(0, \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$, où A est un vecteur tangent à $\mathbb{S}^2$. En utilisant cette remarque et le théorème 3.1, on a que $\mathbb{J}$ est intégrable si et seulement si le tenseur

$$G(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, u^+) = \Big[u^+, R\Big(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} - u\mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big) + u^+ R\Big(u\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} + \mathcal{X} \wedge u\mathcal{Y}\Big)\Big]$$

est nul pour tous $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma\Big(\mathbb{T}\mathcal{Z}(\mathcal{Q})\Big)$ et pour tout $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. Suivant que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont dans C^+ ou dans C^- on en déduit que l'annulation du tenseur G est équivalente à celle des tenseurs G_1, G_2 et $\widetilde{G_3}$ avec

$$\begin{aligned} &\widetilde{G}_3(X, Y, u^+) \\ &\quad = \Big[u^+, R\Big(X \wedge Y - u^- X \wedge u^- Y\Big) + u^+ R\Big(u^- X \wedge Y + X \wedge u^- Y\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Mais comme $\nabla u^+ = f(\nabla u^-)$ et que $[u, R(X,Y)] = -R(X,Y)u, \ \forall\, u \in \bigwedge^2$, on en déduit que $[u^+, R(X,Y)] = f\Big([u^-, R(X,Y)]\Big)$ et donc que $\widetilde{G}_3(X, Y, u^+) = f\Big(G_3(X, Y, u^-)\Big)$. De sorte que $\widetilde{G}_3 = 0$ si et seulement si $G_3 = 0$. □

4.2. Démonstration du théorème 4.3.

Pour démontrer le théorème 4.3 nous utiliserons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.9. — *Une 4n-variété quaternionique Kähler généralisée avec $n > 1$, vérifie nécessairement $f = \mathrm{Id}$ ou $s = 0$.*

Démonstration. — La démonstration de la proposition 4.9 repose sur le lemme suivant :

LEMME 4.10 ([5]). — *Soit (M, g, Q) une 4n-variété quaternionique Kähler avec $n > 1$. On note (I, J, K) une structure presque hypercomplexe qui engendre Q au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ et $c = \dfrac{s}{2n(n+2)}$. Pour tous champs de vecteurs X, Y sur M on a :*

$$[I, R(X,Y)] = -cg(KX, Y)\, J + cg(JX, Y)\, K.$$

Démonstration du lemme 4.10. — Soit $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ une structure presque hypercomplexe généralisée sur (M, g) qui engendre localement $\mathcal{Q}$. La proposition 4.2 nous assure que $(\mathcal{I}^{\pm}, \mathcal{J}^{\pm}, \mathcal{K}^{\pm})$ sont deux structures quaternioniques Kähler sur (M, g). Le lemme 4.10 nous dit alors que :

$$[\mathcal{I}^-, R(X,Y)] = -cg(\mathcal{K}^- X, Y)\,\mathcal{J}^- + cg(\mathcal{J}^- X, Y)\,\mathcal{K}^-,$$
$$[\mathcal{I}^+, R(X,Y)] = -cg(\mathcal{K}^+ X, Y)\,\mathcal{J}^+ + cg(\mathcal{J}^+ X, Y)\,\mathcal{K}^+.$$

En composant par f la première égalité, on en déduit que :

$$\begin{cases} cg(\mathcal{K}^- X, Y) = cg(\mathcal{K}^+ X, Y) \\ cg(\mathcal{J}^- X, Y) = cg(\mathcal{J}^+ X, Y) \end{cases} \iff f = \mathrm{Id} \ \text{ ou } c = 0. \qquad \square$$

Il est alors facile de démontrer le théorème 4.3. En effet si $f = \mathrm{Id}$, la variété $(\mathcal{Z}(\mathcal{Q}), \mathbb{J})$ coïncide avec la variété $(Z(Q), \mathbb{J})$ étudiée par Salamon, si bien que $\mathbb{J}$ est une structure complexe intégrable sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. D'autre part, dans le cas où $s = 0$, il est clair en utilisant le lemme 4.10, que $G_1 = G_2 = G_3 = 0$ et donc que $\mathbb{J}$ est intégrable. $\square$

4.3. Démonstration du théorème 4.4

On se place maintenant en dimension quatre avec $Q^+ = Q^- = \bigwedge^+$. Le tenseur G_1 est la contrainte classique d'intégrabilité qui apparaît dans Atiyah, Hitchin et Singer [2]. Donc G_1 est nul si et seulement si la métrique g est anti-autoduale. De même, si g est anti-autoduale, on a automatiquement $G_3 = 0$. Il reste alors à étudier le tenseur G_2 sous l'hypothèse g anti-autoduale. Pour cela on utilise la proposition suivante qui est l'équivalent en dimension quatre de la proposition 4.9.

Proposition 4.11. — *Une 4-variété quaternionique Kähler généralisée anti-autoduale telle que $Q^+ = Q^- = \bigwedge^+$ vérifie nécessairement $f = \mathrm{Id}$ ou $s = 0$.*

Démonstration. — Sous l'hypothèse g anti-autoduale, le tenseur de courbure s'écrit : $R = \begin{bmatrix} \frac{s}{12}\mathrm{Id} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^{\star} & \mathcal{W}^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{bmatrix}$. De plus on sait que $[u^+, R(v)] = f\Big([u^-, R(v)]\Big)$ pour tout $u \in \mathcal{Q}$ et pour tout $v \in \bigwedge^2$. Enfin, comme les éléments de $\bigwedge^+$ commutent avec ceux de $\bigwedge^-$, cela donne en particulier pour tout $v \in \bigwedge^+$:

$$\begin{aligned} \frac{s}{12}[u^+, v] = \frac{s}{12} f\Big([u^-, v]\Big) &\iff \frac{s}{12}[u^+, v] = \frac{s}{12}[u^+, f(v)] \\ &\iff f = \mathrm{Id} \ \text{ ou } s = 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Si $f = \mathrm{Id}$ alors $u^+ = u^-$ et $G_1 = G_2 = G_3$. Donc $\mathbb{J}$ est intégrable si et seulement si g est anti-autoduale. On considère donc le cas $f \neq \mathrm{Id}$ et $\mathcal{W}^+ = s = 0$. Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_4)$ une base orthonormée au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M, cela nous fournit une trivialisation locale de $\bigwedge^+$ et de $\bigwedge^-$ grâce aux deux structures presque hypercomplexes suivantes

$$\begin{cases} I^+ = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \\ J^+ = \theta_1 \wedge \theta_3 - \theta_2 \wedge \theta_4 \\ K^+ = \theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I^- = \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4 \\ J^- = \theta_1 \wedge \theta_3 + \theta_2 \wedge \theta_4 \\ K^- = -\theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3 \end{cases}$$

On se place en un point (m, u) de $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ tel que $u^- = aI^+ + bJ^+ + cK^+$ et $u^+ = I^+$ alors :

$$\begin{aligned} & G_2(\theta_1, \theta_1, u^+) = 0 \\ & \iff \Big[I^+, \mathcal{B}\Big(-bK^- - cJ^-\Big) + I^+\mathcal{B}\Big((a-1)I^- + bJ^- - cK^-\Big)\Big] = 0, \quad (4.1) \\ & G_2(\theta_2, \theta_2, u^+) = 0 \\ & \iff \Big[I^+, \mathcal{B}\Big(bK^- + cJ^-\Big) + I^+\mathcal{B}\Big((a-1)I^- - bJ^- + cK^-\Big)\Big] = 0, \quad (4.2) \\ & G_2(\theta_3, \theta_1, u^+) = 0 \\ & \iff \Big[I^+, \mathcal{B}\Big((a-1)J^- - bI^-\Big) + I^+\mathcal{B}\Big((1-a)J^- - cI^-\Big)\Big] = 0. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Comme $f \neq \mathrm{Id}$ on a $a \neq 1$ et donc (4.1)+(4.2) entraîne $[I^+, \mathcal{B}(I^-)] = 0$. Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ est diagonale. Mais alors (4.3) donne :

$$[I^+, (a-1)yJ^+ + I^+(1-a)zK^+] = 0 \iff y = -z$$

et par symétrie $z = -x$ et $x = -y$ soit $\mathcal{B} = 0$. Réciproquement, si f quelconque, g anti-autoduale et Ricci plat alors l'image de R est dans $\bigwedge^-$. Comme les éléments de $\bigwedge^+$ commutent avec ceux de $\bigwedge^-$, il est clair que $G_1 = G_2 = G_3 = 0$ et donc que $\mathbb{J}$ est intégrable.

4.4. Démonstration du théorème 4.5

On se place toujours en dimension quatre en supposant maintenant que $Q^+ = \bigwedge^+$ et $Q^- = \bigwedge^-$. Le tenseur G_1 est nul si et seulement si g est anti-autoduale et le tenseur G_3 est nul si et seulement si g autoduale [2]. Il reste donc à étudier le tenseur G_2, sous l'hypothèse g localement conformément plate. Pour cela on utilise la proposition et le lemme suivants :

Proposition 4.12. — *Une 4-variété quaternionique Kähler généralisée localement conformément plate telle que $Q^+ = \bigwedge^+$ et $Q^- = \bigwedge^-$ vérifie nécessairement $\mathcal{B} = \frac{s}{12} f$.*

Démonstration. — Si la métrique g est localement conformément plate, la matrice du tenseur de courbure est de la forme $R = \begin{pmatrix} \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}^\star & \frac{s}{12}\,\mathrm{Id} \end{pmatrix}$. Comme pour tout $u \in \mathcal{Q}$ et pour tout $v \in \bigwedge^2$ on a $[u^+, R(v)] = f\Big([u^-, R(v)]\Big)$, en particulier pour tout $u^+ \in \bigwedge^+$ et pour tout $v \in \bigwedge^-$:

$$\begin{aligned} [u^+, \mathcal{B}(v)] = f\Big([u^-, \frac{s}{12} v]\Big) &\iff [u^+, \mathcal{B}(v)] = [u^+, \frac{s}{12} f(v)] \\ &\iff \mathcal{B} = \frac{s}{12} f. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.13. — *Soit $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ une structure presque hypercomplexe généralisée qui engendre localement $\mathcal{Q}$. En choisissant convenablement la base $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, on peut supposer que :*

$$\begin{cases} I^\pm = \mathcal{I}^\pm \\ J^\pm = \mathcal{J}^\pm \\ K^\pm = \mathcal{K}^\pm \end{cases}$$

où $(I^\pm, J^\pm, K^\pm)$ est la base de $\bigwedge^\pm$ définie dans la section 4.3.

Démonstration. — Commençons par montrer qu'on peut choisir la base $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de sorte que :

$$I^+ = \mathcal{I}^+ \text{ et } I^- = \mathcal{I}^-.$$

Les valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{I}^+\mathcal{I}^- = \mathcal{I}^-\mathcal{I}^+$ sont -1 et 1, on notera E_{-1} et E_1 les espaces propres associés. Soit (θ_1, θ_2) une base orthonormée de E_{-1} et (θ_3, θ_4) une base orthonormée de E_1. Comme $\mathcal{I}^+$ stabilise E_{-1} et est orthogonale, on a $I^+\theta_1 = \pm\theta_2$. Quitte à échanger θ_1 et θ_2, on peut supposer que $\mathcal{I}^+\theta_1 = \theta_2$. De même, on peut supposer que $\mathcal{I}^+\theta_3 = \theta_4$. On a alors $\mathcal{I}^+ = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4$. Mais comme $\mathcal{I}^+\mathcal{I}^-\theta_1 = -\theta_1$ et $\mathcal{I}^+\mathcal{I}^-\theta_3 = \theta_3$, on a aussi

$$\mathcal{I}^- = \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4.$$

Maintenant en jouant sur le choix de $\theta_1 \in E_{-1}$ nous allons pouvoir conclure. Comme f est un isomorphisme d'algèbre, sa matrice dans les bases (I^-, J^-, K^-) de $\bigwedge^-$ et (I^+, J^+, K^+) de $\bigwedge^+$ associées à $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\alpha \end{pmatrix}$ où R_α est la rotation d'angle α. Notons $R_{-\alpha}$ la rotation d'angle $-\alpha$ dans le plan E_{-1}. On vérifie directement que la base $\Big(R_{-\alpha}(\theta_1), R_{-\alpha}(\theta_2), \theta_3, \theta_4\Big)$ convient. □

On se place dans la base $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ donnée par le lemme 4.13. La proposition 4.11 nous dit que la matrice du tenseur de courbure dans la base $(I^+, J^+, K^+, I^-, J^-, K^-)$ est $R = \frac{s}{12}\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$. Pour finir la preuve du théorème 4.5, il suffit de vérifier à la main que $G_2(\theta_i, \theta_j, I^+) = 0$, pour tous θ_i, θ_j.

5. Nouveaux exemples

Pour illustrer ces théorèmes, on peut donner de nouveaux exemples de structures quaternioniques Kähler généralisées. L'idée est de partir de deux structures quaternioniques Kähler Q^+, Q^- sur une $4n$-variété riemannienne (M, g) et d'un isomorphisme d'algèbre $f : Q^- \longrightarrow Q^+$. On peut alors définir la structure presque quaternionique hermitienne généralisée $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}(\mathbb{T}M)$ dont l'écriture dans $\mathbb{T}M = C^+ \oplus C^-$ est

$$\mathcal{Q}_f = \left\{ \begin{pmatrix} f(u) & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} / \, u \in Q^- \right\}.$$

Si on a bien choisi nos structures de départ et notre isomorphisme, on obtient alors une structure quaternionique Kähler généralisée sur (M, g) et une structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_f)$ intégrable.

Application 5.1. — Soit (M, g, I, J, K) une variété hyperkählérienne et $Q = \{aI + bJ + cK / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. On oriente Q en décrétant que I, J, K est directe. Soit f n'importe quelle isométrie directe de Q, la proposition 4.2 nous assure que $\mathcal{Q}_f$ est une structure quaternionique Kähler généralisée sur (M, g) et on a automatiquement l'intégrabilité de la structure complexe $\mathbb{J}$ par les théorèmes 4.3 et 4.4. C'est une généralisation de l'exemple 2.14. En particulier on peut voir l'exemple 2.14 comme une déformation de la structure canonique et la terminologie structure quaternionique Kähler généralisée « tordue » prend tout son sens.

Application 5.2. — Plus généralement étant donnée (M, g, Q) une variété quaternionique Kähler munit d'une structure complexe kählérienne $I \in Q$, considérons $f_\theta : Q \longrightarrow Q$ la rotation d'angle θ autour de l'axe $(-I, I)$.

LEMME 5.3. — *La distribution $\mathcal{Q}_{f_\theta}$ est une structure quaternionique Kähler généralisée sur (M, g).*

Démonstration. — Il suffit là encore d'utiliser la proposition 4.2. Soit (I, J, K) une structure presque hypercomplexe qui engendre localement Q.

Comme I est kählérienne, il existe une 1-forme a sur M telle que $\begin{cases} \nabla I = 0 \\ \nabla J = aK \\ \nabla K = -aJ \end{cases}$ et on a bien $\nabla f_\theta(u) = f_\theta(\nabla u)$ pour tout $u \in Q$. □

Ainsi, si M est une surface d'Enriques ou une surface hyperelliptique [3] alors le théorème 4.4 nous assure que la structure $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_{f_\theta})$ est intégrable. On a construit une famille de déformation de structures complexes généralisées sur la variété $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_f) \simeq Z(\bigwedge^+)$ dont les types valent :

$$\begin{array}{lcl} a) & 2n+1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \\ b) & \begin{cases} 2n+1 & \text{aux points } (m, \mathcal{J}_{\pm I}) \\ 1 & \text{partout ailleurs} \end{cases} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{array}$$

Pour donner d'autres exemples, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 5.4. — *Soient M est une 4-variété parallélisable, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ une base orthonormée de champs de vecteurs et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita :*

$$\nabla_{\theta_i}\theta_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \theta_k.$$

On conserve la notation de la partie 4.3, où la base $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de TM définit une base $(I^\pm, J^\pm, K^\pm)$ de $\bigwedge^\pm$. Pour tout i, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_i} I^+ &= (\Gamma_{i1}^4 + \Gamma_{i2}^3)J^+ + (-\Gamma_{i1}^3 + \Gamma_{i2}^4)K^+, \\ \nabla_{\theta_i} J^+ &= (\Gamma_{i3}^2 - \Gamma_{i1}^4)I^+ + (\Gamma_{i3}^4 + \Gamma_{i1}^2)K^+, \\ \nabla_{\theta_i} K^+ &= (\Gamma_{i4}^2 + \Gamma_{i1}^3)I^+ + (\Gamma_{i4}^3 - \Gamma_{i1}^2)J^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_i} I^- &= (-\Gamma_{i1}^4 + \Gamma_{i2}^3)J^- + (-\Gamma_{i1}^3 - \Gamma_{i2}^4)K^-, \\ \nabla_{\theta_i} J^- &= (\Gamma_{i3}^2 + \Gamma_{i1}^4)I^- + (-\Gamma_{i3}^4 + \Gamma_{i1}^2)K^-, \\ \nabla_{\theta_i} K^- &= (-\Gamma_{i4}^2 + \Gamma_{i1}^3)I^- + (-\Gamma_{i4}^3 - \Gamma_{i1}^2)J^-. \end{aligned}$$

Démonstration. — Par définition on a :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\theta_i} I^+)\theta_1 &= \nabla_{\theta_i}(I^+\theta_1) - I^+\nabla_{\theta_i}\theta_1 \\ &= \nabla_{\theta_i}\theta_2 - I^+(\Gamma_{i1}^k\theta_k) \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_{i2}^1 \\ \Gamma_{i2}^2 \\ \Gamma_{i2}^3 \\ \Gamma_{i2}^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\Gamma_{i1}^2 \\ \Gamma_{i1}^1 \\ -\Gamma_{i1}^4 \\ \Gamma_{i1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_{i2}^3 + \Gamma_{i1}^4 \\ \Gamma_{i2}^4 - \Gamma_{i1}^3 \end{bmatrix} \\ \iff \nabla_{\theta_i} I^+ &= (\Gamma_{i2}^3 + \Gamma_{i1}^4)J^+ + (\Gamma_{i2}^4 - \Gamma_{i1}^3)K^+. \end{aligned}$$

Les autres expressions se démontrent de la même manière. □

Application 5.5. — Les surfaces hyperelliptiques sont parallélisables [10], on se fixe une métrique riemannienne g et une base orthonormée $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. On peut alors définir la structure presque quaternionique généralisée sur (M, g) telle que $Q^{\pm} = \bigwedge^{\pm}$ et associée à l'isomorphisme f_θ dont la matrice dans les bases (I^-, J^-, K^-) et (I^+, J^+, K^+) est $f_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Lemme 5.6. — *Pour toutes surfaces hyperelliptiques, on peut choisir une métrique g et une base orthonormée $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de sorte que, quel que soit θ, la distribution $\mathcal{Q}_{f_\theta}$ soit une structure quaternionique Kähler généralisée. De plus, la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur son espace des twisteurs généralisées $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_{f_\theta})$ est intégrable, son type est constant égale à deux.*

Démonstration. — Commençons par rappeler la classification des surfaces hyperelliptiques ([3, Chap.V.5]). Pour cela, notons I_0 la structure complexe canonique sur $\mathbb{R}^2$ qui permet d'identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{T}_1$ le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et $\mathbb{T}_2$ le tore $\mathbb{C}/\Gamma$, où Γ est un réseau de $\mathbb{C}$. On note z_1 et z_2 les coordonnées complexes respectivement sur $\mathbb{T}_1$ et sur $\mathbb{T}_2$. À difféomorphisme près il y a sept types de surface hyperelliptique. Dans tous les cas, c'est le quotient de $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ par un des groupes d'automorphismes G suivants :

Type	Γ	G	Action de G sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$
1	$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2)$
2	$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2) \\ g_2(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } 2e_1 = 0 \end{cases}$
3	$\mathbb{Z}+j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2)$
4	$\mathbb{Z}+j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2) \\ g_2(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{i}{3}, z_2 + e_1) \text{ avec } je_1 = e_1 \end{cases}$
5	$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2)$
6	$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2) \\ g_2(z_1,z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } ie_1 = e_1 \end{cases}$
7	$\mathbb{Z}+j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$g_1(z_1,z_2) = (z_1 - \frac{1}{6}, -jz_2)$

Quel que soit le type de la surface hyperelliptique M, la métrique canonique sur $\mathbb{C}^2$ descend en une métrique riemannienne g sur M. Nous allons maintenant construire une base orthonormée de champs de vecteurs. Le premier tore $\mathbb{T}_1$ est le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Le deuxième tore est le quotient $\mathbb{T}_2 = \mathbb{C}/\Gamma$. On note ici (e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ et R_θ la rotation d'angle θ dans le plan $\mathbb{C} \simeq Vect(e_3, e_4)$ orienté par $e_3 \wedge e_4$. On définit alors sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ les quatre champs de vecteurs :

$$\begin{cases} \theta_1(z_1, z_2) = R_{2\pi\, Re\, z_1}(e_3) \\ \theta_2(z_1, z_2) = R_{2\pi\, Re\, z_1}(e_4) \\ \theta_3(z_1, z_2) = e_1 \\ \theta_4(z_1, z_2) = e_2 \end{cases}$$

Ces champs passent naturellement au quotient en quatre champs sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$, quelque soit le réseau Γ définissant $\mathbb{T}_2$. De plus, quelque soit le type de la surface hyperelliptique, ces champs passent au quotient sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2/G$. On a ainsi construit une base de champs de vecteurs pour chaque surface hyperelliptique. Quel que soit le type de la surface hyperelliptique, les structures complexes kähleriennes $I^\pm = I_0 \oplus \pm I_0$ sur $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ passent au quotient. Les structures $I^\pm$ sont donc kähleriennes et comme $\nabla_{\theta_i}\theta_4 = 0 = \nabla_{\theta_i}\theta_3$, le lemme 5.4 donne :

$$\begin{cases} \nabla_{\theta_i} I^+ = 0 \\ \nabla_{\theta_i} J^+ = \Gamma_{i1}^2 K^+ \\ \nabla_{\theta_i} K^+ = -\Gamma_{i1}^2 J^+ \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla_{\theta_i} I^- = 0 \\ \nabla_{\theta_i} J^- = \Gamma_{i1}^2 K^- \\ \nabla_{\theta_i} K^- = -\Gamma_{i1}^2 J^- \end{cases}$$

La proposition 4.2 et le théorème 4.5 nous assure alors que $\mathcal{Q}_{f_\theta}$ et $\mathbb{J}$ sont intégrables pour tout θ. $\square$

Application 5.7. — Considérons ici une variété localement conformément plate M obtenue par produit de $\mathbb{S}^1$ avec une surface de dimension 3 à courbure sectionnelle constante non nulle, c'est-à-dire de la forme $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ ou $\Sigma \times \mathbb{S}^1$, avec Σ une 3-variété hyperbolique. Soit $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ une base orthonormée globale de $\mathbb{S}^3$ ou de Σ et θ_4 un champ de vecteurs unitaires sur $\mathbb{S}^1$. Comme dans la partie 4.3, on note encore $(I^\pm, J^\pm, K^\pm)$ la base de $\bigwedge^\pm$ associé à la base $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ et on considère $\mathcal{Q}_f$ la distribution définie par $Q^\pm = \bigwedge^\pm$ et $f(aI^- + bJ^- + cK^-) = aI^+ + bJ^+ + cK^+$. Comme $\Gamma_{i4}^j = 0$ pour tout i, j, le lemme 5.4 et la proposition 4.2 nous assure que $\mathcal{Q}_f$ est une structure quaternionique Kähler généralisée et le théorème 4.5 nous assure l'intégrabilité de la structure complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. Son type est constant égale à 2.

Application 5.8. — Le tore plat $\mathbb{T}^4$ admet deux structures hyperkählériennes : $\bigwedge^+$ et $\bigwedge^-$. Le tore plat $\mathbb{T}^8$, produit de deux tores $\mathbb{T}^4$, admet donc quatre structures hyperkählériennes produits différentes. Soient Q^+ et Q^- deux telles structures et f n'importe quel isomorphisme entre Q^- et Q^+. La distribution $\mathcal{Q}_f$ est alors une structure quaternionique Kähler généralisée et la structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_f)$ est intégrable.

Remarque. — Dans ces trois derniers exemples, on a construit une structure complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$. Mais cette variété admet également deux structures complexes différentes : celle donnée par $Z(Q^+)$ et celle donnée par $Z(Q^-)$. Cela nous fournit donc des exemples de variétés bihermitiennes qui sont de plus complexes généralisées.

6. L'espace des twisteurs est-il Kähler généralisé ?

Dans cette partie on considère (M, g, Q) une $4n$-variété quaternionique Kähler avec $n > 1$. On note $\widetilde{g}$ la métrique riemannienne sur $Z(Q)$ telle que :

(1) les distributions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ soient orthogonales,
(2) $\pi : \left(Z(Q), \widetilde{g}\right) \longrightarrow (M, g)$ soit une submersion riemannienne,
(3) les fibres soient munit de la métrique ronde de volume 4π.

Lorsque la variété M est à courbure de Ricci positive, son espace des twisteurs est kählérien :

Théorème 6.1 ([13, 23]). — *Soit $n > 1$ et (M, g, Q) une $4n$-variété quaternionique Kähler de courbure scalaire s. La variété $\left(Z(Q), \widetilde{g}, \mathbb{J}\right)$ est kählérienne si et seulement si $s = n(n+2)$.*

Étant donnée une variété $(M, g, \mathcal{Q})$ quaternionique Kähler généralisée, on note $\widetilde{G}$ l'endomorphisme de $\mathbb{T}\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ associée à la métrique riemannienne $\widetilde{g}$ et $\widetilde{C}^{\pm}$ le sous-espace propre de $\widetilde{G}$ associé à la valeur propre ± 1. La proposition 4.9 nous amène à se demander :

Question. — *Dans le cas où $s = 0$, l'espace des twisteurs $\left(Z(\mathcal{Q}), \mathbb{J}, \widetilde{G}\right)$ peut-il être Kähler généralisé ?*

Définition 6.2 ([15]). — *La variété $\left(Z(\mathcal{Q}), \widetilde{G}, \mathbb{J}\right)$ est dite Kähler généralisée s'il existe une 2-forme B telle que les structures presque complexes généralisées $\mathbb{J}$ et $\widetilde{G}\mathbb{J}$ soient intégrables à e^B conjugaison près.*

Notons $\mathbb{J}^{\pm}$ la structure presque complexe sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ induite par $\mathbb{J}$ via l'identification $\widetilde{C}^{\pm} \simeq T\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ et $\mathbb{W}^{\pm} = \widetilde{g}(\mathbb{J}^{\pm}.,.)$ la forme de Kähler associée. Dans sa thèse Gualtieri [15] (propostion 6.17) donne une caractérisation des variétés Kähler généralisées en fonction des opérateurs $\mathbb{J}^{\pm}$ et $\mathbb{W}^{\pm}$.

Proposition 6.3 ([15]). — *La variété* $\left(Z(\mathcal{Q}), \widetilde{G}, \mathbb{J}\right)$ *est Kähler généralisée si et seulement si il existe une 2-forme* B *telle que :*

(1) *les structures presque complexes* $\mathbb{J}^{\pm}$ *sont intégrables, et*
(2) $-\mathbb{J}^{-}d\mathbb{W}^{-} = \mathbb{J}^{+}d\mathbb{W}^{+} = dB$.

Une variété quaternionique Kähler à courbure scalaire nulle est localement hyperkählérienne. On supposera donc que la variété (M, g) est munit d'une structure hyperkählérienne $Q = Vect(I, J, K)$ et on identifiera $\mathbb{S}^2$ avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via la projection stéréographique :

$$\begin{array}{ccc} \{aI + bJ + cK/(a,b,c) \in \mathbb{S}^2\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ I & \longmapsto & \infty \\ J & \longmapsto & 1 \\ K & \longmapsto & i \end{array}$$

L'application $\lambda\,\mathrm{Id} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se prolonge en un isomorphisme d'algèbres $f : Q \longrightarrow Q$. La proposition 4.2 nous assure que le triplet (Q, Q, f) définit une structure quaternionique Kähler généralisée sur (M, g). Nous la noterons $\mathcal{Q}_\lambda$. Les structures presque complexes $\mathbb{J}^{\pm}$ étant intégrables [11], on a ici un bon candidat pour espérer que $\left(\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_\lambda), \widetilde{G}, \mathbb{J}\right)$ soit Kähler généralisée.

Proposition 6.4. — *La structure presque Kähler généralisée sur l'espace des twisteurs* $\left(\mathcal{Z}(\mathcal{Q}_\lambda), \mathbb{J}, \widetilde{G}\mathbb{J}\right)$ *associée à une variété hyperkählérienne* (M, g, I, J, K) *n'est jamais intégrable.*

Démonstration. — On note $\zeta \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une coordonnée sur la fibre. En un point $(m, \zeta) \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ les structures presque complexes $\mathbb{J}^{\pm}$ se décomposent sur $TM \oplus T\mathbb{C}P^1$:

$$\mathbb{J}^{+}_{(m,\zeta)} = \left(\frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} I_m + \frac{\zeta + \overline{\zeta}}{|\zeta|^2 + 1} J_m - \frac{i(\zeta - \overline{\zeta})}{|\zeta|^2 + 1} K_m, i\right),$$
$$\mathbb{J}^{-}_{(m,\zeta)} = \mathbb{J}^{+}_{(m,\lambda\zeta)}.$$

Notons w_I, w_J, w_K les formes de Kähler associées aux structures complexes I, J, K et $w_{\mathbb{C}P^1}$ la forme de Kähler sur $\mathbb{C}P^1$. Par construction de la métrique $\widetilde{g}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ on a :

$$\mathbb{W}^{+}_{(m,\zeta)} = \left(\frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} w_I + \frac{\zeta + \overline{\zeta}}{|\zeta|^2 + 1} w_J - \frac{i(\zeta - \overline{\zeta})}{|\zeta|^2 + 1} w_K, w_{\mathbb{C}P^1}\right),$$
$$\mathbb{W}^{-}_{(m,\zeta)} = \mathbb{W}^{+}_{(m,\lambda\zeta)}.$$

Les formes $w_I, w_J, w_K, w_{\mathbb{C}P^1}$ étant fermées, on a :

$$\begin{aligned} d\mathbb{W}^+_{(m,\zeta)} &= \frac{1}{(|\zeta|^2+1)^2}\Big(2\bar{\zeta} w_I + (1-\bar{\zeta}^2) w_J - i(1+\bar{\zeta}^2) w_J\Big) \wedge d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{(|\zeta|^2+1)^2}\Big(2\zeta w_I + (1-\zeta^2) w_J + i(1+\zeta^2) w_K\Big) \wedge d\bar{\zeta}, \\ d\mathbb{W}^-_{(m,\zeta)} &= \lambda d\mathbb{W}^+_{(m,\lambda\zeta)}. \end{aligned}$$

Un petit calcul permet alors facilement de voir que

$$-\mathbb{J}^- d\mathbb{W}^- \neq \mathbb{J}^+ d\mathbb{W}^+, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^\star. \qquad \square$$

Bibliographie

[1] D. V. Alekseevskij, « Riemannian spaces with exceptional holonomy groups », *Funkts. Anal. Prilozh.* **2** (1968), n° 2, p. 1-10.

[2] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin & I. M. Singer, « Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry », *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* **362** (1978), p. 425-461.

[3] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters & A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd enlarged éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Folge 3, vol. 4, Springer, 2004, xii+436 pages.

[4] M. Berger, « Remarques sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes », *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A* **262** (1966), p. 1316-1318.

[5] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Folge 3, vol. 10, Springer, 1987, xii+510 pages.

[6] A. Bredthauer, « Generalized Hyperkähler geometry and supersymmetry », *Nucl. Phys. B* **773** (2007), p. 172-183.

[7] T. J. Courant, « Dirac manifolds », *Trans. Am. Math. Soc.* **319** (1990), n° 2, p. 631-661.

[8] J. Davidov & O. Mushkarov, « Twistor spaces of generalized complex structures », *J. Geom. Phys.* **56** (2006), n° 9, p. 1623-1636.

[9] ———, « Twistorial construction of generalized Kähler manifolds », *J. Geom. Phys.* **57** (2007), n° 3, p. 889-901.

[10] G. Deschamps, « Espaces twistoriels et structures complexes non standards », *Publ. Mat., Barc.* **52** (2008), n° 2, p. 435-457.

[11] ———, « Compatible complex structures on twistor space », *Ann. Inst. Fourier* **61** (2011), n° 6, p. 2219-2248.

[12] ———, « Espace des twisteurs des structures complexes généralisées », *Math. Z.* **279** (2015), n° 3-4, p. 703-721.

[13] G. Deschamps, N. Le Du & C. Mourougane, « Hessian of the metric form on twistor spaces », `https://arxiv.org/abs/1202.0183v1`, 2012.

[14] R. Glover & J. Sawon, « Generalized twistor spaces for hyperkähler manifolds », *J. Lond. Math. Soc.* **91** (2015), n° 2, p. 321-342.

[15] M. Gualtieri, « Generalized complex geometry », Thèse, St John's college, Oxford University (UK), 2003, `https://arxiv.org/abs/math/0401221`, 107 pages.

[16] ———, « Branes on Poisson varieties », in *The many facets of geometry. A tribute to Nigel Hitchin.*, Oxford University Press, 2010, p. 368-394.

[17] N. J. Hitchin, « Compact four-dimensional Einstein manifolds », *J. Differ. Geom.* **9** (1974), p. 435-441.

[18] ———, « Generalized Calabi–Yau manifolds », *Q. J. Math.* **54** (2003), n^o 3, p. 281-308.

[19] A. Newlander & L. Nirenberg, « Complex analytic coordinates in almost complex manifolds », *Ann. Math.* **65** (1957), p. 391-404.

[20] B. O'Neill, « The fundamental equations of a submersion », *Mich. Math. J.* **13** (1966), p. 459-469.

[21] R. Pantilie, « Generalized quaternionic manifolds », *Ann. Mat. Pura Appl.* **193** (2014), n^o 3, p. 633-641.

[22] R. Penrose, « Nonlinear gravitons and curved twistor theory », *Gen. Relativ. Gravitation* **7** (1976), p. 31-52.

[23] S. Salamon, « Quaternionic Kähler manifolds », *Invent. Math.* **67** (1982), n^o 1, p. 143-171.

[24] ———, « Quaternionic manifolds », in *Metriche invarianti, applicazioni armoniche e questioni connesse, Convegno 26-29 Maggio 1981.*, Symposia Mathematica, vol. 26, Academic Press, 1982, p. 139-151.

[25] I. M. Singer & J. A. Thorpe, « The curvature of 4-dimensional Einstein spaces », in *Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira*, Princeton University Press, 1969, p. 355-365.