ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

BERNARD MALGRANGE

Sur le problème d'équivalence de Cartan

Tome XXVI, nº 5 (2017), p. 1087-1136.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2017_6_26_5_1087_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVI, n° 5, 2017
pp. 1087-1136

Sur le problème d'équivalence de Cartan [(*)]

Bernard Malgrange [(1)]

Résumé. — Dans son article classique sur le problème d'équivalence, Cartan donne une méthode pour trouver les invariants d'une structure différentielle. Sa méthode repose sur un procédé de prolongement des équations qui fixent cette structure. Il affirme sans démonstration qu'en prolongeant ces équations, on finit par obtenir un système involutif. Le but principal de cet article est de justifier cette affirmation, et plus précisément, de donner des bornes pour l'involutivité qui sont uniformes, *i.e.* indépendantes de la structure particulière considérée.

Abstract. — In his classical paper on the equivalence problem, Cartan gives a method to find the invariants of a differential structure. His method is based on a procedure of prolongation of the equations fixing this structure. He states without proof that, by prolongation, these equations become eventually involutive. The main purpose of this paper is to prove this statement, and, more precisely, to give bounds for the involutivity which are uniform, i.e. independent of the special structure in consideration.

Introduction

Dans [9], E. Cartan donne une méthode d'étude du « problème d'équivalence ». En gros, étant donné deux structures différentielles « de même nature » sur des variétés $\mathbb{C}$-algébrique de même dimension, il s'agit de reconnaître si elles sont localement équivalentes, *i.e.* s'il existe des difféomorphismes locaux (formels ou analytiques) envoyant une structure sur l'autre. Un exemple typique est celui des structures riemanniennes (complexes) : dans ce cas, les conditions font intervenir la courbure riemannienne et ses dérivées covariantes.

(*) Reçu le 8 avril 2016, accepté le 14 juin 2016.

(1) Institut Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France — bernard.malgrange@univ-grenoble-alpes.fr

Article proposé par Vincent Guedj.

Cette méthode a été réexpliquée et utilisée par différents auteurs. Voir notamment [15, 24, 35, 36]. Il me semble cependant que l'état présent du sujet souffre de deux défauts.

Le premier est celui-ci : chez ces auteurs, la méthode est exposée dans un cas un peu particulier, qui fait intervenir des hypothèses de transitivité. On peut considérer qu'il s'agit d'un défaut mineur, Cartan examinant le cas général. Il reste qu'il serait souhaitable d'avoir un exposé systématique dans un langage moderne, qui couvre la totalité du cas examiné par Cartan.

Un second défaut, plus grave, est le suivant : la méthode de Cartan consiste essentiellement à prolonger les équations qui fixent les structures différentielles données. Il affirme qu'en prolongeant suffisamment ces équations, on obtient (au moins génériquement) un système involutif, auquel cas aucun nouveau prolongement n'est nécessaire ; le problème d'équivalence se ramène alors à un problème algébrique (pas forcément trivial, mais ceci est une autre histoire).

Cette assertion est bien vérifiée dans les exemples connus mais, pour autant que je sache, il n'en existe dans la littérature aucune démonstration. Le but principal de cet article est de combler cette lacune.

Notons qu'il est assez facile de démontrer qu'un pseudogroupe donné, par exemple le pseudogroupe fixant une structure différentielle donnée est génériquement involutif en degré assez grand. Un tel résultat est démontré dans [29], en utilisant les résultats sur l'involutivité générique de [31].

Mais ce résultat est insuffisant ici : il nous faut une borne sur l'involutivité, non d'un pseudogroupe, mais d'une famille. Par exemple, G étant un sous-groupe algébrique fixé de $Gl(n)$, on veut comparer les différentes G-structures sur des variétés de dimension n (ou, au minimum, sur une variété de dimension n fixée), le but étant de décrire la « relation d'équivalence » donnée par l'équivalence de ces G-structures. Pour cela, il faut savoir que cette relation ne dépend que du prolongement d'un certain ordre qui dépend seulement de G et de n (ou, au moins, de X). Autrement dit, il faut des *bornes uniformes* pour l'involutivité.

Dans la suite, on obtient une telle borne. La méthode repose sur une double traduction : une première traduction passe des équations écrites à la Cartan en terme de formes différentielles à des équations de pseudogroupes écrites en termes de jets. Une seconde traduction, qui passe des pseudogroupes à leurs algèbres de Lie, nous ramène alors à un problème de bornes sur des D-modules, ou, si l'on préfère, à un problème de bornes en géométrie algébrique non commutative.

Les résultats correspondants en géométrie algébrique sont bien connus par les travaux d'Hermann [22] et de ses successeurs. Ils ont été récemment étendus au cas qui nous intéresse par Chistov et Grigoriev [13] d'une part, Aschenbrenner et Leykin [2] d'autre part. Comme dans le cas commutatif, ces auteurs obtiennent des bornes en « double exponentielle », ce qui est essentiellement optimal.

Le plan de l'article est le suivant :

Dans la section 1, je rappelle les principales propriétés des espaces de jets définissant des pseudogroupes de Lie algébriques. Les propriétés se trouvent essentiellement [29] et [32] (certaines démonstrations incomplètes de ces articles sont reprises ici). Puis, j'énonce les résultats sur l'involutivité et montre comment ils se ramènent à l'algèbre de Lie.

Dans la section 2, je donne la traduction dans le langage de Cartan, ce qui est l'occasion d'un exposé systématique de sa méthode d'équivalence.

Dans la section 3.5 je donne un énoncé général d'existence de bornes uniformes. Ce résultat, conséquence facile du théorème de Ritt–Raudenbush, a l'inconvénient de ne pas donner de bornes effectives.

Dans le reste de la section 3, je rappelle des résultats connus sur les bornes effectives ; en particulier, ceux de Chistov–Grigoriev et Aschenbrenner–Leykin (*loc. cit.*) donnent des bornes (dépendant de X) dans l'anneau des opérateurs différentiels à valeurs dans $\mathbb{C}(X)$, l'espace des fonctions rationnelles sur X ; ceci suffit pour le problème d'équivalence de Cartan que j'ai en vue.

Cet article est incomplet sur plusieurs points. D'une part, les majorations dont il vient d'être question mériteraient d'être précisées, voire améliorées. D'autre part, dans la section 2.6, je n'aborde qu'assez superficiellement les conséquences de l'existence de ces bornes pour le problème d'équivalence. Ces questions mériteraient d'être reprises et j'espère qu'elles trouveront des amateurs.

Je signale aussi que le problème d'équivalence a aussi été étudié par T. Morimoto [34]. Sa méthode est assez différente de celle de Cartan, et les deux méthodes mériteraient d'etre comparées.

Au départ, en essayant de généraliser la méthode d'Hermann, j'avais obtenu des majorations beaucoup moins bonnes que celles des auteurs mentionnés ci-dessus. Je remercie très vivement F. Castro et M. Singer de m'avoir signalé leurs travaux. Je remercie aussi A. Guttin-Lombard pour la saisie de cet article.

1. Groupoïdes de jets et leurs prolongements

1.1. Groupoïdes de jets

Soit X une variété algébrique non singulière sur $\mathbb{C}$ (*i.e.* un schéma lisse séparé de type fini sur $\mathbb{C}$). Sauf avis contraire, X sera supposée irréductible.

Pour k entier $\geqslant 0$, soit $J_k^*(X)$ l'espace des jets d'ordre k d'application inversible $X \to X$. On le munit des deux projections source et but $J_k^*(X) \xrightarrow{(s,t)} X \times X$.

La donnée de l'identité $\mathrm{Id} \subset J_k^*(X)$, de l'inverse $f \mapsto f^{-1}$ et de la composition $(J_k^*, t) \times_X (J_k^*, s)$ munit (J_k^*, s, t) d'une structure de groupoïde au sens des schémas. Un sous-schéma fermé $Z_k \subset J_k^*$ sera dit « *sous-groupoïde strict* » de J_k^* s'il est stable par l'inverse et la composition. On vérifie qu'il est équivalent de se donner un sous-schéma fermé $Z_k \subset J_k^*$ et de demander ceci : pour tout schéma Y sur $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}(Y, Z_k)$ muni des deux applications $\mathrm{Hom}(Y, s)$ et $\mathrm{Hom}(Y, t)$ est un sous-groupoïde au sens ensembliste de $\mathrm{Hom}(Y, J_k^*)$.

La notion précédente est trop restrictive pour les applications, où il est nécessaire de restreindre X. On dira donc que Z_k, sous-schéma fermé de $J_k^*(X)$ est un « *sous-groupoïde* » de J_k^* s'il existe U, ouvert de Zariski dense de X, tel que $Z_k \mid U \times U$ soit un sous-groupoïde strict de $J_k^*(U)$.

Il sera d'autre part commode de considérer tous les faisceaux structuraux comme des faisceaux sur $X \times X$. Pour cela, on note abusivement $\mathcal{O}_{J_k^*}$ l'image directe $(s,t)_* \mathcal{O}_{J_k^*}$. Cela n'a pas d'inconvénient, car la projection (s,t) est affine. Avec cette convention, on a des inclusions $\mathcal{O}_{X \times X} = \mathcal{O}_{J_0^*} \subset \mathcal{O}_{J_1^*} \subset \cdots \subset \mathcal{O}_{J_k^*} \subset \cdots$ De même, si Z_k est un sous-schéma fermé de J_k^*, on écrit $\mathcal{O}_{Z_k}$ pour $(s,t)_* \mathcal{O}_{Z_k}$.

Pour $0 \leqslant \ell \leqslant k$, on note Z_ℓ la « *projection* » dans J_ℓ^* de Z_k ; par définition, si $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_{J_k^*}$ est le faisceau (sur $X \times X$) d'idéaux de Z_k, c'est le sous-schéma fermé de J_ℓ^* défini par $\mathfrak{I} \cap \mathcal{O}_{J_\ell^*}$.

Cela dit, soit Z_ℓ un sous-groupoïde de J_ℓ^*. Les propriétés que j'aurai à utiliser sont les suivantes :

1.1.1. Il existe U, ouvert de Zariski dense de X tel que $Z_k \mid U \times U$ soit un sous-groupoïde strict, et possède en outre les propriétés suivantes :

(a) Il est lisse.

(b) Pour $0 \leqslant \ell \leqslant k$, soit Z_ℓ la « projection » dans J_ℓ^* de Z_k. Alors les Z_ℓ sont au-dessus de $U \times U$ des groupoïdes stricts et sont lisses. De plus les projections $Z_\ell \to Z_{\ell'}$ $(0 \leqslant \ell' < \ell \leqslant k)$ sont surjectives et lisses (= submersives).

Ces propriétés sont énoncées et utilisées dans [32], leurs démonstrations étant renvoyées à [29]. Mais, en fait, ces démonstrations sont incomplètes. Je vais donc reprendre ici la question.

Je rappelle d'abord ceci ([29]). Soit R_k l'espace des repères d'ordre k de X, *i.e.* l'espace des jets d'ordre k inversibles $(\mathbb{C}^n, 0) \to X$ $(n = \dim X)$, et soit Γ_k le groupe des jets inversibles d'ordre k: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Alors R_k est un fibré principal à droite sous Γ_k.

Soient $a, b \in X(\mathbb{C})$ (dans la suite, j'écrirai X pour $X(\mathbb{C})$) ; soit f (resp. g) un point de R_k de but a (resp. b). L'application λ: $(f, g) \to g \circ f^{-1}$ a pour image un élément de J_k^* et on vérifie qu'elle est un isomorphisme $R_k \times^{\Gamma_k} R_k \to J_k^*$.

Cela étant, soit Z_k un sous-groupoïde de J_k^*. En restreignant X, on peut le supposer strict. On voit alors que $\lambda^{-1} Z_k$ est une relation d'équivalence (au sens schématique) sur $R_k \times R_k$, stable par Γ_k. Réciproquement, une telle relation d'équivalence provient d'un groupoïde unique.

Pour démontrer (a), je vais utiliser les résultats de [29, §1] (dans cet article, on travaille dans le cas analytique ; le cas algébrique considéré ici s'en déduit). L'algèbre de Lie de Z_k, *i.e.* le fibré normal à l'identité dans Z_k, notée $\operatorname{Lie} Z_k$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau cohérent ; donc il existe U, ouvert de Zariski dense de X, tel que $\operatorname{Lie} Z_k \mid U$ soit localement facteur direct dans $\operatorname{Lie} J_k^* = J_k(T)$ (T, le fibré tangent à X). Soit L_k son image réciproque par l'application tangente à λ ; c'est le fibré normal à $\lambda^{-1} Z_k$ le long de Δ_k, diagonale de $R_k \times R_k$; il est donc localement facteur direct (*i.e.* fibré de rang localement constant) au-dessus de $V \subset R_k$, image réciproque de U. Alors, les résultats de *loc. cit.* montrent que $\lambda^{-1} Z_k$ est lisse dans $V \times V$. En repassant à Z_k, ceci donne (a).

Soit maintenant Z_k^0 le « groupe d'isotropie » de Z_k, *i.e.* l'image réciproque de la diagonale $\Delta \subset X \times X$. C'est un fibré en groupes sur X, et aussi un sous-groupoïde de Z_k. En raisonnant comme ci-dessus, on voit ceci : quitte à restreindre X à un U dense, $Z_k^0 \mid U$ est lisse et sa projection sur U est lisse et surjective.

Maintenant, pour démontrer (b), on peut déjà supposer que (a) est satisfait au-dessus de U. Alors, Z_k étant lisse et donc réduit, on voit (en regardant les idéaux) que, pour $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$, Z_ℓ est réduit. En utilisant le fait que la projection (ensembliste) de Z_k dans Z_ℓ est constructible et le théorème de Sard, on trouve qu'il existe un ouvert dense W de Z_ℓ qui est lisse et sur lequel la projection $Z_k \to Z_\ell$ est surjective et lisse. En utilisant l'action (à droite et à gauche) de Z_k^0 sur Z_k et Z_ℓ, on voit que l'on peut prendre pour W l'image réciproque de $V \times V$, V ouvert dense de X.

Reste à voir que Z_ℓ est un groupoïde. Le seul point non trivial concerne la composition. Quitte à restreindre V on peut supposer que les projections « source » et « but » $Z_\ell \to V$ sont lisses. Alors $(Z_\ell, t) \times_V (Z_\ell, s)$ est lisse. Pour démontrer que son image dans J_ℓ^* est dans Z_ℓ, il suffit de le démontrer ensemblistement. Ceci résulte de la surjectivité $Z_k \to Z_\ell$, et du fait que Z_k est un groupoïde. D'où (b).

Le même type d'arguments montre aussi ceci : quitte à restreindre X à U, ouvert dense, Z_ℓ^0 est lisse et la projection $\overline{Z}_k \to \overline{Z}_\ell$ lisse et surjective.

1.1.2. Prenons en particulier $\ell = 0$. Alors, en restriction à un $U \times U$ convenable, Z_0 est une relation d'équivalence. Un résultat de Gabriel [14] nous dit alors ceci : quitte à restreindre U, on peut supposer qu'il existe une variété affine lisse S et une surjection lisse $M : U \to S$ telle qu'on ait $Z_0 = U \times_S U$. En particulier, deux points de U sont dans la même classe d'équivalence si et seulement s'ils ont même image dans S. Ce résultat sera constamment utilisé dans la suite.

1.2. Prolongement

Je rappelle sa définition, en me limitant au cas qui m'intéresse, *i.e.* les applications et les jets d'application de X dans X. Comme la définition est locale, on peut supposer qu'on a deux cartes de X, soient U et V qui sont des ouverts étales au-dessus de deux ouverts affines $\overline{U}$ et $\overline{V}$ de $\mathbb{C}^n$. On note x un point de U, et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de sa projection sur $\overline{U}$, et de même avec y, $(y_1, \ldots, y_n)$ et V.

Avec ces notations usuelles dans les espaces de jets, les coordonnées d'un point de $J_k^*(U, V)$, espace des jets inversibles d'ordre k de U dans V sont x, y et les y_i^α, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$, avec, pour $k \geqslant 1$ la condition d'inversibilité $\delta = \det(y_j^{\varepsilon_i}) \neq 0$, $\varepsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Avec ces notations les « dérivées généralisées » $D_i \colon \mathcal{O}_{J_k} \to \mathcal{O}_{J_{k+1}}$ sont les suivantes :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_\alpha y_j^{\alpha+\varepsilon_i} \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} .$$

En particulier, on a

$$D_i y_j^\alpha = y_j^{\alpha+\varepsilon_i} .$$

Soit alors Z_k un sous-schéma fermé de $J_k^*(X)$ et soit $\mathfrak{I}_k$ le faisceau d'idéaux (sur $X \times X$) qu'il définit. On définit localement sur $U \times V$ le prolongement $\mathrm{pr}_1 \mathfrak{I}_k \subset \mathcal{O}_{J_{k+1}^*}$ comme l'idéal engendré par $\mathfrak{I}_k$ et les $D_i \mathfrak{I}_k$. On note $\mathrm{pr}_1 Z_k$ le sous-schéma fermé de J_{k+1}^* correspondant. En itérant, on définit le prolongement d'ordre ℓ: $\mathrm{pr}_\ell Z_k \subset Z_{k+\ell}$.

On vérifie que ces constructions ne dépendent pas des cartes et des coordonnées choisies. Pour une définition « intrinsèque » des jets dans le cas algébrique et la vérification de l'assertion précédente, je renvoie par exemple à l'introduction de [32].

Le résultat est alors le suivant :

Théorème 1.1. — *Soit Z_k un sous-groupoïde strict de $J_k^*(X)$. Alors $\mathrm{pr}_1 Z_k$ est un sous-groupoïde strict de $J_{k+1}^*(X)$.*

Ce théorème est démontré dans [29, proposition 2.3.3] (on fera attention que la terminologie est différente : on appelle dans *loc. cit.* « sous-groupoïde » ce qui est appelé ici « sous-groupoïde strict »).

La démonstration de ce résultat est un peu longue et délicate. Pour les applications, il suffirait de remplacer « sous-groupoïde strict » par « groupoïde ». Il est alors possible de donner une démonstration plus simple utilisant les propriétés génériques des groupoïdes rappelées au §1.1. Voir par exemple [27, 28].

1.3. Prolongement et involutivité

1.3.1. Je rappelle d'abord la notion d'involutivité ; pour cette notion, voir notamment [40] et [17]. Je suivrai ici la présentation de [31], à ceci près qu'on se place ici dans le cadre algébrique.

Soient X et Y deux variétés algébriques lisses sur $\mathbb{C}$. Pour $k \geqslant 0$, soit $J_k(X,Y)$ l'espace des jets d'ordre k d'application de X dans Y. Il suffira de traiter le cas où X (resp. Y) est étale au-dessus d'un ouvert $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$)de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^p$). Notons x un point de X et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de sa projection sur $\overline{X}$ et de même avec y, $(y_1, \ldots, y_p)$ et Y.

Alors un point de $J_k(X,Y)$ a pour coordonnées x, y et (y_j^α), $1 \leqslant j \leqslant p$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$ (cf. notations du §1.2). Comme au §1.2, on notera $\mathcal{O}_{J_k(X,Y)}$ ce qu'on devrait noter $(s,t)_* \mathcal{O}_{J_k(X,Y)}$, s (resp. t) étant la projection sur X (resp. Y).

Soit Z_k un sous-schéma fermé de $J_k(X,Y)$, défini par le faisceau (sur $X \times Y$) d'idéaux $\mathfrak{I}_k$ de $J_k(X,Y)$. Le prolongement $\mathrm{pr}_1 Z_k \subset J_{k+1}(X,Y)$ est défini comme au §1.2, avec les dérivations D_i.

Pour $f \in \mathcal{O}_{J_k(X,Y)}$, on appelle « symbole de f » l'expression

$$\delta f = \sum_{j,|\alpha|=k} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} \mathrm{d}y_j^\alpha \,,$$

autrement dit la différentielle de f relative à la projection sur $J_{k-1}(X,Y)$. De la définition des D_i, on déduit qu'on a $\delta D_i f = \xi_i \delta f$, avec $\xi_i \delta y_j^\alpha = \delta y_j^{\alpha+\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$. Comme les ξ_i commutent, on pourra écrire $\delta y_j^\alpha = \xi^\alpha \delta y_j$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. On a donc $\delta f \in \bigoplus_j \mathcal{O}_{J_k(X,Y)}[\xi_1,\ldots,\xi_n]_k \delta y_j$, où $[\cdots]_k$ désigne la partie homogène de degré k.

1.3.2. Soit $\mathcal{O}_{Z_k}$ le faisceau quotient $\mathcal{O}_{J_k(X,Y)}/\mathfrak{I}_k$. On pose la définition suivante :

Définition 1.2.

(i) *Le symbole d'ordre k, N_k de $\mathfrak{I}_k$ est le sous $\mathcal{O}_{Z_k}$ module cohérent de $\bigoplus_j \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]_k \delta y_j$ engendré par les classes modulo $\mathfrak{I}_k$ des δf, $f \in \mathfrak{I}_k$.*
(ii) *Le symbole de $\mathfrak{I}_k$ est le sous-module gradué N de $\mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p = \bigoplus_j \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]\delta y_j$ engendré par N_k.*
(iii) *Le module (ou système) caractéristique de Z_k est le module gradué quotient $M = \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p/N$.*

Avant de donner la définition suivante, je rappelle ceci : soit K un corps, et soit L un module gradué de type fini sur $K[\xi_1,\ldots,\xi_n]$. On note $H_{p,q}(\xi,L)$ les groupes d'homologie gradués de son complexe de Koszul. On dit que L est k-acyclique (ou « $(k-1)$-régulier », cf. [32] ou [30]) si l'on a $H_{p,q}(\xi,L) = 0$ pour $p \geqslant 0$ et $q \geqslant k$.

Définition 1.3. — *On dit que Z_k est involutif si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) *Z_k est lisse.*
(ii) *$\mathrm{pr}_1 Z_k$ est lisse et la projection $\mathrm{pr}_1 Z_k \to Z_k$ est lisse et surjective.*
(iii) *M est localement gradué-libre sur Z_k ; et, pour tout point $a \in Z_k$, $M(a)$ est k-acyclique.*

(Les conditions données ici sont surabondantes. Je renvoie à *loc. cit.* pour leur discussion.)

Je rappelle aussi le résultat suivant, qui fait le principal intérêt de cette notion [17] : si Z_k est involutif, $\mathrm{pr}_1 Z_k$ l'est aussi. Par récurrence, tous les prolongements de Z_k le seront aussi. D'où l'existence de solutions formelles au-dessus de tout point de Z_k (Théorème de Cartan–Kähler, cf. [31]).

1.3.3. Je vais maintenant appliquer ce qui précède au cas où $Y = X$, et où on se limite aux jets *inversibles*, *i.e.* $J_k^*(X)$ (ce qui vient d'être dit s'applique sans changement).

Soit Z_k un sous-schéma fermé de $J_k^*(X)$. Conformément aux définitions générales de [31], la D-variété définie par Z_k est définie ainsi : soit $\mathfrak{I}_k$ le faisceau structural de Z_k (sur $X \times X$), et soit $\overline{\mathfrak{I}}$ la réunion des $\mathrm{pr}_\ell(\mathfrak{I}_k)$ (définis par récurrence : $\mathrm{pr}_\ell = \mathrm{pr}_1 \mathrm{pr}_{\ell-1}$). Alors $\overline{\mathfrak{I}}$ est un sous-faisceau de la limite inductive (= réunion) $\mathcal{O}_J^* = \varinjlim \mathcal{O}_{J_k^*}$. Posons $\overline{\mathfrak{I}}_\ell = \overline{\mathfrak{I}} \cap \mathcal{O}_{J^*}$ $(\ell \geqslant 0)$ et soit $\overline{Z}_\ell$ le sous-schéma de J_ℓ^* correspondant. On a $\overline{Z}_k \subset Z_k$, mais en général $\overline{Z}_k \neq Z_k$.

Une autre manière de dire est la suivante : fixons un $\ell \geqslant 0$ et considérons la famille des « projections » dans J_ℓ^* des $\mathrm{pr}_m Z_k$, $\ell \leqslant m + k$. Pour $m \to \infty$, cette famille est décroissante et stationnaire ; sa limite est $\overline{Z}_\ell$.

Supposons maintenant que Z_k soit un sous-groupoïde de J_k^*. En appliquant le théorème 1.1 et 1.1.1(b), on voit par récurrence que *tous les $\overline{Z}_\ell$ sont des groupoïdes.* La collection $\overline{Z} = \{\overline{Z}_\ell\}$ est un pseudogroupe (de Lie) au sens de [29] et [32].

Dans [29], le résultat suivant est démontré.

Théorème 1.4. — *Avec les hypothèses précédentes, il existe $\ell \geqslant k$ tel que $\overline{Z}_\ell$ soit « génériquement involutif »,* i.e. *il existe U, un ouvert dense de X tel que, au-dessus de $U \times U$, $\overline{Z}_\ell$ soit involutif.*

Des propriétés rappelées ci-dessus résulte alors que, au-dessus de $U \times U$, les $\overline{Z}_{\ell+m}$ coïncident avec les $\mathrm{pr}_m \overline{Z}_\ell$ et sont involutifs. Si $\overline{Z}_\ell \mid U \times U$ est un groupoïde strict, les $\overline{Z}_{\ell+m} \mid U \times U$ le seront aussi.

Dans [29], ce résultat est établi en utilisant « l'involutivité générique » des D-variétés réduites, démontrée dans [31] (avec la même remarque que plus haut : les deux articles sont écrits dans un cadre « algébrique au-dessus d'analytique ». Le cas purement algébrique considéré ici est analogue en plus simple).

Avec les notations qui précèdent, le but essentiel de cet article est de démontrer l'existence d'une borne *uniforme* de ℓ en fonction de k et $n = \dim X$. En fait, l'énoncé précis est un peu plus fort : soit $m = k + p \geqslant \ell$ le plus petit entier tel que la « projection » dans $\mathfrak{I}_\ell$ de $\mathrm{pr}_p Z_k \subset J_m^*$ soit égale à $\overline{Z}_\ell$ (au-dessus de $U \times U$, U ouvert de Zariski dense dans X). Le théorème est le suivant :

Théorème 1.5. — *Avec les notations précédentes, m est borné par une fonction $M(k,n)$, $n = \dim X$.*

L'effectivité de M sera discutée plus loin.

1.4. Réduction à l'algèbre de Lie

1.4.1. Je donne d'abord l'énoncé qui sera établi dans la section 3. Je montrerai ensuite comment le théorème 1.5 s'en déduit.

Soit, de façon générale, K un corps de caractéristique 0, et soient $\partial_1, \ldots, \partial_n$, n dérivations sur K, commutant entre elles. On suppose qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels qu'on ait $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($= 1$ pour $i = j$, 0 autrement). On en déduit immédiatement que $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sont linéairement indépendantes. On note $D = K\langle\partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels correspondant, *i.e.* l'anneau des polynômes non commutatifs en $\partial_1, \ldots, \partial_n$, à coefficients dans K, avec les relations $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, $\partial_i a = a\partial_i + \partial_i(a)$, $a \in K$. On filtre D par le degré des opérateurs : $p \in D_k$ si, avec les notations usuelles, on peut écrire $p = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in K$. Il est classique que le gradué associé est commutatif. Alors $\operatorname{gr} D$ est l'anneau des polynômes $K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Soit $t \in \mathbb{N}$ et soit N un sous-D-module à gauche de D^t ; posons $M = D^t/N$. M et N sont munis respectivement des filtrations quotient et sous-module de D^t, notée respectivement $\{M_k\}$ et $\{N_k\}$. On écrira $\overline{M}_p$ pour $\operatorname{gr}_p M$, et $\overline{N}_p$ pour $\operatorname{gr}_p N$.

Alors, $\overline{M}$ est un $\overline{D}$-module gradué, et l'on peut considérer son complexe de Koszul $K(\xi_1, \ldots, \xi_n; \overline{M})$. Les groupes d'homologie $H_{p,q}(\overline{M})$ sont munis de deux degrés : le premier, $p \in [0, n]$ est relatif à la différentielle de Koszul ; le second, $q \geqslant 0$ est relatif au degré $\operatorname{gr}_q M$ (pour ces notations, voir par exemple [7] ou [31]).

Définition 1.6. — Soit ℓ un entier $\geqslant 1$. On dit que M est ℓ-acyclique si l'on a $H_{p,q}(\overline{M}) = 0$ pour tout p et pour $q \geqslant \ell$.

On dit souvent « ℓ-involutif ». Je n'emploie pas ici cette terminologie pour éviter la confusion avec la définition 1.3 qui fait intervenir d'autres conditions que l'acyclicité. On fera attention que cette définition ne dépend pas seulement du D-module M, mais aussi de sa présentation comme quotient de D^t.

On se donne maintenant un sous-espace vectoriel $N_k \subset D^t_k$; on note $N' = \{N'_\ell\}$ le sous D-module engendré par N_k. Pour $\ell \geqslant k+1$, on définit d'autre part par récurrence N_ℓ par $N_\ell = N_{\ell-1} + \Sigma\partial_i N_{\ell-1} \subset D^t_\ell$. On a évidemment $N_\ell \subset N'_\ell$.

Il est connu que $M' = D^t/N'$ est ℓ-acyclique pour un certain $\ell \geqslant k$ (voir par exemple [31]). Soit d'autre part $m \geqslant \ell$ le plus petit entier tel qu'on ait $N'_\ell \subset N_m \cap D^t_\ell$ (existence par le théorème de finitude de Hilbert). Le résultat est alors le suivant :

Théorème 1.7. — *m (et a fortiori ℓ) est borné par une fonction $M(k,t,n)$.*

Comme indiqué plus haut, ce résultat sera établi dans la section 3.

1.4.2. On va appliquer ce résultat à la situation suivante : soit X une variété lisse et irréductible sur $\mathbb{C}$ (qu'on remplacera si nécessaire par un ouvert dense). On peut supposer que X est un revêtement fini étale d'un ouvert $\overline{X} = \mathbb{C}^n - Y$, Y une hypersurface fermée. Notant $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\overline{X}$, on prend $K = \mathbb{C}(X)$, le corps des fonctions rationnelles de X et on pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les ∂_i forment une base du tangent T de X. On pose aussi $D = K\langle \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension p et soit $J_k(E)$ l'espace des jets d'ordre k d'application $X \to E$. Les sections rationnelles sur X de $J_k(E)$ sont en dualité sur K avec $D_k \otimes_{\mathbb{C}} E^*$, E^* le dual de E. Prenons un sous $\mathcal{O}_X$-module de $J_k(E)$ et notons M^*_k ses sections rationnelles ; on note N_k son orthogonal dans $D_k \otimes E^*$ et on pose $M_k = D_k \otimes E^*/N_k$; alors M_k est le dual sur K de M^*_k.

On définit les prolongements N_ℓ, M_ℓ comme précédemment et on note M^*_ℓ l'orthogonal de N_ℓ (= le dual de M_ℓ). On note encore $N' = \{N'_\ell\}$ le sous D-module engendré par N_k, et on définit de même $M' = \{M'_\ell\}$ et $M'^* = \{M'^*_\ell\}$.

Soient, comme plus haut, les plus petits ℓ et m tels que M'_ℓ soit involutif et qu'on ait $N'_\ell = N_m \cap (D_\ell \otimes_{\mathbb{C}} E^*)$. Alors, quitte à se restreindre à un ouvert dense $U \subset X$ et en posant $q = \ell - k$, le prolongement $\mathrm{pr}_q M^*_k$ sera libre et involutif au sens de la définition 1.3. De plus, d'après le théorème 1.7, m et ℓ seront bornés par $M(k,p,n)$, avec $p = \dim E$, $n = \dim X$.

1.4.3. Montrons que le résultat précédent entraîne le théorème 1.5. On se place dans la situation et les notations du §1.3. Z_k est un sous-groupoïde de $J^*_k(X)$; les Z_ℓ et $\overline{Z}_\ell$ ont la signification indiquée au §1.3.

On applique ceci aux algèbres de Lie des Z_ℓ et $\overline{Z}_\ell$, *i.e.* aux fibrés normaux de Z_ℓ et $\overline{Z}_\ell$ le long de l'identité. On les désigne respectivement par LZ_ℓ

et $L\overline{Z}_\ell$. On prend ici $E = T$, le fibré tangent de X et on note M_k^* les sections rationnelles sur X de LZ_k. Définissant les M_ℓ, M'_ℓ, M_ℓ^* et M'^*_ℓ comme en 1.4.2, on a le résultat suivant :

Lemme 1.8. — *Pour $\ell \geqslant k$ (resp. pour tout ℓ) M_ℓ^* (resp. M'^*_ℓ) est l'espace des sections rationnelles de LZ_ℓ (resp. $L\overline{Z}_\ell$).*

La première propriété résulte du fait que, d'un façon générale (= dans la situation $Z_\ell \subset J_\ell(X, Y)$ considérée au §1.3), la linéarisation le long d'une solution commute au prolongement (résultat facile, qu'on applique ici à la solution « identité »). La seconde résulte alors des hypothèses de régularité qui sont satisfaites génériquement.

Dans la suite, ℓ et m ont la valeur fixée à la fin de 1.4.2 (pour M_ℓ et M'_ℓ comme ci-dessus). Notons d'abord que $L\overline{Z}_\ell$ est génériquement involutif (= involutif sur un ouvert dense $U \subset X$). En effet la condition de surjectivité est satisfaite par hypothèse. Quant à l'acyclicité fibre par fibre du symbole, elle résulte de l'acyclicité générique (= des sections rationnelles).

Lemme 1.9. — *Pour la même valeur de ℓ, $\overline{Z}_\ell$ est génériquement involutif.*

La surjectivité de $\mathrm{pr}_1\overline{Z}_\ell \to \overline{Z}_\ell$ résulte des définitions. D'autre part, le long de l'identité, le symbole coïncide avec celui de $L\overline{Z}_\ell$ (évident). D'où l'acyclicité le long de l'identité. On passe de là aux autres points par l'action des sections formelles de $\overline{Z}$ (en fait $\overline{Z}_{\ell+1}$ suffit) ; voir des raisonnements voisins dans [29, lemmes I.4.3.3 et I.4.3.4]).

Pour terminer la démonstration, montrons que la « projection » de $\overline{Z}_{m+1}$ dans J_ℓ^* est égale à $\overline{Z}_\ell$. Supposant ce résultat acquis, et avec les notations des théorèmes 1.5 et 1.7, on pourra prendre $M(k, n) = M(k, n, n) + 1$.

Considérons d'abord la « projection » $\overline{Z}'_\ell$ de $\overline{Z}_m$ dans J_ℓ^* (tout ce qui suit est générique, *i.e.* vrai sur $U \times U$, U ouvert dense de X). On a $\overline{Z}'_\ell \supset \overline{Z}_\ell$, et ces espaces ont même dimensions (ils ont les mêmes algèbres de Lie). Donc $\overline{Z}_\ell$ est une réunion de composantes connexes de $\overline{Z}'_\ell$.

Soit w une composante connexe de $\overline{Z}_\ell$ qui appartient à la projection de $\overline{Z}_{\ell+1}$; *a fortiori* elle appartient à la projection de $\mathrm{pr}_1\overline{Z}'_\ell$; comme, sur w, la condition d'acyclicité est satisfaite (même raisonnement que dans le lemme 1.9), $\overline{Z}'_p$ est involutif au-dessus de w. Par suite w appartient à la projection de tous les prolongements de $\overline{Z}'_\ell$, donc à la projection de $\overline{Z}$; donc finalement, w appartient à $\overline{Z}_\ell$. Ceci achève la démonstration.

2. La méthode de prolongement de Cartan

2.1. Préliminaires

2.1.1. Dans l'étude du problème d'équivalence, Cartan et ses successeurs écrivent les systèmes différentielles et leurs prolongements en termes d'espaces de repères et de formes différentielles. Voir notamment [9], [15], [24], [35] et [36]. Ce qui suit est une traduction en terme de jets de la méthode de prolongement utilisée par ces auteurs, avec toutefois quelques modifications :

(a) Ils partent d'un groupoïde d'ordre un (et non d'ordre quelconque comme au §2.1.2).
(b) Les prolongements sont chez eux ramenés à l'ordre un et accompagnés d'un changement de base.

Le point (a) ne pose pas de problème. (b) sera examiné au §2.5, où l'on verra qu'il ne change pas les majorations obtenues ci-dessous, dans le théorème 2.5.

La traduction dont il est question ci-dessus est nécessaire pour obtenir les bornes voulues sur l'involutivité. La retraduction en termes de formes différentielles sera l'objet des §2.2 et suivants.

Je reprends les notations de 1.3.3 : Z_k est un groupoïde de $J^*_k(X)$, $\overline{Z} = \{\overline{Z}_\ell\}$ est le pseudogroupe qu'il engendre. On note ℓ ($\ell \geqslant k$) le plus petit entier tel que $\overline{Z}_\ell$ soit involutif, et l'on note $m = k + p \geqslant \ell$ le plus petit entier tel que, génériquement (*i.e.* au-dessus de $U \times U$, U ouvert dense de X) la « projection » dans $\mathfrak{I}^*_\ell$ de $\mathrm{pr}_p Z_k \subset J^*_m$ soit égale à $\overline{Z}_\ell$ (« projection », ici et dans la suite, s'entend au sens du §1.1).

Pour faire la traduction voulue, j'ai besoin d'une définition (cf. [32, Définition II.6.5]

Définition 2.1. — *Soit Z_q un sous-schéma fermé de $J^*_q(X)$, et soit Z_{q-1} sa « projection » dans J^*_{q-1}. On dit que Z_q est saturé si l'on a $Z_q \subset \mathrm{pr}_1 Z_{q-1}$.*

En terme d'idéaux : soit $\mathfrak{I}_q$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{J^*_q}$ qui définit Z_q ; alors, si $f \in \mathfrak{I}_q \cap \mathcal{O}_{J^*_{q-1}}$, on a $D_i f \in \mathfrak{I}_q$, $1 \leqslant i \leqslant n$ ($n = \dim X$).

Si Z_q n'est pas saturé, on désigne par Z^{sat}_q le plus grand sous-schéma saturé de $\mathfrak{I}^*_q$ qui soit contenu dans Z_q. On l'obtient ainsi : on considère la « projection » Z_{q-1} de Z_q dans J^*_{q-1} et on prend le produit fibré $Z_q \times_{J*_q} \mathrm{pr}_1 Z_{q-1}$; si nécessaire, on itère jusqu'à stabilisation.

Proposition 2.2. — *Si Z_q est un groupoïde, Z_q^{sat} est un groupoïde.*

Reprenons la construction qui précède avec Z_q un groupoïde. Alors Z_{q-1} en est un par 1.1.1 (b) et donc aussi $\mathrm{pr}_1 Z_{q-1}$ par le théorème 1.1. Reste à voir que le produit fibré au-dessus de J_q^* de deux sous-groupoïdes en est un. Ceci se voit facilement par le critère $\mathrm{Hom}(Y, \cdot\,)$ rappelé dans le §1.1.

Voici les deux raisons principales d'utiliser cette notion :

(a) Elle intervient de façon essentielle dans la traduction « systèmes différentiels » $\leftrightarrow$ « systèmes extérieurs ». Voir à ce propos [32, Lemme II.6.10].
(b) Elle intervient aussi essentiellement dans le calcul de l'obstruction à l'intégrabilité qui exprime la différence éventuelle entre Z_q et la « projection » dans J_q^* de $\mathrm{pr}_1 Z_q$. Lorsque Z_q est saturé, et sous des hypothèses de régularité (ici, génériquement vérifiées), cette obstruction s'exprime en termes de 2-cohomologie de Koszul du module caractéristique ; cf. [31, théorème II.3.4 et appendice B, proposition 1.9].

Je reprendrai ces points plus loin. Encore deux points de terminologie : chez les spécialistes du problème d'équivalence, par exemple [15] ou [36], ce que j'appelle « saturation » correspond plus ou moins à ce qui est appelé « normalisation ». D'autre part, chez ces auteurs, le calcul de l'obstruction à l'intégralité évoqué en (b) est appelé « élimination de la torsion ». Je préfère employer une terminologie un peu différente et appeler « torsion » cette obstruction (*i.e.* les nouvelles équations qui interviennent dans la « projection » de $\mathrm{pr}_1 Z_q$ par rapport à celles de Z_q).

2.1.2. Avec cette terminologie, je reprends la situation considérée dans le §1.3 et au §2.1. Z_k est donc un sous-groupoïde de J_k^*, ℓ et m ont la signification indiquée. Comme d'habitude dans cet article, je travaille birationnellement, *i.e.* je remplace si nécessaire X par un ouvert dense, sans toujours le dire explicitement. Voici la procédure que je vais considérer :

(a) On sature Z_k (s'il ne l'est pas).
(b) On calcule la torsion, *i.e.* on considère la « projection » Z'_k dans J_k^* de $\mathrm{pr}_1 Z_k$. Par définition de pr_1, on a $Z'_k \subset Z_k$.
(c) On itère (a) et (b) jusqu'à stabilisation (générique). Soit Z''_k le groupoïde obtenu, il est égal à la projection de $\mathrm{pr}_1 Z''_k$. On en déduit immédiatement que Z''_k et $\mathrm{pr}_1 Z''_k$ sont saturés.
(d) On considère $Z_{k+1} = \mathrm{pr}_1 Z''_k$ et on recommence avec $k := k+1$.

Par ce procédé, on obtient une suite $Z_k, Z_{k+1}, \dots$ de sous-groupoïdes respectivement de $J^*_k, J^*_{k+1}, \dots$. Soit d'autre part, $\overline{Z}_k, \overline{Z}_{k+1}, \dots$ la suite des « projections » du pseudogroupe $\overline{Z}$ engendré par Z_k. On a évidemment, pour tout $q \geqslant k$, $Z_q \supset \overline{Z}_q$.

On a le résultat suivant où m a la même signification que dans le théorème 1.5.

Théorème 2.3. — *On a $Z_m = \overline{Z}_m$. En particulier Z_m est involutif.*

Il en résulte immédiatement que, pour tout $q \geqslant m$, on a $Z_q = \overline{Z}_q$ (et que Z_q est involutif).

Posons encore $m = k + p$. On a évidemment $\mathrm{pr}_p Z_k \supset Z_m \supset \overline{Z}_m$. D'autre part Z_m et $\overline{Z}_m$ sont saturés. Le théorème résulte alors du lemme suivant :

Lemme 2.4. — *Le saturé $\widetilde{\mathrm{pr}}_p Z_k$ de $\mathrm{pr}_p Z_k$ est égal à $\overline{Z}_m$.*

Par définition de m, il existe $\ell \leqslant m$ tel que la « projection » de $\mathrm{pr}_p Z_k$ dans J^*_ℓ soit égale à $\overline{Z}_\ell$. Si $\ell = m$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $m \geqslant \ell + 1$. Les équations de $\mathrm{pr}_p Z_k$ contiennent celles de $\overline{Z}_\ell$, donc celles de $\widetilde{\mathrm{pr}}_p Z_k$ contiennent celles de $\mathrm{pr}_1 \overline{Z}_\ell = \overline{Z}_{\ell+1}$. Donc la « projection » de $\widetilde{\mathrm{pr}}_p Z_k$ dans $J^*_{\ell+1}$ est contenue dans $\overline{Z}_{\ell+1}$, donc lui est égale (à cause de la définition de $\overline{Z}_{\ell+1}$). On trouve de même que la projection de $\widetilde{\mathrm{pr}}_p Z_k$ dans $J^*_{\ell+2}$ est égale à $\overline{Z}_{\ell+2}$. Par récurrence, on obtient le résultat cherché.

2.1.3. Le théorème précédent, joint au théorème 1.5, donne une borne $M(k,n)$ pour l'ordre m où l'involutivité est atteinte par le procédé précédent. On va obtenir un résultat plus précis, à savoir une borne du nombre de prolongements nécessaires pour atteindre Z_m par la méthode indiquée. Plus précisément, Z_q étant obtenu, on va majorer le nombre de prolongements nécessaires pour obtenir Z_{q+1}. Dans ce nombre, (a) donne autant de prolongements qu'il est nécessaire pour saturer ; (b) donne un prolongement et (c) en donne autant que nécessaire pour itérer (a) et (b) jusqu'à stabilisation ; ensuite, (d) donnera un prolongement.

Soit $Z_q \supset Z'_q \supset Z''_q \supset \cdots$ la suite décroissante des sous-schémas de J^*_q donnés par les opérations (a), (b) et (c). Soit $Z^0_q \supset Z'^0_q \supset \cdots$ la suite des composantes connexes de l'identité correspondantes (je rappelle qu'on a supposé X connexe). Si, par exemple $Z'^0_q \neq Z^0_q$, on a $\dim Z'^0_q < \dim Z^0_q$ (parce que ce sont des variétés irréductibles ; on peut aussi se ramener aux algèbres de Lie). Sinon, on a $Z'^0_q = Z^0_q$ et Z'_q est une partie des composantes connexes de Z_q.

Plaçons-nous dans ce dernier cas, et supposons d'abord que Z'_q est obtenu à partir de Z_q en calculant la torsion. Alors Z'_q est sans torsion, et l'étape suivante est (d) (car Z'_q, étant sans torsion, est saturé). Si maintenant Z'_q est obtenu à partir de Z_q par un procédé de saturation, les composantes de Z'_q sont déjà saturées ; alors l'étape suivante sera (b), le calcul de la torsion. En définitive, on ne peut pas avoir plus de trois schémas $Z_q \supset Z'_q \supset Z''_q$ ayant la même composante connexe de l'identité, *i.e.* la même dimension. Ceci donne le résultat suivant :

Théorème 2.5. — *Avec les notations qui précèdent, le nombre de prolongements nécessaires pour atteindre Z_m est majoré par*

$$\sum_{k}^{m-1} [1 + 3 \dim J_q^k(X)] \, .$$

Comme m est majoré par une fonction $M(k, n)$, ce nombre sera aussi majoré par une autre fonction $M_1(k, n)$. Inutile de dire que ce nombre est beaucoup plus grand que celui qu'on obtient dans les exemples que l'on sait pratiquement calculer.

2.2. Espaces de repères et groupoïdes

Dans ce paragraphe, on décrit les sous-groupoïdes saturés de $J_1^*(X)$ en termes d'espaces de repères et de formes tautologiques. Dans le cas transitif, c'est un cas particulier de [40] et [21]. Dans le cas général, des calculs voisins, relatifs aux pseudogroupes, et non à leurs jets d'ordre un, se trouvent dans [32, §II.4–6].

2.2.1. Soit X une variété lisse et irréductible de dimension n sur $\mathbb{C}$, qu'on remplace au besoin par un ouvert (de Zariski) dense. Dans la suite, il m'arrivera aussi de devoir remplacer X par un revêtement fini (ou, si l'on veut, un ouvert de X par un revêtement étale fini, que j'appellerai alors « *ouvert étale* de X »). Soit $Z_0 \subset X \times X$ une relation d'équivalence définie par $Z_0 = X \times_S X$, avec S lisse et irréductible et $\pi \colon X \to S$ lisse surjectif. On note q la dimension de S et on pose $r = n - q$.

Soit $J_{1,S}^*(X)$, en abrégé $J_{1,S}^*$ l'espace des jets d'ordre un inversibles de X dans X, commutant à la projection sur S. Comme d'habitude, on note (s, t) ses projections « source » et « but » sur X. Soit d'autre part $\Pi(S, n)$, en abrégé Π l'espace des jets d'ordre un inversibles d'application $S \times \mathbb{C}^r \to X$, de source sur $S \times \{0\}$ et commutant aux projections sur S. C'est un fibré principal à droite sur Γ, l'espace des jets d'ordre un inversibles de $S \times \mathbb{C}^r$

dans lui-même, de source et but sur $S \times \{0\}$, et commutant à la projection sur S. On note encore $t\colon \Pi \to X$ la projection « but » sur X.

On a une surjection $\Pi \times_S \Pi \to J^*_{1,S}$, donnée par $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\alpha^{-1}$. Cette flèche est un isomorphisme $(\Pi \times^\Gamma_S \Pi) \to J^*_{1,S}$.

L'espace Π est muni d'une forme différentielle σ dite « tautologique » (ou « fondamentale »), variante de la forme de Liouville des espaces cotangents, qui se définit ainsi : soit $a \in \Pi$, $b = t(a) \in X$ et $s = \pi(b) \in S$. La donnée de b est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $u\colon \mathbb{C}^r \times T_sS \xrightarrow{\sim} T_aX$ (on identifie $\mathbb{C}^r \simeq T_a\mathbb{C}^r$) commutant aux projections sur T_sS. L'inverse u^{-1} donne en particulier une application $T_aX \to \mathbb{C}^r$, *i.e.* une forme différentielle à valeurs dans $\mathbb{C}^r$. En le relevant à Π, on obtient une forme $\in \Omega^1(\Pi) \otimes \mathbb{C}^r$, de composantes $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$; il est commode de lui adjoindre les composantes $\mathrm{d}s_1, \ldots, \mathrm{d}s_q$ de $\mathrm{d}s$ dans des coordonnées (étales) de S. On notera σ la forme $(\mathrm{d}s_1, \ldots, \mathrm{d}s_q; \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Si nécessaire, on écrira aussi $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Voici ses propriétés, pour l'essentiel tautologiques :

2.2.2. Une manière équivalente de faire est la suivante : la donnée de u est équivalente à la donnée de r covecteurs en a, $\omega_1, \ldots, \omega_r \in T^*_aX$, formant un supplémentaire de T^*_sS dans T^*_aX. En particulier, pour tout ouvert $U \subset X$, on a une bijection « sections $\sigma\colon U \to \Pi|U$ de t » $\leftrightarrow$ « donnée de r formes $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \Omega^1(U)$ formant en chaque point un supplémentaire de $\Omega^1_S \circ \Pi$ » ; dans cette bijection, σ est caractérisé par la propriété $\omega_i = \sigma_i \circ t$ (noter que les sections sur des U convenables existent, car Γ est extension de $S \times Gl(r)$ par un groupe additif sur S, donc est « spécial » au sens de Serre [39]).

2.2.3. Les sections de Γ sur les ouverts $V \subset S$ opèrent dans Π à droite. Notons R_γ l'action d'une telle section γ. D'autre part, on peut identifier en chaque point σ à l'application ${}^tu^{-1}\colon T^*_aX \to T^*_sS \times \mathbb{C}^r$, ou encore à un élément de $T^*_aX \otimes (T_sS \times \mathbb{C}^r)$. Faisant alors agir γ à gauche sur le second terme, on a la formule « tautologiquement équivariante » : $\gamma^{-1}\sigma = R^*_\gamma\sigma$.

2.2.4. Pour écrire l'expression σ en coordonnées locales, nous supposerons que S est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, et X un ouvert $S \times \widetilde{X}$ de $\mathbb{C}^n$, de coordonnées $(s_1, \ldots, s_p; x_1, \ldots, x_r)$. Quitte à remplacer X et S par des ouverts denses, le cas général s'en déduit en prenant un revêtement étale convenable de la situation précédente.

Notons $u_1, \ldots, u_r$ les coordonnées de $\mathbb{C}^r$. Alors, un point $z \in \Pi$ est donné par (s_i, x_j, x^i_j, x^k_j) les x^i_j (resp. x^k_j) correspondant aux dérivées $\frac{\partial x_j}{\partial s_i}$ (resp. $\frac{\partial x_j}{\partial u_k}$). Notons $\mathrm{d}s$ (resp. $\mathrm{d}x$) la colonne formée des $\mathrm{d}s_i$ (resp. $\mathrm{d}x_j$), et notons X' (resp. X'') la matrice (x^i_j) (resp. (x^k_j)). La condition d'inversibilité de u se traduit par le fait que X'' est inversible. Posant $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ X' & X'' \end{smallmatrix}\right)$, on a alors $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{d}s \\ \sigma' \end{smallmatrix}\right) = \gamma^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}x \end{smallmatrix}\right)$, ou encore

$$\sigma' = X''^{-1}[-X' \,\mathrm{d}s + \mathrm{d}x] \quad \text{qu'on écrit aussi « } \sigma' = \gamma^{-1}\, \mathrm{d}x \text{ ».} \tag{2.1}$$

Soit maintenant φ un germe d'automorphisme analytique de X au-dessus de S, de source a. Par composition, pour tout $b \in \Pi$, avec $t(b) = a$, $j_1\varphi$ définit un germe d'automorphisme de Π de source b, qu'on note $\tilde{\jmath}_1\varphi$. On a la propriété suivante :

Proposition 2.6. — *Soit ψ un germe d'automorphisme analytique de Π (commutant à la projection sur S). Pour qu'on ait $\psi = \tilde{\jmath}_1\varphi$ il faut et il suffit qu'on ait $\sigma \circ \psi = \sigma$.*

(Comme ψ commute à la projection sur S, ceci équivaut à $\sigma' \circ \psi = \sigma'$.)

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soit ψ fixant σ et soient a et b la source et le but de ψ. Au voisinage de $t(a)$ et $t(b)$, on peut choisir des coordonnées analytiques analogues à celles considérées en 2.2.4. Alors les expressions de σ et $\sigma \circ \psi$ montrent que ψ est projetable sur X ; soit φ la projection ; il suffit de voir qu'on a $\psi = \tilde{\jmath}_1\varphi$. Par composition avec $\tilde{\jmath}_1\varphi^{-1}$, on se ramène au cas où $\varphi = \mathrm{id}$; mais alors par (2.1), on a $\psi = \mathrm{id}$.

Voici une manière d'interpréter ce résultat. Pour cela, je rappelle la définition suivante : soient X et Y deux variétés lisses, et soit $J_1(X, Y)$ l'espace des jets d'ordre 1 de X dans Y. Alors, on appelle « structure de contact de $J_1(X, Y)$ » le sous-$\mathcal{O}_{J_1}$-module $\mathcal{C}$ de $\Omega^1_{J_1}$ (en fait, de $(s,t)^*\Omega^1_{X,Y} \subset \Omega^1_{J_1}$) possèdant la propriété suivante, qui le définit : un germe analytique $\psi \colon X \to J_1(X, Y)$, section de la projection source, est de la forme $j_1\varphi$, φ germe de X dans Y si et seulement si $\mathcal{C} \circ \psi = 0$.

En coordonnées locales $(x_i, y_i;\ y_{j,i})$ de $J_1(X, Y)$ une base de $\mathcal{C}$ est donnée par les formes $\mathrm{d}y_j - \Sigma y^i_j \,\mathrm{d}x_i$, $1 \leqslant i \leqslant \dim X$, $1 \leqslant j \leqslant \dim Y$. Ceci s'applique par restriction à $J^*_{1.S}(X)$ avec $Y = X$.

La proposition précédente nous dit qu'en un certain sens la forme $\mathrm{pr}_2^*\sigma - \mathrm{pr}_1^*\sigma$ sur $\Pi \times \Pi$ (qu'on notera pour simplifier $\bar{\sigma} - \sigma$) est une variante « symétrisée entre la source et le but » de la structure de contact.

Il sera aussi utile de la « déssymétriser » pour retrouver la structure de contact elle-même. Pour cela, on part de l'application $\Pi \times_S \Pi \to J^*_{1,S}$. En la composant avec une section u de $\Pi \to X$, section qui existe au moins localement, on obtient un isomorphisme $X \times_S \Pi \xrightarrow{\sim} J^*_{1,S}$. On a alors le résultat suivant qui se démontre comme (2.1).

Proposition 2.7. — *Les composantes de l'image de $\bar{\sigma} - \sigma \circ u$ engendrent la structure de contact de $J^*_{1,S}$.*

2.2.5. Nous allons maintenant appliquer ce qui précède à la description des sous-groupoïdes $Z_1 \subset J_1^*(X)$. *Dans tout cet article, on suppose Z_1 saturé.* La description de l'opération de saturation sera vue ultérieurement.

Quitte à remplacer X par un ouvert dense, on supposera toutes les conditions de régularité considérées au §1.1 satisfaites. En particulier, si l'on note Z_0 la « projection » de Z_1 dans $X \times X$, on supposera qu'on a, comme au 2.2.1, $Z_0 = X \times_S X$, avec $\pi\colon X \to S$, S lisse et π lisse et surjectif. La condition « Z_1 saturé » signifie alors qu'on a $Z_1 \subset J_{1,S}^*$.

Dans la suite de cet article, *il sera aussi nécessaire de supposer que* Π *a une section* $\lambda\colon S \to X$. Voici quelques commentaires sur cette condition, qui ne résulte pas des hypothèses précédentes. Quitte à remplacer X et S par des ouverts denses, on dispose d'une « section multiforme », *i.e.* d'un revêtement étale fini $\alpha\colon \widetilde{S} \to S$ et d'une application $\lambda\colon \widetilde{S} \to X$ vérifiant $\alpha = \pi \circ \lambda$. Posant alors $\widetilde{X} = \widetilde{S} \times_S X$, on aura une application $\tilde{\lambda} = (\mathrm{id}, \lambda)\colon \widetilde{S} \to \widetilde{X}$, section de la projection $\widetilde{\pi}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{S}$. On travaille alors avec S et X remplacés par $\widetilde{S}$ et $\widetilde{X}$. Une descente éventuelle pourra se faire comme dans [32, §II.7]. Je n'entre pas dans les détails.

L'hypothèse de l'existence de λ étant faite, soit Z_1^0 le groupe d'isotropie de Z_1 au-dessus de X (cf. section 1). C'est par définition l'image réciproque dans Z_1 de la diagonale $\Delta \subset X \times X$. Avec λ et Z_1^0, on fabrique un sous-fibré P de Π de la manière suivante :

(a) On fixe un isomorphisme du fibré normal à X le long de $\lambda(S)$ avec $S \times \mathbb{C}^r$ (ceci peut se faire après remplacement éventuel de S par un ouvert dense). Ceci donnera un isomorphisme $J_{1,S}^{*,0} \mid \lambda(S) \simeq \Gamma$.

(b) L'isomorphisme précédent identifie $Z_1^0 \mid \lambda(S)$ à un sous-groupe G au-dessus de S. Soit alors P le sous-espace de Z_1 dont les éléments ont leur source sur $\lambda(S)$. L'isomorphisme (a) donne une injection $P \to \Pi$, et P est un fibré principal à droite sur G (au-dessus de S), qui est une restriction à G du groupe structural Γ de Π.

(c) On restreint les formes σ et σ' à P. Notant θ et θ' les formes obtenues, elles ont les propriétés suivantes :

  (c.1) θ' est à valeurs dans $\mathbb{C}^r$ ($r = \dim X - \dim S$). En tout point $a \in P$, avec $b = t(a)$, ses composantes proviennent de $T_b^*(X)$ et forment dans $T_b^*(X)$ une base d'un supplémentaire de $T_s^* S$, $s = \pi(b)$.

  (c.2) θ est équivariante, *i.e.* pour tout $g \in G$, on a, avec des notations analogues à celles de 2.2.1, $R_\gamma^* \theta = \gamma^{-1}\theta$ (qu'on écrit aussi abusivement $R_\gamma^* \theta' = \gamma^{-1}\theta'$).

  (c.3) θ a des propriétés qui généralisent les propositions 2.6 et 2.7. Pour éviter des problèmes de passage au quotient, *je supposerai* *que P est un fibré trivial, ce qui sera vrai après remplacement de X par un revêtement fini* (ou, plus précisément, par un ouvert étale).

(c.3.1) L'isomorphisme $(\Pi \overset{\Gamma}{\underset{S}{\times}} \Pi) \simeq J^*_{1,S}$ se restreint en $(P \overset{G}{\underset{S}{\times}} P) \simeq Z_1$. Alors, si u est une section de $P \to X$, les composantes de $\overline{\theta} - \theta \circ u$ engendrent la structure de contact de Z_1.

(c.3.2) Soit ψ un germe d'automorphisme analytique de P, commutant à la projection sur S. Pour qu'il existe un germe d'automorphisme φ de X tel que ψ soit la restriction à P de $\tilde{\jmath}_1\varphi$, il faut et il suffit qu'on ait $\theta \circ \psi = \theta$ (se voit comme dans la proposition 2.6).

Sous les hypothèses précédentes, φ n'est pas quelconque. En effet, l'assertion $\tilde{\jmath}_1\varphi = \psi$ signifie que $j_1\varphi$ est une section de Z_1 au-dessus de X (pour la projection source). Autrement dit, φ est une solution du système différentiel engendré par Z_1 (ce système est noté Σ dans §1.3 et §2.1).

En coordonnées, les choses s'écrivent ainsi : une section de $P \to X$ donne par restriction de θ une forme vectorielle $\omega = {}^t(\omega_1, \dots, \omega_r)$ sur X. En identifiant alors P à $X \times G$, et avec des notations évidentes la condition $\theta \circ \psi = \psi$ s'écrit $\bar{g}^{-1}\bar{\omega} = g^{-1}\omega$; on peut prendre $g = e$ et l'on a alors $\bar{\omega} = \bar{g}\omega$ ce qui est essentiellement la manière dont Cartan écrit les équations de pseudogroupe (bien entendu, je fais le même abus que plus haut : il faudrait écrire $\binom{\mathrm{d}s}{\bar{\omega}} = \bar{g}\binom{\mathrm{d}s}{\omega}$).

2.2.6. Montrons inversement que des données du type précédent permettent de construire un sous-groupoïde saturé de $J^*_{1,S}$.

On se donne donc :

(a) $\pi\colon X \to S$ comme plus haut, avec X et S lisses et irréductibles, π lisse et surjectif. On ne suppose pas ici que π admette une section. On pose $n = \dim X$, $p = \dim S$, $r = n - p$.

(b) Un sous-groupe G de Γ, groupe des jets d'ordre un d'automorphismes de $S \times \mathbb{C}^r$, de source et but sur $S \times \{0\}$, et commutant à la projection sur S. On suppose G lisse et $G \to X$ lisse et surjectif.

(c) Un fibré principal $t\colon P \to X$ au-dessus de S, de groupe G.

Dans la suite, quitte à remplacer X par un revêtement fini, on supposera ce fibré trivial, *i.e.* $P = X \times_S G$ (le lecteur intéressé pourra examiner dans quelle mesure cette hypothèse est nécessaire).

(d) Une forme $\theta \in \Omega^1(P) \otimes \mathbb{C}^r$, vérifiant (c.1) et (c.2) dans 2.2.5.

On reconstitue alors un sous-groupoïde $Z_1 \subset J^*_{1,S}$ de la manière suivante : tout d'abord θ donne une application de $P = X \times_S G$ dans Π. La propriété d'équivariance de θ fait de P un sous-fibré de Π, de groupe structural $G \subset \Gamma$. Enfin Z_1 est égal à $(P \overset{G}{\underset{S}{\times}} P)$, sous-groupoïde de $(\Pi \overset{\Gamma}{\underset{S}{\times}} \Pi) = J^*_{1,S}$.

Les équations de Z_1 s'écrivent alors comme ci-dessus, fin du 2.2.

Deux remarques à ce propos :

(a) L'équation $\bar{\omega} = \bar{g}\omega$ définit un sous-schéma de $J^*_{1,S} \times_S G$, isomorphe à sa projection Z_1 dans $J^*_{k,S}$. Dans la suite, pour étudier les prolongements, on pourra travailler dans les $J^*_{k,S}$ ou les $J^*_{k,S} \times_X J_{k-1,S}(X, G)$ (avec la définition évidente du dernier terme) ; les résultats seront isomorphes.

(b) L'équation $\bar{g}^{-1}\bar{\omega} = g^{-1}\omega$ définit une « extension triviale » de l'équation précédente, au sens suivant. Étant donné $Y_1 \overset{p}{\mapsto} Y$ une surjection lisse, un « système différentiel d'ordre k » sur Y_1, *i.e.* sur un sous-schéma fermé $Z_1 \subset J_k(X, Y_1)$ est dit extension triviale du système $Z \subset J_k(X, Y)$ si l'on a $Z_1 = (j_1 p)^{-1} Z$ (intuitivement « on n'ajoute aucune équation relative aux variables verticales de p »)

Ici, la projection se déduit de $G \times G \to G$ par $(\bar{g}, g) \mapsto \bar{g}^{-1} g$. Comme dans le cas précédent, le remplacement d'un système différentiel par une extension triviale est inoffensif ; il se traduit en particulier de façon triviale sur les opérations considérées au §2.1 : calcul de la torsion, saturation, prolongement. Dans la suite, je travaillerai sans commentaires, tantôt sur un des systèmes, tantôt sur l'autre.

2.3. Torsion

2.3.1. Je vais d'abord rappeler comment est présentée la question de « l'obstruction au prolongement » dans [31, Chap. II, §3 et Appendice B, §1]. Je le fais rapidement, en renvoyant à cet article pour les détails.

Je reprends la situation du §1.3. Soient X et Y deux variétés algébriques lisses et connexes sur $\mathbb{C}$. On les suppose étales sur des ouverts $\overline{X} \subset \mathbb{C}^n$ et $\overline{Y} \subset \mathbb{C}^p$, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$. Pour $k \geqslant 0$, on pose $J_k(X, Y) = J_k$ l'espace des jets d'ordre k de X dans Y. Notant x (resp. y) un point de X (resp. Y), un point de J_k est représenté par (x, y, y^α_j), $1 \leqslant j \leqslant p$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Les champs de vecteurs D_i ont la même signification que dans §1.2 et §1.3.

Soit Z_k un sous-schéma fermé de J_k, défini par l'idéal $\mathfrak{I}_k$, et soit N le symbole de $\mathfrak{I}_k$, sous-module gradué de $\bigoplus_j \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]\delta y_i = \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p$ (pour

$k = 0$, on suppose $Z_0 \to X$ surjectif et le symbole N_0 est engendré par les $\delta f_i = \mathrm{d}_{Z/X} f_i$, f_i des générateurs de $\mathfrak{I}_0$). On pose enfin $M = \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p / N$ et l'on appelle M le module (ou système) caractéristique de $\mathfrak{I}_k$ (en particulier, si $\ell < k$, on a $N_\ell = 0$ et $M_\ell =$ la composante de degré ℓ de $\bigoplus \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p$).

Supposons qu'on ait $k \geqslant 1$. Pour définir l'obstruction au prolongement de Z_k, on fait les hypothèses suivantes :

(i) Notant Z_{k-1} la « projection » de Z_k dans $\mathfrak{I}_{k-1}$, on suppose que Z_k et Z_{k-1} sont lisses et la projection $Z_k \to Z_{k-1}$ lisse et surjective.
(ii) On suppose Z_k saturé, *i.e.* $Z_k \subset \mathrm{pr}_1 Z_{k-1}$.
(iii) On suppose M_k et M_{k+1} localement libres sur $\mathcal{O}_{Z_k}$.

L'obstruction se définit ainsi. On note T le tangent à X, ou plutôt le faisceau de ses sections, et on considère le complexe de Koszul $\{\Lambda^q T \otimes N_\ell\}$. Prenons un germe (en un point non précisé) $n \in Z(T \otimes N_k)$. En supposant qu'on ait $n = \Sigma \xi \otimes \delta f_i$, $f_i \in \mathfrak{I}_k$, on considère la classe mod $\mathfrak{I}_k$ de $\Sigma D_i f_i \in \mathcal{O}_{J_k} / \mathfrak{I}_k = \mathcal{O}_{Z_k}$ (l'hypothèse de cycle implique que les termes de degré $k + 1$ s'annulent). On montre alors les résultats suivants (voir les détails dans *loc. cit.*) :

(a) Cette classe ne dépend que de n (l'hypothèse de saturation est ici essentielle). On note cette classe $\tau(n)$ et on appelle « torsion » l'application ainsi définie $\tau\colon Z(T \otimes N_k) \to \mathcal{O}_{Z_k}$.

(b) Cette classe représente l'obstruction au prolongement, *i.e.* l'idéal de la « projection » de $\mathrm{pr}_1 Z_k$ dans $\mathfrak{I}_k$ est défini en ajoutant les composantes de τ à $\mathfrak{I}_k$ (on a même un résultat plus précis : un point $a \in Z_k$ est dans la « projection » de $\mathrm{pr}_1 Z_k$ si et seulement si $\tau(a) = 0$).

(c) Pour obtenir une version cohomologique de ces résultats, faisons l'hypothèse supplémentaire que la « projection » Z_{k-2} de Z_{k-1} dans J_{k-2} est lisse et surjective (si $k = 1$, on prend $J_{-1} = X$ et on suppose qu'on a $Z_{-1} = X$). Définissons alors N_{k-1} comme plus haut, avec Z_k remplacé par Z_{k-1} et modifions N en remplaçant 0 par N_{k-1} en degré $k - 1$. Modifions de même M. Alors on a la propriété suivante (*loc. cit.*) :

(d) *L'application τ est nulle sur l'image de $\Lambda^2 T \otimes N_{k-1}$ dans $T \otimes N_k$.*

Désignant par $H_{1,k}(N)$ le groupe de cohomologie correspondant, on pourra donc considérer τ comme une application $H_{1,k}(N) \to \mathcal{O}_{Z_k}$; utilisant la suite exacte de cohomologie de la suite exacte $0 \to N \to \mathcal{O}_{Z_k}[\xi]^p \to M \to 0$, on obtient enfin une application $H_{2,k-1}(M) \to \mathcal{O}_{Z_k}$, que je noterai encore τ.

2.3.2. Prenons en particulier $k = 1$. Je vais traduire les résultats précédents en termes de formes différentielles, suivant en cela [31, Appendice B, §1]. On retrouvera en particulier l'obstruction au prolongement dans les systèmes différentiels extérieurs, telle qu'elle est définie dans [8] ou [10].

Je reprends donc les notations du paragraphe précédent, avec $k = 1$. En particulier, on suppose que la projection de $Z_0 \subset X \times Y$ dans X est lisse et surjective et qu'on a $Z_1 \subset \mathrm{pr}_1 Z_0$.

Soit p la projection $J_1 \to J_0 = X \times Y$, et soit γ le « morphisme de contact » $\Omega^1_{X\times Y/X} \to \Omega^1_{J_1}$ donné en coordonnées locale par $\gamma(\mathrm{d}y_j) = \mathrm{d}y_j - \Sigma y^i_j \mathrm{d}x_i$. On note $\mathcal{C}$ le sous-faisceau sur $\mathcal{O}_{J_1}$ engendré par l'image de γ ($\mathcal{C}$ est « la structure de contact » de J_1).

Du fait que Z_1 est saturé, on déduit que γ se restreint en une application $\Omega^1_{Z_0/X} \to \Omega^1_{Z_1}$.

Vérifions rapidement ce résultat : soit $\mathfrak{I}_0$ l'idéal de Z_0 dans $\mathcal{O}_{X\times Y}$, et soit $f \in \mathfrak{I}$; comme Z_0 est la « projection » de Z_1, on a $\mathrm{d}f = 0$ sur Z_1, donc $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i + \sum \frac{\partial f}{\partial y_j}\, \mathrm{d}y_j = 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{d}_{X\times Y/X} f) &= \sum \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathrm{d}y_j - \Sigma y^i_j\, \mathrm{d}x_i)\\ &= -\sum D_i f\, \mathrm{d}x_i\end{aligned}$$

et le résultat suit de ce qu'on a $D_i f \in \mathfrak{I}_1$, l'idéal de Z_1. Le système d'équations aux dérivées partielles défini par Z_1 peut alors s'écrire $\mathcal{C}' \underset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}|Z_1 = 0$.

Les modules caractéristiques s'écrivent ainsi : on a $M_1 = \Omega^1_{Z_1/Z_0}$, et $M_0 = \Omega^1_{Z_0/X} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_0}} \mathcal{O}_{Z_1}$. On peut identifier M_0 à $\mathcal{C}'$, en remarquant que le composé $\mathcal{C}' \to \mathcal{O}_{Z_1} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_0}} \Omega^1_{Z_0} \to \mathcal{O}_{Z_1} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_1}} \Omega^1_{Z_0/X}$ est bijectif. Pour l'action de $\xi_i \colon M_0 \to M_1$, je renvoie à *loc. cit.*

Quitte à remplacer X et Z par des ouverts denses, prenons une base $\theta_1, \dots, \theta_r$ de $\mathcal{C}'$ et complétons $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$; $\theta_1, \dots, \theta_r$ par des formes $\pi_1, \dots, \pi_s$ de manière à obtenir une base de $\Omega^1_{Z_1}$. L'obstruction au prolongement de Z_1 peut s'obtenir de la manière suivante (*loc. cit.*) :

Du fait qu'on a $\theta_i \in p^*\Omega^1_{Z_0}$, $\mathrm{d}\theta_i$ ne contient pas de termes en $\pi_k \wedge \pi_\ell$ donc, on a $\mathrm{d}\theta_i = \Sigma c^{jk}_i\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k + \Sigma d^{j\ell}_i\, \mathrm{d}x_j \wedge \pi_\ell \mod \mathcal{C}' \wedge \Omega^1_{Z_1}$.

Les c^{jk}_i sont les coordonnées d'un vecteur de $\Lambda^2 T^* \otimes M_0^*$, *i.e.* définissent une application $\Lambda^2 T \otimes M_0 \to \mathcal{O}_{Z_1}$. En restreignant cette application à $H_{2,0}(M) = Z(\Lambda^2 T \otimes M_0)$, on trouve un élément τ de $H_{2,0}(M)^*$. On a les propriétés suivantes (*loc. cit.*) :

(a) τ reste inchangé si l'on change les π_i en laissant fixes leurs classes dans $\Omega^1_{Z_1/Z_0}$; comme on calcule mod $\mathcal{C}'$, il suffit de regarder les modifications du type $\pi_i \to \pi'_i = \pi_i + \Sigma\pi^k_i \; \mathrm{d}x_x$, $\pi^k_i \in \mathcal{O}_{Z_k}$; alors $\{c^{jk}_i\}$ est changé par l'application $\{\pi^k_i\} \to \Sigma d^{j\ell}_i \; \mathrm{d}x_j \wedge \pi^\ell_k \; \mathrm{d}x_k$; ceci est une application $T^* \otimes M^*_1 \to \Lambda^2 T^* \otimes M^*_0$ et il suffit de voir que cette application est la différentielle de Spencer ∂^* = la duale de la différentielle de Koszul ∂ du complexe $K(\xi_i, M)$. Ceci se voit en regardant l'expression de ∂^* en termes des $\mathrm{d}\theta_i$; cf. [31, Appendice B, §1.4].

(b) τ est l'obstruction au prolongement de Z_1 et coïncide au signe près avec la torsion définie en 2.3.1 (le signe dépend du choix du signe du morphisme de connexion dans la suite exacte reliant l'homologie de M à celle de N).

2.3.3. Il reste maintenant à appliquer la construction précédente au cas particulier considéré en 2.2.5. Je reprends donc la situation de la fin de 2.2.5, dont je garde les notations. Pour simplifier, je pose $\Omega = \binom{\mathrm{d}s}{\omega}$; on a donc $\theta = g^{-1}\Omega$; l'équation qui nous intéresse est donc $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega} = \Omega$, ou $\bar{\theta} = \theta$ (ces deux formes sont essentiellement équivalentes, comme expliqué en 2.2.6).

Les calculs du 2.3.2 s'appliquent directement à la première équation, à condition de remplacer $(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n)$ par des $(\mathrm{d}s_1, \dots, \mathrm{d}s_q; \mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_r)$ ($r = n - q$, cf. notations de 2.2.4), et de prendre pour $\mathcal{C}'$ le $\mathcal{O}_{Z_1}$-module engendré par les composantes de $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega} - \Omega$.

On garde, pour les coordonnées, les notations ci-dessus : on suppose de plus qu'on a $X \supset S \times \{0\}$ et on prend pour section de $X \to S$ la section $\lambda(s) = (s, 0)$. Si $Z_1 \subset J^*_{1,S}$ est le groupoïde décrit dans 2.2.5, on a $Z_0 = X \times_S X$, $Z_1 = G \times_S Z_0$.

Le module caractéristique de Z_1, tel qu'il est décrit dans 2.3.1 (c) et 2.3.2, est le $\mathcal{O}_{Z_1}[\xi_1, \dots, \xi_n]$-module homogène M, avec $M_0 = \Omega^1_{Z_0/X} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_0}} \mathcal{O}_{Z_1}$, $M_1 = \Omega^1_{Z_1/Z_0}$, l'action des ξ_i étant celle décrite plus haut (*i.e.* ξ_i correspond à la dérivation $\frac{\partial}{\partial s_i}$, $1 \leqslant i \leqslant q$, et à la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $i = q + j$).

Il sera commode de déduire M_0 et M_1 de modules définis sur S, par extension des scalaires. On définit alors μ_0, μ_1, μ comme les restrictions de M_0, M_1, M de Z_1 à S. Explicitement, si $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ désignent les coordonnées de la seconde composante de $X \times_S X$, on aura $\mu_0 = \bigoplus \mathcal{O}_S \delta\bar{x}_i$, avec $\delta = \mathrm{d}_{X \times_S X/X}$ et $\mu_1 = \Omega^1_{G/S}$. Une base de μ_1 sera donnée par les formes invariantes à gauche composantes de $g^{-1}\mathrm{d}_{G/S}g$. On les notera $\psi_1, \dots, \psi_s$ et on les relève en des formes $\widetilde{\psi}, \dots, \widetilde{\psi}_s \in \Omega^1(G \times_S X)$.

Considérons maintenant la forme $\theta = g^{-1}\Omega$ sur $X \times_S G$; une base des 1-formes sur $X \times_G S$ est donnée par les θ_i et les $\widetilde{\psi}_i$. Comme les θ_i proviennent de formes sur X, les $\mathrm{d}\theta_i$ ne contiennent pas de termes en $\widetilde{\psi}_j \wedge \widetilde{\psi}_k$. On aura donc (avec $\mathrm{d}\theta_i = 0$ pour $i \leqslant q$) $\mathrm{d}\theta_i = \Sigma c_i^{jk}\theta_j \wedge \theta_k + \Sigma d_i^{j\ell}\widetilde{\psi}_\ell \wedge \theta_j$.

Dans cette formule, les $\sum_\ell d_i^{j\ell}\widetilde{\psi}_\ell$ sont bien déterminés mod θ (en effet, si on a $\Sigma\chi_j \wedge \theta_j = 0$, alors $\chi_i = \Sigma a_i^j \theta_j$, donc $\chi_i = 0 \mod \theta$). On en déduit qu'on a $\sum_\ell d_i^{j\ell}\widetilde{\psi}_\ell \mod \theta = g^{-1}\mathrm{d}_{G/S}g$. En particulier les $d_i^{j\ell}$ ne dépendent que de S.

Pour obtenir un terme en $H_{2,0}(\,\cdot\,)$, il faut modifier un peu μ ; pour cela on introduit des symboles $[\delta s_i]$, $1 \leqslant i \leqslant q$ et on considère le $\mathcal{O}_S[\xi_1, \ldots, \xi_n]$-module homogène μ' défini par $\mu'_i = \mu_i$, $i \geqslant 1$, $\mu'_0 = \mu_0 \oplus \Sigma\mathcal{O}_S[\delta s_i]$. On fait agir les ξ_j sur μ comme ci-dessus et l'on pose $\xi_j[\delta s_i] = 0$.

Quitte à restreindre S, on peut supposer que $H_{2,0}(\mu')$ est un fibré trivial sur S. Les c_i^{jk} sont alors les coordonnées d'une fonction sur $X \times_S G$ à valeurs dans $(\Lambda^2 T \otimes \mu_0)^*$, $T = T_X$. Un calcul analogue à celui mentionné en 2.3.1 (c) montre que son image c dans le quotient $H_{2,0}(\mu')^*$ est indépendant du choix des $\widetilde{\psi}_j$. Suivant [40], on appellera c la « constante de structure » de (P, θ). On notera encore ${}^{\circ}c$ sa restriction $X \times \{0\}$. Les calculs du 2.3.2 montrent ceci :

Proposition 2.8. — *La torsion τ de l'équation $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega} = \Omega$ est la fonction $\tau = \bar{c} - {}^{\circ}c \colon X \times_S P \to H_{2,0}(\mu')^*$.*

En symétrisant les calculs, on trouve

Proposition 2.9. — *La torsion de l'équation $\bar{\theta} = \theta$ ($\theta = g^{-1}\Omega$) est la fonction $\bar{c} - c \colon P \times_S P \to H_{2,0}(\mu')^*$.*

2.4. Saturation et réduction du groupe structural

2.4.1. Rajoutons maintenant aux équations de Z_1 l'annulation de la torsion. En symétrisant, cela revient à ajouter l'équation $\bar{c} = c$ à l'équation $\bar{\theta} = \theta$. En saturant, on remplacera Z_1 par un sous-groupoïde Z'_1 qui, en général, diffère de Z_1 sur deux points.

(i) On agrandit S, *i.e.* on le remplace par S' avec $X \xrightarrow{\pi'} S' \xrightarrow{\psi} S$, $\pi = \psi \circ \pi'$. On a alors $Z'_0 = X \times S'X \subset Z_0$.

(ii) On remplace le groupe d'isotropie Z_1^0 par un sous-groupe $Z_1'^0$.

Traduisons en termes de (P, G, θ) comme en 2.2.5. Ceci revient à faire les opérations suivantes :

Tout d'abord on remplace la projection $\pi \circ t \colon P \to S$ par la projection $\pi' \circ t \colon P \to S'$ (on considère P comme une « famille de fibrés principaux paramétrée par S' » au lieu de S). On fait alors une réduction du groupe structural de $G \times_S S'$ à un sous-groupe au-dessus de $S' \colon G' \subset G \times_S S'$. Pour abréger, j'appellerai cette opération « réduction du groupe structural au-dessus de S' ». Bien entendu, si $P' \subset P$ est le nouveau fibré principal, la forme tautologique θ' de P' est la restriction de θ à P'.

Je vais indiquer comment ces opérations se traduisent en termes d'espaces de repères ; pour autant que je comprenne, la méthode que je vais suivre est celle que Cartan indique dans [9, pp. 65–70]. Dans le cas particulier où S est un point, voir [15] ou aussi [35].

2.4.2. Notons A le fibré vectoriel trivial sur S égal à $H_{2,0}(\mu')^*$. Le groupe G agit de façon évidente sur A, et c est une fonction équivariante, ce que j'écris $c(pg) = g^{-1}c(p)$, $p = (x, g) \in P$.

Sur X, on considère la relation suivante : $x \sim x'$ si $\pi(x) = \pi(x') = s \in S$, et s'il existe g et $g' \in G(s)$ avec $c(x, g) \equiv c(x', g')$. Le caractère équivariant de l'action de G sur c montre que c'est une relation d'équivalence (il reviendrait au même de dire que les orbites de c dans A au-dessus de x et x' sont les mêmes). Cette relation est constructible, donc en restreignant X on peut supposer que c'est un sous-schéma fermé de X, et que c'est une relation d'équivalence au sens schématique. Quitte à restreindre encore X, le résultat rappelé en 1.1.2 nous donne une variété lisse $S^{(1)}$ avec des morphismes lisses et surjectifs $X \xrightarrow{\pi^{(1)}} S^{(1)} \xrightarrow{\psi} S$ tels que cette relation d'équivalence, notée $Z_0^{(1)} \subset Z_0$ soit égale à $X \times_{S^{(1)}} X$, avec $\pi = \psi \circ \pi^{(1)}$.

On réduit alors le groupe structural G, au-dessus de $S^{(1)}$, au sens indiqué plus haut. Comme $S^{(1)}$ paramètre les orbites de l'action de G dans l'image de c, on prend une section T au-dessus de $S^{(1)}$ de cette action (ceci peut se faire, en remplaçant au besoin $S^{(1)}$ et X par des ouverts étales). On prend alors pour $G^{(1)}$ le groupe d'isotropie de T, groupe qui est défini au-dessus de $S^{(1)}$; enfin, on remplace P par l'ensemble $P^{(1)}$ des $p \in P$ vérifiant $c(p) \in T$.

On a ainsi remplacé (S, P, G, θ) par $(S^{(1)}, P^{(1)}, G^{(1)}, \theta^{(1)})$, avec $\theta^{(1)}$ la restriction de θ à $P^{(1)}$.

2.4.3. En écrivant les équations qui fixent $S^{(1)}$ et $\theta^{(1)}$, on a remplacé le groupoïde Z_1 par un groupoïde $Z_1^{(1)} \subset Z_1$. Si $S^{(1)} = S$, on vérifie qu'il est saturé ; mais en général, il ne le sera pas. Si $s'_1, \dots, s'_t$ sont les nouvelles coordonnées de $S^{(1)}$ par rapport à celle de S, pour saturer $Z^{(1)}$ il sera nécessaire (mais non suffisant en général) d'ajouter les équations $\mathrm{d}\bar{s}'_i = \mathrm{d}s'_i$. Pour cela soit $\theta_1, \dots, \theta_n$ une base de $\theta^{(1)}$; écrivons $\mathrm{d}s'_i = \Sigma h_i^j \theta_j$, en abrégé $\mathrm{d}s'_i = \langle h_i, \theta\rangle$ (ceci est possible d'une manière et d'une seule ; je rappelle qu'en tout point de $P^{(1)}$, les θ_i forment une base de T^*X).

Ceci étant, les équations $\mathrm{d}\bar{s}'_i = \mathrm{d}s'_i$ et $\bar{\theta} = \theta$ montrent qu'on doit avoir pour tout i : $\bar{h}_i = h_i$.

Les fonctions h_i, qui sont définies sur $P^{(1)}$, sont encore équivariantes par l'action de $G^{(1)}$. Les équations $\bar{h}_i = h_i$ sont donc analogues, en plus simple, aux équations $\bar{c} = c$. On appelle h_i « l'invariant dérivé » de s'_i, cf. [36] ; ses composantes sont les dérivées de s'_i par rapport aux θ_j (Attention : h_i est une fonction de x et g, pas de x seul).

Ceci étant, on traite les équations $\bar{h}_i = h_i$ comme plus haut la torsion. En prenant les orbites de l'action de $G^{(1)}$ dans $(h_1, \dots, h_t)$, on trouve de nouveaux invariants $S^{(2)}$. Finalement, on doit considérer les dérivés des nouveaux invariants s''_i. On continue ainsi jusqu'à stabilisation des $S^{(i)}$, auquel cas on obtient un groupoïde Z'_1 saturé, décrit par un système (S', P', C', θ').

2.4.4. On prend alors la torsion de Z'_1, et on recommence 2.4.2 et 2.4.3 ; après stabilisation, on obtient un groupoïde Z''_1 sans torsion (et *a fortiori* saturé) ; il sera décrit par un système $(S'', P'', C'', \theta'')$, et sera le plus grand sous-groupoïde sans torsion de Z_1.

On vérifie que, comme indiqué au §2.1, le nombre total d'opérations à faire pour atteindre ce résultat est $\leqslant 3 \dim J_1^*(X)$. Par rapport au raisonnement fait en 1.3.1, la seule modification pourrait provenir de ce qu'on a dû en plusieurs endroits remplacer X par un revêtement fini. À condition de prendre des revêtements irréductibles de X, ce qu'on peut toujours faire, ceci ne change pas le résultat (car ceci ne change, ni la dimension des groupoïdes intermédiaires, ni le nombre de leurs composantes connexes).

2.5. Prolongement et réduction à l'ordre un

2.5.1. Je rappelle rapidement la « réduction à l'ordre un » dans le cas général. Soient X et Y deux variétés lisses.

Soit u un morphisme $X \to Y$; u définit un morphisme $j_k u\colon X \to J_k(X, Y)$, section de l'application source $s\colon J_k(X, Y) \to X$. Par restriction de u au voisinage infinitésimal d'ordre $k+1$ d'un point $a \in X$, on définit un morphisme

$\lambda_{k+1}\colon J_{k+1}(X,Y) \to J_1(J_k(X,Y)/X)$ qui fait de $J_{k+1}(X,Y)$ un sous-schéma fermé de $J_1(J_k(X,Y)/X)$.

Soit maintenant Z_{k+1} un sous-schéma fermé de $J_{k+1}(X,Y)$; notons Z'_1 son image par λ_{k+1} dans $J_1(J_k(X,Y)/X)$. On a évidemment un isomorphisme de faisceaux (sur X) : $\mathcal{O}_{Z_{k+1}} \simeq \mathcal{O}_{Z'_1}$. Z'_1 est un « système d'équations d'ordre un », qui peut être considéré comme la « réduction à l'ordre un » de Z_{k+1}. Leurs propriétés sont essentiellement les mêmes, à part la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels sur $\mathcal{O}_{Z_{k+1}}$ et $\mathcal{O}_{Z'_1}$. Comme il s'agit de questions bien connues, je rappelle rapidement ces propriétés, sans entrer dans les détails (voir notamment [31, pp. 47–48]).

(a) Z_{k+1} et Z'_1 sont simultanément saturés, ou sans torsion. Plus généralement, l'isomorphisme $\mathcal{O}_{Z_{k+1}} \simeq \mathcal{O}_{Z'_1}$ sera conservé si l'on remplace ces anneaux par leurs saturés.

(b) Leurs prolongements d'ordre un (ou plus généralement, d'ordre $\ell \geqslant 1$) sont canoniquement isomorphes. De façon précise, soit $Z_{k+2} = \mathrm{pr}_1 Z_{k+1} \subset J_{k+2}(X,Y)$ le prolongement de Z_{k+1}. Un procédé analogue à celui décrit plus haut envoie $J_{k+2}(X,Y)$ dans $J_2(J_k(X,Y)/X)$. Par restriction, ceci envoie Z_{k+2} isomorphiquement sur un sous-schéma fermé Z'_2 de $J_2(J_k(X,Y)/X)$. On vérifie alors l'égalité $Z'_2 = \mathrm{pr}_1 Z'_1$.

(c) Soient respectivement M et M' les modules caractéristiques de Z_{k+1} et Z'_1. Alors, on a $M'_\ell = M_{\ell+k}$, $\ell \geqslant 1$ et $M'_0 = M_0 \oplus \cdots \oplus M_k$, l'action des ξ étant nulle sur $M_0 \oplus \cdots \oplus M_{k-1}$ et étant l'action habituelle (*i.e.* celle sur M) ailleurs. Il résulte de là que Z_{k+1} et Z'_1 sont simultanément involutifs ou non.

2.5.2. Plaçons-nous maintenant dans la situation qui nous intéresse, en reprenant les notations de 2.1.2, avec $k = 1$. Il résulte de ce qui précède qu'on ne change rien aux majorations obtenues en remplaçant chaque fois l'étape (d) (« prolongement ») par « prolongement, plus réduction à l'ordre un ». En itérant, on n'aura en définitive à faire les opérations (a), (b), (c) que sur des systèmes d'ordre un.

Il reste à voir comment cette opération « prolongement, plus réduction à l'ordre un » se fait en partant d'un sous-groupoïde de $J^*_1(X)$ (qu'on pourra supposer sans torsion) lorsqu'on l'écrit à la Cartan en termes d'espaces de repères et de formes tautologiques.

Comme cette question est souvent décrite dans la littérature, je sera bref. Je pars donc d'un groupoïde $Z_1 \subset J^*_{1,S}$, que je suppose sans torsion. Quitte à remplacer X par un ouvert étale, je peux l'écrire, avec les notations de 2.3.3 :

$\bar{g}^{-1}\overline{\Omega} = \Omega$ (version dissymétrique), ou $\bar{\theta} = \theta$ avec $\theta = g^{-1}\Omega$ (version symétrique).

Le prolongement de Z_1, au sens strict, est donné par la version dissymétrique. On l'obtient en considérant les sous-espaces V de $T(X \times_S \overline{X} \times_S G)$ en chaque point, de dimension $n = \dim X$, et se projetant bijectivement sur la première composante TX (au point correspondant) ; on écrit alors les équations

$$\bar{g}^{-1}\overline{\Omega} - \Omega \mid V = 0, \quad \mathrm{d}(\bar{g}^{-1}\overline{\Omega}) - \mathrm{d}\Omega \mid V = 0.$$

En écrivant explicitement les équations, comme en 2.3.3, on a

$$\mathrm{d}\theta_i = \Sigma\, c_i^{jk}\theta_j \wedge \theta_k + \Sigma d_i^{j\ell}\theta_j \wedge \widetilde{\psi}_\ell. \tag{2.2}$$

Les équations $\mathrm{d}\bar{\theta}_i$ s'écrivent de même. On a aussi

$$\mathrm{d}\omega_i = \Sigma\, {}^\circ c_i^{jk}\omega_j \wedge \omega_k \quad (\text{on écrit } \omega_i \text{ pour } \mathrm{d}s_i,\ 1 \leqslant i \leqslant q).$$

Les équations s'écrivent $\bar{\theta}_i = \omega_i$ et $\mathrm{d}\bar{\theta}_i = \mathrm{d}\omega_i$. Quitte à changer les $\widetilde{\psi}_\ell$, la nullité de la torsion permet de supposer qu'on a ${}^\circ c_i^{jk} = c_i^{jk}$. Les équations $\mathrm{d}\bar{\theta}_i = \mathrm{d}\omega_i$ s'écrivent alors

$$\sum_{j,\ell} d_i^{j\ell}\bar{\theta}_j \wedge \overline{\widetilde{\psi}}_\ell = 0. \tag{2.3}$$

On doit résoudre ces équations, avec $\overline{\widetilde{\psi}}_\ell = \Sigma\pi_\ell^j\bar{\theta}_j$, $\pi_\ell^j \in \mathcal{O}_X$. Ces équations ont la même interprétation cohomologique qu'en 2.3.2 (a) : on considère la différentielle ∂^* de Spencer : $\partial^* \colon T_X^* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mu_1^* \to \Lambda^2 T_X^* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mu_0^*$. Alors les équations s'écrivent $(\pi_\ell^j) \in \ker\partial^* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X$.

Dans la suite, on notera $G^{(1)}$ le sous-espace vectoriel $\ker\partial^*$ de $T_X^* \otimes_{\mathcal{O}_S} \mu_1^*$ restreint à $\lambda(S)$; on l'identifiera au groupe $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ G^{(1)} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ qui admet l'interprétation suivante : soit Z_2 le prolongement de Z_1, et soit Z_2^1 la partie du groupe d'isotropie Z_2^0 formée des éléments nul à l'ordre un. Alors, on a $Z_2^1 = G^{(1)} \times_S X$. Dans la terminologie de [40], $G^{(1)}$ est le (premier) prolongement de G.

2.5.3. La version symétrique du prolongement s'obtient en deux temps :

(a) *Changement de base de X à $X \times_S G$.*

Considérons, d'une façon générale Z_1 un sous-schéma fermé de $J_1(X, Y)$, et soit $X_1 \xrightarrow{\mu} X$ une submersion lisse et surjective alors $p^*Z_1 = X_1 \times_X Z_1$ peut être considéré comme un système différentiel d'ordre un de X_1 vers Y ; c'est le système différentiel obtenu en ajoutant aux équations de Z_1 l'annulation des dérivées par rapport aux variables verticales de $T_{X_1/X}$. Il est clair que cette opération d'image réciproque se traduit par $p^*(\,\cdot\,)$ sur toutes les opérations qu'on aura à effectuer (torsion, saturation, prolongement), et ne change pas l'involutivité.

On va appliquer ceci au système Z_1 qui vient d'être défini, en le ramenant à l'ordre un et en écrivant comme ci-dessus $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega}-\Omega=0$, $\mathrm{d}(\bar{g}^{-1}\overline{\Omega})-\mathrm{d}\Omega=0$. On prend ici $X_1 = X \times_S G$, et on prend l'image réciproque des équations à X_1, ce qui ne change pas les équations. Moyennant la substitution $\bar{g} \mapsto \bar{g}g^{-1}$, on trouve le système $g\bar{g}^{-1}\overline{\Omega}-\Omega=0$, $\mathrm{d}(g\bar{g}^{-1}\overline{\Omega})-\mathrm{d}\Omega=0$; ce système est équivalent à $\bar{\theta}=\theta$, $\mathrm{d}\bar{\theta}=\mathrm{d}\theta$. En explicitant ces dernières équations, avec des notations analogues à (2.2), on trouve la variante de (2.3)

$$\sum_{j,\ell} d_i^{j\ell}\theta_j \wedge (\overline{\widetilde{\psi}}_\ell - \widetilde{\psi}_\ell) = 0\,.$$

(Je rappelle que les $d_i^{j\ell}$ ne dépendent que de s, donc $\bar{d}_i^{j\ell} = d_i^{j\ell}$.) D'où $\overline{\widetilde{\psi}}_\ell = \widetilde{\psi}_\ell + \Sigma\pi_\ell^j\theta_j$, avec $(\pi_\ell^j) \in G^{(2)} \times_S X$.

(b) *Symétrisation.*

En définitive, on trouve pour θ, $\widetilde{\psi}$ des équations analogues à celles du début : $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega}=\Omega$, avec Ω remplacé par $(\theta,\widetilde{\psi})$ et G remplacé par $G^{(1)}$. On symétrise alors comme en 2.2.6.

Par la suite, on suppose G, donc $X \times G$ connexe (si ce n'était pas le cas, on remplacerait G par G_0, la composante connexe de l'identité ; on peut voir que ceci est sans importance pour le problème d'équivalence).

En définitive, on se trouve dans une situation analogue à la situation initiale, avec X remplacé par $P = X \times_S G$ et G par $G^{(1)}$. On continuera ainsi jusqu'à obtenir une situation involutive, avec pour cela la borne donnée par les majorations du théorème 2.5 (les différentes opérations : réduction à l'ordre un et changement de base n'ont rien changé sur ce point).

2.5.4. Quelques remarques pour terminer :

(a) Dans les exemples, l'involutivité pourra se tester avec la définition de Cartan (pour sa relation avec la définition en termes de complexe de Koszul, voir [40] ou [25] ; la version de [25] est reprise dans [31]).

(b) Dans la « seconde étape » qui vient d'être expliquée (X remplacé par P et G par $G^{(1)}$, on peut remarquer que P est un fibré affine sur X. Il en résulte facilement ceci : au cours des constructions où l'on doit prendre des ouverts (ou des ouverts étales), on pourra se contenter de prendre des ouverts (ou des ouverts étales) de X et leur image réciproque dans P. De même, on pourra prendre des images directes sur X, pour n'avoir finalement que des faisceaux sur X, et non sur P.

Bien entendu, le même argument vaut aussi pour les étapes ultérieures, où l'on travaille sur des « espaces de repères itérés » sur X.

(c) Une question laissée ouverte par la méthode suivie est la suivante : au cours de la 2e étape, on obtient des invariants sur P et non sur X. Par suite, on n'aura pas, au moins directement ce qu'on souhaiterait avoir, *i.e.* des invariants « stricts » (*i.e.* définis sur X), ni le groupe d'isotropie Z_2^0 de $Z_2 = \mathrm{pr}_1 Z_1$ (on aura seulement sa partie Z_2^1, comme indiqué en §2.2).

On peut voir que l'on obtient de tels invariants au prix d'un travail supplémentaire. La même remarque s'applique aussi aux étapes ultérieures. Voir à ce sujet un exemple dans [23].

Je remercie N. Kamran pour cette remarque et cette référence.

2.6. Sur le problème d'équivalence de Cartan

2.6.1. Comme indiqué dans l'introduction, je me limiterai à quelques remarques simples et quelques problèmes.

Je reprends la présentation de ce sujet faite dans [32, Chap. II.2]. Soient X' et X'' deux variétés lisses et connexes de même dimension. Quitte à les remplacer par des ouverts étales, on peut les supposer isomorphes.

Soit $X = X' \sqcup X''$ leur somme disjointe, et soit Z_k un sous-groupoïde de $J_k^*(X)$. Quitte à remplacer X' et X'' par des ouverts denses, on peut supposer que les propriétés 1.1.1 (a) et (b) sont satisfaites (la démonstration est analogue au cas « X connexe »). Pour $\ell \leqslant k$, on désignera par Z_ℓ la « projection de Z_k », et on désignera respectivement par Z'_ℓ, Z''_ℓ, Z^a_ℓ, Z^b_ℓ les composants de Z_ℓ au-dessus respectivement de $X' \times X'$, $X'' \times X''$, $X' \times X''$, $X'' \times X'$. On pose alors la définition suivante :

Définition 2.10. — *Soit $\overline{Z}'_k$ (resp. $\overline{Z}''_k$) un sous-groupoïde de $J_k^*(X')$ (resp. $J_k^*(X'')$) une équivalence de $\overline{Z}'_k$ et $\overline{Z}''_k$ est un sous-groupoïde de $Z_k \subset J_k^*(X)$ possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) *La restriction Z'_k de Z_k à $X' \times X'$ est égale à $\overline{Z}'_k$, et de même avec Z''_k et $\overline{Z}''_k$*

(ii) *Les deux projections de Z^a_0 sur X' et X'' ont une image qui contient un ouvert dense.*

On appellera (ii) « surjectivité essentielle » de Z_k. Il reviendrait au même de demander la même propriété pour Z^b_0, car c'est l'inverse de Z^a_0.

De même, si $\overline{Z}' = \{\overline{Z}'_k\}$ et $\overline{Z}'' = \{\overline{Z}''_k\}$ sont des pseudogroupes respectivement sur X' et X'' ; une équivalence entre $\overline{Z}'$ et $\overline{Z}''$ est un pseudogroupe $Z = \{Z_k\}$ sur X, vérifiant les propriétés analogues à (i) et (ii) (pour la définition des pseudogroupes, voir 1.3.3 et [32]).

Dans [32], le problème de savoir si deux pseudogroupes donnés admettent une équivalence est résolu en termes de « groupes virtuels » associés. Néanmoins, ceci est une solution théorique qui ne permet pas de calcul systématique.

Le problème de Cartan, un peu différent, est le suivant : on se donne une équivalence Z_k entre deux groupoïdes Z'_k et Z''_k, et on cherche à savoir si *cette équivalence* se prolonge aux pseudogroupes définis par Z'_k et Z''_k.

On se limite au cas où $k = 1$, et où Z_1 est saturé (le cas où $k \geqslant 2$ pourrait être réduit à celui-là par réduction à l'ordre un ; je n'examinerai pas cette question).

Pour traiter ce problème, la méthode de Cartan consiste à faire sur X les opérations de prolongement telles qu'elles ont été faites sur le cas d'un X connexe aux §§2.2, 2.3, 2.4, 2.5

(a) La première étape, expression en terme d'espaces de repères et de formes tautologiques est sans changement : les hypothèses de saturation et d'équivalence montrant que l'on peut prendre un (S, G) unique pour X' et X''.

(b) Les changements interviennent dans le calcul de la torsion et la saturation : il faut avoir chaque fois les *mêmes invariants* pour X' et X'' (ou, du moins pour des ouverts denses). Si, après toutes ces opérations, on a obtenu un Z_1 sans torsion, et tel que sa « projection » vérifie (ii), alors on voit facilement que $\mathrm{pr}_1 Z_1$ sera encore une équivalence entre $\mathrm{pr}_1 Z'_1$ et $\mathrm{pr}_1 Z''_1$, et aussi que le changement de base de X à $X \times P$ ne modifiera pas ce résultat. On pourra alors recommencer avec X remplacé par $X \times P$, et G par $G^{(1)}$, et ainsi de suite.

(c) Supposons que nous ayons atteint la situation suivante : $Z_\ell \subset J^*_\ell(X)$ est une équivalence, et d'autre part, Z'_ℓ et Z''_ℓ sont involutifs. Pour que Z_ℓ soit involutif, il faut et il suffit que $\mathrm{pr}_1 Z_\ell \to Z_\ell$ soit surjectif (au moins en se restreignant à des ouverts denses), d'après le théorème de Goldschmidt rappelé au §1.3. Ceci est équivalent au fait que $\mathrm{pr}_1 Z_\ell$ est une équivalence. Mais alors, d'après le même théorème, tous les prolongements de Z_ℓ seront involutifs, donc seront des équivalences. En particulier, si Z est le pseudogroupe engendré par Z_ℓ, il sera une équivalence entre Z' et Z'', équivalence qui prolongera celle donnée au départ par Z_ℓ.

2.6.2. Je me contenterai de discuter rapidement le cas, un peu particulier, qui suit : S est un ouvert donné de $\mathbb{C}^q$ de coordonnées $s = (s_1, \ldots, s_q)$; X' et X'' sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$ de coordonnées s et $x' = (x'_1, \ldots, x'_r)$, $x'' = (x''_1, \ldots, x''_r)$ avec $r = n - q$. Enfin G est donné, sous-groupe algébrique de $Gl(n, \mathbb{C}) \times S$, avec $g_{ij} = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant n$. On se donne $(\omega'_1, \ldots, \omega'_n)$, $\omega'_i \in \Gamma(X', \Omega^1_{X'})$ et $(\omega''_1, \ldots, \omega''_n)$, $\omega''_i \in \Gamma(X'', \Omega^1_{X''})$, avec $\omega'_i = \omega''_i = \mathrm{d}s_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$ et l'on étudie l'équation $\Omega'' = g\Omega'$, avec $\Omega' = {}^t(\omega'_1, \ldots, \omega'_n)$ et de même pour Ω''.

Si Ω' et Ω'' sont donnés explicitement, l'étude de cette équation est relativement élémentaire, et peut se faire par les méthodes usuelles de l'algèbre différentielle (par exemple « l'algorithme de Rosenfeld–Gröbner » [6]. Si et seulement si l'un des deux est explicite et l'autre « indéterminé » au sens ci-dessous, Neut [35] remarque que les mêmes méthodes pourront être appliquées moyennant une élimination différentielle (sur ce dernier point, voir [33] et [38]). Néanmoins ces méthodes pourront décider de l'équivalence, sans qu'elles donnent réellement les invariants qui lui sont attachés.

La supériorité de la méthode de Cartan est qu'elle permet de traiter le cas où les deux formes sont indéterminées : on se donne $\omega'_i = \Sigma a'^j_i \mathrm{d}s_j + \Sigma b'^k_i \mathrm{d}x'_k$, $\omega''_i = \Sigma a''^j_i \mathrm{d}s_j + \Sigma b''^k_i \mathrm{d}x''_k$, (avec évidemment $\omega'_i = \omega''_i = \mathrm{d}s_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$), avec a'^j_i, b'^k_i représentant des fonctions $\in \mathbb{C}[s, x']$, et de même avec a''^j_i, b''^k_i, fonctions laissées indéterminées pour l'instant. On traite ces nouvelles variables comme des indéterminées différentielles ; pour cela on introduit de nouvelles variables $a'^{j\alpha}_i$, $b'^{k\alpha}_i$ qui seront ultérieurement remplacées par les dérivées des a'^j_i, b'^k_i par rapport aux s_i et aux x'_i et de même avec les a'' et b''. Aux notations précédentes, c'est essentiellement le point de vue adopté par les auteurs des articles cités.

La méthode de Cartan permet alors de donner des conditions d'équivalence en terme d'égalité des invariants obtenus au cours des divers prolongements. Je renvoie à la littérature pour les exemples. Il serait intéressant, en utilisant les bornes données ci-dessus, de décrire de manière générale les conditions que l'on obtient. Je n'aborde pas cette question qui nécessiterait un assez long développement sortant de mon sujet.

2.6.3. Dans le même ordre d'idées, remarquons que la majoration du théorème 1.5 permet de donner une indication sur le type des conditions auxquelles on peut s'attendre. Quoique la méthode que je vais indiquer soit impraticable dans les exemples (elle exige un nombre de prolongations beaucoup trop élevé), elle me paraît théoriquement intéressante.

(a) Donnons-nous d'abord une équation $\omega'' = g\omega'$ (G et S sont donnés), avec ω'_i et ω''_i explicites. Soit $Z_1 \subset J^*_1(X', X'')$ le système différentiel correspondant. Soient ℓ et m donnés comme au théorème 1.5. Soit alors Z_{m+1} le prolongement d'ordre $m+1$ de Z_1, et soit $\overline{Z}_{\ell+1}$ la projection de Z_{m+1} dans $J^*_{\ell+1}(X', X')$. Alors, Z_{m+1} et $\overline{Z}_{\ell+1}$ ont même projection $\overline{Z}_0$ dans $J^*_0(X', X'') = X' \times X''$. Donc le système donné sera une équivalence si et seulement si $\overline{Z}_0$ vérifie la définition 2.10 (ii).

(b) Revenons à des ω'_i et ω''_i indéterminés ; ceci peut se voir théoriquement au moyen de deux éliminations successives.

On se donne par exemple G par des équations : on part de (g_{ij}), coordonnées de $Gl(n)$ (avec $g_{ij} = \delta_{ij}$ pour $i \leqslant q$, $j \leqslant n$), et on suppose G défini par des équations $P_\ell(s, g_{ij}) = 0$, $P_\ell \in \mathbb{C}[s_i, g_{ij}, \delta^{-1}]$, $\delta = \text{dét}\, g_{ij}$.

On va maintenant considérer $g = (g_{ij})$ comme fonction de s et x', et on notera g^α_{ij} (en abrégé g^α) les dérivées par rapport aux s_i et x'_j. On note $|\alpha|$, comme usuel, l'ordre total d'une dérivation.

De même, on écrira a'^α et b'^α (resp. a''^α et b''^α) les dérivées des a'^j_i et b'^k_i par rapport à (s, x') [resp. (s, x'')], en considérant provisoirement ces expressions comme des variables indépendantes. On fait la même convention sur $|\alpha|$. Enfin, on note x''^α les dérivées des x''_j par rapport à (s, x').

En explicitant les équations de G et l'équation $\omega'' = g\omega'$, et en dérivant ces équations jusqu'à l'ordre $m+1$, on trouve une famille d'équations $Q_\ell(s, g^\alpha, a'^\alpha, b'^\alpha, a''^\alpha, b''^\alpha, x''^\beta) = 0$, avec $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m+1$. Les variables x'_j et x''_j ne figurent pas dans ces équations, contrairement aux s_i. En éliminant les g^α et x''^β, on obtient un ensemble constructible E dans l'espace de coordonnées $(s, a'^\alpha, b'^\alpha, a''^\alpha, b''^\alpha)$. E est réunion finie d'ensembles E_i, qu'on peut supposer disjoints et connexes, avec E_i défini par $R_{ij} = 0$, $S_i \neq 0$, avec R_{ij} et $S_j \in \mathbb{C}[S][a'^\alpha, b'^\alpha, a''^\alpha, b''^\alpha]$, $|\alpha| \leqslant m$.

(c) Si maintenant on substitue aux a', b' (resp. a'', b''') des fonctions régulières X' (resp. X''), et aux a'^α etc. les dérivées correspondantes, on obtient par image réciproque un ensemble $\overline{E}$ constructible dans $X' \times_S X''$ (qui sera en fait vide, ou l'image réciproque d'un des E_i. La condition de la définition 2.10 (ii) pour Z_{m+1}, donc la condition d'équivalence s'obtiendra en regardant les projections de E' dans X' et X'', ce qui revient à éliminer x'' ou x' dans $\overline{E}$.

En fait, en suivant plus attentivement la méthode de Cartan, on peut obtenir une description plus précise de $\overline{E}$ en termes d'invariants différentiels. Je n'entre pas dans les détails qui demanderaient plus de développements.

3. Bornes

Le but de cette section est la démonstration du théorème 1.7. Nous avons vu dans les sections précédentes que les bornes qui interviennent dans le problème d'équivalence de Cartan se ramènent à ce théorème. Cette section est indépendant de la section 2.

3.1. Modules homogènes sur les anneaux de polynômes

3.1.1. Dans le paragraphe 3.1, la situation est la suivante. Soit K un corps de caractéristique 0. On pose $A_n = K[x_1, \ldots, x_n]$ et on munit A_n de la graduation par le degré des polynômes homogènes. Alors, pour $t \in \mathbb{N}^*$, A_n^t est muni d'une graduation, celle de ses composantes. Soit N un sous-module gradué de A_n^t (avec la graduation induite). On pourra se borner au cas où il existe d tel que N soit engendré par N_d. On pose encore $M = A_n^t/N$, et on munit M de la graduation quotient. Je rappelle ceci (cf. §§1.3 et 1.4) : soit $K(x_1, \ldots, x_n; M)$ le complexe de Koszul de M, et soient $H_{p,q}(M)$ ses groupes de cohomologie gradué (p est le degré du complexe, q le degré des éléments de M). On dit que M est k-acyclique (ou que N est k-régulier au sens de Mumford) si l'on a $H_{p,q}(M) = 0$ pour tout p (*i.e.* $p = 0, \ldots, n$) et pour $q \geqslant k$. Le but de ce paragraphe est de donner une borne de l'acyclicité de M en fonction de t, d, n (le nombre de générateurs de N n'intervient pas). Une telle borne sera notée $m(t, d, n)$.

3.1.2. À ma connaissance, la première borne obtenue est celle de Sweeney [41] (beaucoup de géomètres algébristes l'ont ignorée, car elle figure dans un article d'analyse, et aussi parce qu'elle est énoncée en termes de cohomologie de Spencer). Le résultat de Sweeney est le suivant :

(i) $m(t, 1, 0) = 1$;
(ii) $m(t, 1, n) = t\binom{a+n}{n-1} + a + 1$, avec $a = m(t, 1, n-1)$;
(iii) $m(t, a, n) = m(b, 1, n)$ avec $b = \Sigma_0^d\, t\binom{x+n-1}{n-1}$.

Cette majoration est beaucoup plus grande que celles dont je vais parler maintenant (elle est au moins en $(td)^{n!}$ pour t et d tendant vers l'infini).

3.1.3. Dans le cas des idéaux (*i.e.* $t = 1$) une estimation bien meilleure est donnée par Giusti, en s'appuyant sur des résultats antérieurs de Galligo [16]. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal homogène de A_n ; on note $D(\mathfrak{I})$ une borne pour leséléments d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique, et un choix générique des coordonnées. On note encore $D(n,d)$ la borne supérieure des $D(\mathfrak{I})$, pour $\mathfrak{I}$ engendré par des éléments de degré $\leqslant d$. Les calculs de Giusti (*loc. cit.*, §2.11) donnent facilement $D(n,d) \leqslant (2d)^{2^{n-1}}$. D'autre part, un résultat de Bayer–Stillman montre que, avec ce choix de la base de Gröbner, on a $m(1,d,n) \leqslant D(n,d)$, cf. [3] ou [4]. On aura finalement $m(1,d,n) \leqslant (2d)^{2^{n-1}}$ (Giusti obtient la borne un peu plus faible $m(1,d,n) \leqslant 2^{n-1}D(n,d)$).

3.1.4. Il est probable que la méthode de Galligo et Giusti peut aussi s'appliquer au cas $t \geqslant 2$. Quoi qu'il en soit, je vais donner ici une majoration, moins bonne pour $t = 1$, mais obtenue facilement par une méthode élémentaire que je n'ai pas trouvée dans la littérature. Cette méthode s'applique à un corps infini de caractéristique quelconque. Elle repose sur le résultat suivant d'Hermann [22].

Théorème 3.1. — *Soit $u = (u_{ij})$ un morphisme $A_n^s \to A_n^t$ (non nécessairement homogène). on suppose les u_{ij} de degré $\leqslant d$. Alors* $\ker u$ *est engendré par des éléments de A_n^s de degré $\leqslant [d(t+1)]^{2^{n-1}}$.*

(Hermann écrit dt au lieu de $d(t+1)$ à la suite d'une erreur signalée par Lazard [26].)

Nous allons utiliser ce théorème ainsi : soient $u_1, \ldots, u_s \in A_n^t$ des générateurs (homogènes) de degré d de N, et soit u l'application $A_n^s \to A_n^t$ qu'ils définissent. On pose encore $M = A_n^t/N$. Pour $p = 0, \ldots, n$, on va borner le degré de générateurs du module $Z^p(x_1, \ldots, x_n; M)$ des cycles de degré p du complexe de Koszul de M. On peut supposer $p \geqslant 1$. Pour faire ce calcul, on relève ces cycles dans le noyau de l'application $(\delta, \mathrm{id} \otimes u)$: $\wedge^p V \otimes A_n^t \oplus \wedge^{p-1} V \otimes A_n^s \to \wedge^{p-1} V \otimes A_n^t$, δ la différentielle de Koszul, avec $V = \oplus K x_i$; pour borner les générateurs du noyau de cette application, on peut utiliser le résultat d'Hermann, avec t remplacé par $\binom{n}{p-1}t$ et d inchangé (certains coefficients sont de degré d ; les autres, ceux provenant de la différentielle de Koszul, sont de degré un). Le résultat d'Hermann donne alors pour borne $\left[\left(\binom{n}{p-1}t + 1\right)\right]^{2^{n-1}}$, qu'on peut majorer strictement, pour tout p, par $(2^n td)^{2^{n-1}}$. Passant à la cohomologie, on trouve la même borne. Mais les x_i annulent les $H_p(M)$; donc on a le résultat suivant :

Théorème 3.2. — *On a $m(t,d,n) \leqslant (2^n td)^{2^{n-1}}$.*

Pour $t = 1$, le coefficient est moins bon que celui de Giusti d'un facteur 2^{n-1}. Par contre, l'exposant est inchangé.

3.2. Suite : bases de Gröbner

3.2.1. Comme les résultats de complexité sont donnés en général en termes de bases de Gröbner, je vais rappeler leur relation avec l'acyclicité.

Tout d'abord, quelques notations : soit $A_n = K[x_1, \dots, x_n]$ comme au §3.1. J'écris A pour A_n s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Les notations et définitions qui suivent serviront seulement au §3.2. Pour M, un A-module gradué (en degrés $\geqslant 0$) et pour $r \in \mathbb{Z}$, on définit $M(r)$ par $M(r)_p = M_{r+p}$ (on convient que $M_q = 0$ si $q < 0$).

Dans la suite, on utilisera seulement les $M(-r)$, $r \geqslant 0$. Il est équivalent d'écrire $M(-r) = Me$, avec $\deg e = r$.

Par définition, un module *gradué-libre* (de type fini) est de la forme $\bigoplus A(-r_i)$, $r_i \geqslant 0$, la somme étant finie.

Les morphismes de modules gradués sont supposés de degré 0. Alors, si $u = u_{ij}$ est un morphisme $\bigoplus A(-s_j) \to \bigoplus A(r_i)$, les u_{ij} sont homogènes et vérifient $\deg u_{ij} = s_j - r_i$, ou $u_{ij} = 0$.

3.2.2. Soit, comme au §3.1, M un quotient de A^r, muni de la topologie quotient (sans décalage ici ; il est équivalent de dire que M est engendré par M_0). Soient $H_p(M) = \oplus M_{p,q}(M)$ les groupes de cohomologie du complexe de Koszul de M ($0 \leqslant p \leqslant n$, $q \geqslant 0$). La condition précédente signifie encore qu'on a $H_{0,m}(M) = 0$, $m \geqslant 1$.

La relation avec l'acyclicité de M est la suivante (cf. par exemple [31]) : soit $0 \to L_n \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$ une résolution graduée-libre minimale de M. Alors L_p est isomorphe (non canoniquement) à $H_p(M) \otimes_K A(-p)$; en particulier, si M est acyclique (exactement) à partir du degré m, on aura $(L_p)_q = 0$ pour $q \geqslant p + m$. Autrement dit, si $L_p = \bigoplus A(-r_{p,i})$, posant $r_p = \sup r_{p,i}$, on aura $m \geqslant r_p - p + 1$ avec égalité pour un p. On voit en particulier ceci : si $M = A^r/N$, la m-acyclicité de M coïncide avec la m-régularité de N au sens de Mumford [3].

Soit maintenant $0 \to L'_n \to \cdots \to L'_0 \to M \to 0$ une résolution graduée-libre quelconque de M, et écrivons encore $L'_p = \bigoplus A(-r'_{p,i})$, $r'_p = \sup r'_{p,i}$. En utilisant le fait qu'il existe un morphisme injectif de complexes $L^0 \to L'^0$, on trouve qu'on aura

$$m \leqslant \sup_p (r'_p - p + 1)\,. \tag{3.1}$$

3.2.3. Je vais rappeler rapidement la définition et les propriétés générales des bases de Gröbner ; pour les détails, je renvoie à la littérature et notamment à [3] et [18].

(i) On se donne d'abord un ordre total sur les monômes de $K[x_1, \ldots, x_n]$; il revient à se donner un ordre total sur les exposants $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$; on suppose deux choses :
  (a) Il est multiplicatif, *i.e.* $a < b$ entraîne $a+c < b+c$, $a, b, c \in \mathbb{N}^n$;
  (b) Pour tout $a \in \mathbb{N}^n$, on a $0 < a$. Il est équivalent (*loc. cit.*) de demander que « $<$ » soit un bon ordre.

(ii) Soit $e_1, \ldots, e_t$ la base canonique de A^t. On se donne un ordre total sur les monômes $x^a e_i$ de A^t ; on suppose qu'il possède les propriétés suivantes :
  (a) Si $x^a e_i < b^b e_j$, alors, pour tout $c \in \mathbb{N}^n$, on a $x^{a+c} e_i < x^{b+c} e_j$;
  (b) Si $a < b$, pour tout i, on a $x^a e_i < x^b e_i$.

Cela dit, soit N un sous-module de A^t. Pour tout $n \in N$, on note $\mathrm{In}\, n$ le plus grand monôme de n, et on note $\mathrm{In}\, N$ le sous-module qu'ils engendrent.

Par définition une *base de Gröbner* $(n_1, \ldots, n_s)$ de N est une famille (ordonnée) d'éléments de N telle que $(\mathrm{In}\, n_1, \ldots, \mathrm{In}\, n_s)$ soit un système de générateurs de $\mathrm{In}\, N$. On montre qu'une telle famille finie existe toujours, et qu'elle est un système de générateurs de N.

Cette construction s'applique en particulier aux sous-modules gradués de A^r, lui-même gradué par $\deg e_i = r_i$, $r_i \geqslant 0$. Bien entendu, on se limite ici aux systèmes de générateurs et aux bases de Gröbner homogènes.

3.2.4. Soit en particulier N un sous-module gradué de A^r, avec la graduation triviale (*i.e.* $r_i = 0$ pour tout i). Posons $M = A^r/N$, et munissons-le de la graduation quotient.

Donnons-nous un ordre du type précédent sur A^r ; soit $(n_1, \ldots, n_s)$ une base de Gröbner de N, et soit d le degré maximum des n_i. On se propose de borner l'exposant d'acyclicité de M, noté $m(M)$ (ou simplement m) en fonction de t, d, n. On pourrait utiliser le théorème 3.2, mais on va voir qu'on a une bien meilleure borne en utilisant (3.1).

On va étudier d'abord les relations $a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s = 0$, $a_i \in A$ entre les n_i. Les résultats sont les suivants (*loc. cit.*) :

Désignant par $f_1, \ldots, f_s$ la base canonique de A^s, on le munit de l'ordre suivant (« ordre de Buchberger ») : on prend $x^a f_j > x^b f_k$ si $\mathrm{In}\, x^a n_j > \mathrm{In}\, x^b n_k$, ou bien, dans le cas où ces deux monômes sont multiples l'un de l'autre, si $j < k$.

On vérifie que les conditions de 3.2.3 sont satisfaites pour cet ordre, Ceci dit, soit $R \subset A^s$ le module des relations $a_1 n_1 + \cdots a_s n_s = 0$ et soit de même $\overline{R}$ le module des relations de $\operatorname{In} N$. On a des relations évidentes de $\overline{A}$ ainsi : supposons qu'on ait $\operatorname{In} n_j = \lambda_j x^a e_i$, $\operatorname{In} n_k = \lambda_k x^b e_i$ (avec le même e_i). Soit c le plus petit commun multiple de a et b. On a une relation évidente $(a_1, \ldots, a_s)$ avec $a_j = \lambda_k x^{c-a}$, $a_k = -\lambda_j x^{c-b}$, $a_\ell = 0$ si $\ell \neq j, k$. Cette relation s'écrit aussi $t_{tk} \lambda_k x^{c-a} f_j - \lambda_j x^{c-b} f_k$. On vérifie alors ceci, par la théorie des « S-polynômes » *loc. cit.* : les t_{jk} forment une base de Gröbner de $\overline{R}$ et se prolongent en une base de Gröbner (homogène, bien sûr) de R.

3.2.5. Il reste à regarder les degrés d'homogénéité : pour que l'application $A^s \to A^r$ définie par $(n_1, \ldots, n_s)$ soit de degré 0, il faut prendre $\deg f_i = \deg n_i$. D'autre part, soit $A^r \to A^s$ l'application définie par les t_{jk} avec $r =$ nombre des $t_{ij} \neq 0$, et soit e_{jk} la base canonique de A^r. Il faut prendre $\deg e_{jk} = |c|$. Comme $|a| = a_1 + \cdots + a_r \leqslant d$, et $|b| \leqslant d$, on aura $|c| \leqslant 2d$.

On continue maintenant en remplaçant N par R ; par récurrence, on trouve une résolution graduée-libre $L_n \to \cdots \to M \to$ avec $L_p = \bigoplus A(-r_{p,i})$, $r_{p,i} \leqslant pd$

En utilisant 3.1 on trouve finalement le résultat suivant :

Proposition 3.3. — *On a $m(M) \leqslant n(d-1)+1$.*

3.3. D-modules

3.3.1. On reprend maintenant la situation de 1.4.1 que je rappelle rapidement. K est un corps de caractéristique 0, muni de n dérivations commutant $\partial_1, \ldots, \partial_n$. On suppose qu'il existe des $x_i \in K$ tels qu'on ait $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$. On note $D = K\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$ l'anneau des opérateurs différentiels correspondant. D est filtré par les $D_k =$ opérateurs d'ordre $\leqslant k$ en les ∂_i. On note $\overline{D}$ le gradué associé. On a $\overline{D} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, $\xi_i = \operatorname{gr} \partial_i$. Soit N un sous D-module à gauche de D^t, muni de la filtration induite (D^t est muni de la filtration donnée par celle de ses composantes). On pose $M = D^t/N$, et M est muni de la filtration quotient. Alors $\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{N}_p$, $\overline{M}_p$ ont la même signification qu'en 1.4.1.

Comme dans *loc. cit.*, on dit que M est ℓ-acyclique si $\overline{M}$ l'est, *i.e.* si l'on a $H_{p,q}(\overline{M}) = 0$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $q \geqslant \ell$ [les $H_{p,q}(\overline{M})$ sont les groupes de cohomologie gradués du complexe de Koszul $K(\xi_1, \ldots, \xi_n; \overline{M})$].

Je suppose maintenant que N est engendré par un K-sous-espace vectoriel à gauche N'_d de D^t_d (je change un peu ici les notations de 1.4.1). On définit par récurrence les N'_p pour $p \geqslant d$ par $N'_{p+1} = N'_p + \Sigma\partial_i N'_p \subset D^t_{p+1}$. On a évidemment $N'_p \subset N_p$, mais l'inclusion est stricte en général. L'énoncé du théorème 1.7 se décompose alors en les deux énoncés suivants :

Théorème 3.4. — *Le plus petit ℓ tel que M soit ℓ-acyclique est borné par un $M_1(t, d, n)$.*

Théorème 3.5. — *Le plus petit m tel qu'on ait $N_\ell \subset N'_m$ est borné par un $M_2(t, d, n)$.*

Le théorème 3.4 sera établi au §3.5, en général, mais sans borne effective. Dans la suite du présent paragraphe, j'indiquerai des résultats figurant dans la littérature qui donnent une borne effective *pour un K donné* (donc ici, M dépendra de t, d, n et de K).

Au §3.4, je donnerai un résultat qui implique une borne effective de m en fonction de ℓ, t, d, n. (Donc, ceci démontre le théorème 3.5 en supposant 3.4, et donne aussi une borne effective de M_2 si l'on en a une pour M_1.)

3.3.2. Pour démontrer le théorème 3.4, l'idée naturelle est la suivante : il suffit de trouver une borne pour le degré de générateurs de $\overline{N}$: on pourra alors utiliser le théorème 3.2.

En fait, contrairement à une idée répandue, ce point est loin d'être trivial ; c'est même la difficulté principale de la question. Voir à ce sujet les commentaires de [13] et de [2].

En fait, les auteurs de ces deux articles abordent le problème de façon un peu différente, en termes de bases de Gröbner. Avant d'énoncer leurs résultats, je vais donc dire quelques mots sur les bases de Gröbner dans les D-modules. Pour ce sujet, je renvoie à [11] ou [12].

Soit e_i, $1 \leqslant i \leqslant t$ la base canonique de D^t. On va mettre un ordre total sur les monômes $\partial^a e_i$, $a \in \mathbb{N}^n$. On procède comme au §3.2 :on choisit d'abord un ordre total sur les $a \in \mathbb{N}^n$ vérifiant les conditions 3.2.3 (i) (a) et (b). On l'étend ensuite en un ordre sur les $\partial^a e_i$ vérifiant 3.2.3 (ii) (a) et (b).

On aura besoin ici que cet ordre soit *compatible avec les degrés*. Pour cela, on demande la condition supplémentaire suivante :

(c) Si $|a| < |b|$, alors $\partial^a < \partial^b$ et $\partial^a e_i < \partial^b e_j$.

Par exemple, avec cette condition, il résulte de la formule de Leibniz que le terme dominant de $\partial^a p$ est $p\partial^a$, $p \in K$.

On définit alors les bases de Gröbner d'un sous D-module à gauche de $N \subset D^t$ de la même façon que dans le cas commutatif. La condition (c) ci-dessus entraîne ceci : si $(n_1, \ldots, n_s)$ forment une base de Gröbner de $\overline{N}$; cf. articles cités.

Pour avoir une borne de l'acyclicité de M, il suffira donc, en vertu de la proposition 3.3, d'avoir une borne pour une base de Gröbner (pour un ordre vérifiant (c)).

Dans [13], les auteurs donnent une telle borne pour $K = k(x_1, \ldots, x_n)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, k un corps de caractéristique 0 [mais les auteurs n'en donnent pas la valeur explicite, et se contentent de dire que leur borne est en $(td)^{2^{O(n)}}$]. Remarquons en passant que ceci donne aussi une borne pour $L =$ extension algébrique finie de K, avec le prolongement canonique des ∂_i, par un argument de restriction des scalaires à K que je ne détaillerai pas (bien sûr, les bornes vont dépendre de L, car la restriction des scalaires va changer t ; quoiqu'il en soit, ce cas suffit pour l'application au problème d'équivalence de Cartan, avec $k = \mathbb{C}$).

Dans [2], une borne effective est donnée, pour l'algèbre de Weyl $k\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$, et les auteurs indiquent que la même méthode vaut pour l'algèbre D des opérateurs différentiels sur $k(x_1, \ldots, x_n)$. Leur méthode est assez différente de la précédente. Si leur borne est explicite, je note cependant qu'ils se limitent au cas des idéaux à gauche. Il est probable que leur méthode s'applique aussi aux sous-modules de D^t (c'est un point que je n'ai pas vérifié).

3.4. Bornes pour l'appartenance

3.4.1. Avec les notations des théorèmes 3.4 et 3.5, borner M_2 en fonction de (M_1, t, d, n), (ou m en fonction de (ℓ, t, d, n)), est un cas particulier du problème suivant : soient $a_1, \ldots, a_s \in D^t$, et soit $g \in D^t_p$ (d et p donnés). On suppose que g peut s'écrire $g = \Sigma f_i g_i$, $f_i \in D$. On veut, quitte à changer les f_i, borner leurs degrés en fonction de (p, t, d, n) ; dans la suite, on verra qu'une telle borne existe, et on la notera $m(p, t, d, n)$.

Cette question a été étudiée par Grigoriev [19], au moins dans un cas particulier (il suppose $p = d$). Je vais reprendre sa méthode pour traiter le cas général. Cette méthode est inspirée d'une méthode analogue d'Hermann [22] dans le cas des polynômes (mais Hermann, dont le principe est correct, fait des erreurs dans les détails de son raisonnement). Dans le cas commutatif, il intervient des déterminants. Ils sont remplacés ici par le lemme-clef suivant :

LEMME 3.6 (Grigoriev). — *Soient donnés $(t+1)$ vecteurs $a_1, \ldots, a_{t+1} \in D^t_d$. Alors il existe une relation non triviale $f_1 a_1 + \cdots + f_{t+1} a_{t+1} = 0$, avec $f_i \in D$, $\deg f_i \leqslant n(t+1)d$.*

(Dans le cas commutatif, en utilisant les déterminants, td suffit.)

Si les f_i sont de degrés $\leqslant k$, l'application $(f_1, \dots, f_{t+1}) \mapsto f_1 a_1 + \dots + f_{t+1} a_{t+1}$ est une application $D_k^{t+1} \to D_{k+d}^t$. Il suffit de voir que pour k assez grand (précisément, $k \geqslant n(t+1)d$, la dimension sur K du 1er espace est strictement supérieure à celle du second.

Autrement dit, on veut avoir $(t+1)\binom{k+n}{n} > t\binom{k+d+n}{n}$; en prenant des logarithmes, ceci s'écrit

$$\log(1+\tfrac{1}{t}) > \log(1+\tfrac{d}{k+1}) + \dots + \log(1+\tfrac{d}{k+n})\,.$$

A fortiori, il suffit d'avoir $\log(1+\frac{1}{t}) > n\log(1+\frac{d}{k+1})$. Pour tout $t > 0$, on a $\frac{1}{t+1} < \log(1+\frac{1}{t}) < \frac{1}{t}$. Cela donne immédiatement le résultat cherché.

3.4.2. Prenons en particulier $t = 1$; ceci donne le résultat suivant : étant donnés a et b, il existe c et d (resp. c' et d') tels qu'on ait $ac = bd$ (resp. $c'a = d'b$).

Cette condition, dite « condition de Ore » permet de définir sans ambiguïté le *corps des fractions* $F(D)$ de D. Les conditions précédentes signifient dans ce contexte qu'on a $a^{-1}b = cd^{-1}$ et $ba^{-1} = d'^{-1}c'$, autrement dit que les « fractions à droite » sont des « fractions à gauche ». Pour cette question, je renvoie à Björk [5].

Cette condition s'écrit aussi $Da \cap Db \neq 0$ et $aD \cap bD \neq 0$. Par récurrence, on en déduit ceci : si l'on a $a_1, \dots, a_p \neq 0$ alors $Da_1 \cap \dots \cap Da_p \neq 0$ et de même à droite (*i.e.* $(a_1, \dots, a_p)$ ont un multiple commun à gauche et un multiple commun à droite).

3.4.3. Soit k un corps non nécessairement commutatif (par exemple $F(D)$). Rappelons qu'une matrice $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant s$, $a_{ij} \in k$ est dite *régulière* si elle admet un inverse à droite et à gauche. Des raisonnements élémentaires, valables aussi dans le cas commutatif montrent ceci : A est régulière si l'application $A \mapsto Af$, $f = {}^t(f_1, \dots, f_s)$ de k^s dans k^s est injective et de même avec $A \mapsto fA$, $f = (f_1, \dots, f_s)$.

Soit encore $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant s$ une matrice à coefficients dans k. On appelle r le rang de cette matrice la dimension d'une matrice régulière extraite de A. On peut supposer que cette matrice est (a_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Alors les lignes $(a_{r+1,\cdot}), \dots, (a_{t,\cdot})$ sont combinaisons linéaires à gauche des lignes $(a_{i,\cdot})$, $1 \leqslant i \leqslant t$, *i.e.* on a par exemple

$$(a_{r+1,\cdot}) = \sum_1^n \lambda_j (a_{j,\cdot}),\ \ \lambda_j \in k\,.$$

On aura le même résultat à droite pour les colonnes.

Je mentionne encore le résultat suivant que je n'utiliserai pas : le fait pour une matrice carrée d'être régulière est équivalent au fait que son déterminant de Dieudonné est $\neq 0$. Pour cette notion, je renvoie par exemple à [1].

3.4.4. Pour le résultat que j'ai en vue, les notations matricielles sont un peu plus commodes pour les modules à droite que pour les modules à gauche. Le problème est alors le suivant : soit $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant s$, avec $a_{ij} \in D$, et soit $g = {}^t(g_1, \dots, g_t)$ donné. On suppose $\deg a_{ij} \leqslant d$, $\deg g_i \leqslant p$ et on suppose qu'on peut écrire $g = Af$, $f \in D^s$. Quitte à changer f, on veut borner les degrés des f_i.

Soit r le rang de A (considéré comme à coefficients dans $F(D)$) : d'après le résultat rappelé plus haut, on aura par exemple $(a_{r+1,\cdot}) = \sum_1^r \lambda_j (a_{j,\cdot})$; donc on aura aussi $g_{r+1} = \sum_1^r \lambda_i g_i$, et de même avec $g_{r+2}, \dots, g_t$. Les dernières équations sont donc conséquence des r premières et on peut les oublier. On peut donc supposer sans inconvénient qu'on a $r = t \leqslant s$.

3.4.5. On va faire les majorations par récurrence sur le nombre de variables. Pour cela, on va d'abord montrer ceci : quitte à faire un changement linéaire dans $Gl(n, \mathbb{Q})$ sur $\partial_1, \dots, \partial_n$, on peut supposer que $f_{t+1}, \dots, f_s$ sont de degré en $\partial_1 < n(t+1)d$. Ceci est une conséquence facile du lemme 3.6. Traitons par exemple le cas de f_{t+1} : d'après le lemme, il existe une relation $a_1\varphi_1 + \cdots + a_{t+1}\varphi_{t+1} = 0$, avec $a_i =$ la colonne $(a_{\cdot,i})$, et $\deg \varphi_i \leqslant n(t+1)d$, $\varphi_{t+1} \neq 0$.

Un changement générique de coordonnées permet de supposer que φ_{t+1} est *régulier* en ∂_1, ce qui veut dire ceci : si $q = \deg \varphi_{t+1}$, alors le terme en ∂_1^q de φ_{t+1} est $\neq 0$.

Si l'on a maintenant une relation $g = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s$, on écrit $f_{t+1} = \varphi_{t+1} f'_{t+1} + f''_{t+1}$, avec $\deg_{\partial_1} f''_{t+1} < q \leqslant n(t+1)d$, et on remplace f_{t+1} par f''_{t+1} et f_i par $f_i - a_i\varphi_i f'_{t+1}$, $1 \leqslant i \leqslant t$.

3.4.6. On va réduire par le même procédé le degré en ∂_1 des g_i. Traitons par exemple le cas de g_1 : soit $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$ et appliquons le lemme 3.6 aux colonnes $(e_1;\ a_1, \dots, a_t)$. On trouve qu'il existe $\chi, \psi_1, \dots, \psi_t$, de degré $\leqslant n(t+1)d$ tels qu'on ait $\chi e_1 = \Sigma a_i \psi_i$. On fait alors un changement de coordonnées dans $Gl(n, \mathbb{Q})$ pour rendre χ régulier en ∂_1. En divisant g_1 par χ, on est ramené aux deux cas suivants :

(a1) $\deg_{\partial_1} g_1 < n(t+1)d$ et $\deg g_1 \leqslant p$;
(b1) $g_2 = \cdots = g_p = 0$, $\deg g_1 \leqslant p$, $\deg f_i \leqslant \deg \psi_i - \deg \chi + p \leqslant n(t+1)d + p$.

On fait de même avec $g_2, \ldots, g_t$, en prenant chaque fois le même changement de coordonnées (et le même qu'en 3.4.5 ; c'est possible parce qu'une famille générique d'éléments de $Gl(n, \mathbb{Q})$ convient). On est alors ramené aux deux cas suivants :

(a) $\deg_{\partial_1} g_i < n(t+1)d$ et $\deg g_i \leqslant p$;
(b) $\deg g_i \leqslant p$, $\deg f_i \leqslant n(t+1)d + p$.

Le cas (a) jouera le rôle principal dans les récurrences.

3.4.7. On suppose les réductions précédentes faite, et qu'on est dans le cas 3.4.6 (a). On va voir que, sous une condition qu'on peut réaliser par un $a \in Gl(n, Q)$ générique, on a aussi $\deg_{\partial_1} f_i < 2n(t+1)d$.

Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 3.7. — *Notons A' (resp. A'') la matrice (a_{ij}), $1 \leqslant i$, $j \leqslant t$ (resp. $1 \leqslant i \leqslant t$, $t+1 \leqslant j \leqslant s$). Alors il existe une matrice $C = (c_{ij})$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant t$, $c_{ij} \in D$, $\deg c_{ij} \leqslant ntd$ telle que CA' soit diagonale et régulière.*

Notons A'_i la matrice A' privée de la colonne a_i. D'après le lemme 3.6, il existe $C_i = (c_{i,1}, \ldots, c_{i,t}) \in D^t$, $\deg c_{i,j} \leqslant ntd$, non identiquement nulle, telle qu'on ait $C_i A'_i = 0$. Comme A' est régulière, on a $C' a_i = \delta_i \neq 0$. Soit alors C la matrice de lignes C_i. On a

$$CA' = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_t) = \Delta.$$

Le même changement de variables qu'on a fait en 3.4.5 et 3.4.6 permet de supposer que les δ_i sont régulières en ∂_1.

Considérons alors l'équation $g = Af$, qu'on écrit $g = A'f' + A''f''$, les coefficients de g et de f'' étant de degré $< n(t+1)d$ en ∂_1. En multipliant par C, on trouve qu'on a $\Delta f' = Cg - CA''f''$. Comme les termes du 2e membre sont de degré en $\partial_1 < 2n(t+1)d$, les coefficients de f' auront aussi cette propriété.

3.4.8. On se ramène alors de n à $n-1$ variables en développant en série par rapport à ∂_1 (on met les puissances de ∂_1 à gauche). On se ramène alors d'un système d'équations en $\partial_1, \ldots, \partial_n$ à un système en $\partial_2, \ldots, \partial_n$, avec les changements suivants : p et d sont inchangés, n est remplacé par $n-1$, et t par $2nt(t+1)d$. La borne $m(p,t,d,n)$ considérée en 3.4.1 se calcule alors à partir de $m(p, 2nt(t{+}1)d, d, n{-}1)$; pour avoir l'expression exacte, il faut tenir compte du degré en ∂_1 des facteurs, ce qui ajoute une correction $2n(t+1)d$, et il faut aussi tenir compte du cas *b)*. La formule finale est la suivante :

$$m(p,t,d,n) \leqslant \sup\big[p + n(t+1)d, m\big(p, 2nt(t+1)d, d, n-1\big) + 2n(t+1)d\big]\,.$$

On a

$$m(p,t,d,1) \leqslant \sup\big(p + (t+1)d, 2(t+1)d\big)\, m.$$

On déduit facilement de là le résultat qui suit :

Théorème 3.8. — *On a* $m(p,t,d,n) \leqslant p + (4ntd)^{2^{n-1}}$.

Au terme p près, on obtient donc une borne en « double exponentielle » comme il est usuel dans ce sujet.

Remarque 3.9. — Dans la démonstration précédente, seule l'hypothèse d'indépendance de $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sur K est intervenue. On n'a pas besoin de l'hypothèse supplémentaire de l'existence des x_j, avec $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$. Par contre, au prochain paragraphe, cette hypothèse sera indispensable.

3.5. Bornes non effectives

3.5.1. Il s'agit ici de démontrer le théorème 3.4. Je reprécise la situation : (K,∂) est un corps de caractéristique 0, muni de n dérivations commutant entre elles (n est un entier fixé). On fait aussi l'hypothèse qui vient d'être rappelée ; elle est équivalente au fait que (K,∂) contient $\big(\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial}{\partial x_i}\big)$. On note $D(K)$ l'anneau des opérateurs différentiels correspondants.

On se donne deux entiers $t, d \geqslant 1$. On va se donner encore s éléments $a_1, \ldots, a_s$ de D^t, de degré $\leqslant d$ (le nombre s est sans importance ; quitte à répéter les a_i, on peut prendre $s =$ dimension sur K de $D^t_d = t\binom{n+d}{n}$).

On considère alors N le sous D-module à gauche de D^t, engendré par les a_i et on pose $M = D^t/N$. On note ℓ le plus petit entier tel que M (*i.e.* $\overline{M}$, son gradué associé) soit ℓ-acyclique. On veut montrer qu'il existe une borne $\ell \leqslant M_1(t,d,n)$.

Pour obtenir ce résultat, choisissons un ordre sur les monômes de D^t compatible avec la graduation, comme expliqué en 3.3.2. On gardera cet ordre une fois pour toute, indépendamment de K. Compte tenu de 3.3.2 et de la proposition 3.3, il suffit pour cela d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.10. — *Pour tous les systèmes (K, ∂, a_i) vérifiant les conditions précédentes, le $D(K)$ module à gauche N correspondant admet une base de Gröbner dont les éléments sont bornés par un $M_3(t,d,n)$.*

3.5.2. Pour obtenir ce résultat, on va montrer que la « famille » des (K, ∂, a_i) se décompose en un nombre fini de familles telles que, dans chacune, on ait, en gros « la même base » de Gröbner (que ladite « famille » ne soit pas un ensemble n'est pas gênant ici ; on va voir tout de suite qu'on peut se ramener à un ensemble).

On va écrire les choses de façon universelle : on développe les a_i en écrivant $a_i = (a_{ij})$, $1 \leqslant j \leqslant t$, $a_{ij} = \sum_{|a| \leqslant d} a_{ij}^{\alpha} \partial^{\alpha}$, $a_{ij}^{\alpha} \in K$. Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, on écrit $a_{ij}^{\alpha,\beta} = \partial^{\beta} a_{ij}^{\alpha}$; en particulier $a_{ij}^{\alpha,0} = a_{ij}^{\alpha}$.

Ceci étant, on considère l'anneau $R = \mathbb{Q}\big[x_1, \dots, x_n, A_{ij}^{\alpha,\beta}\big]$ les $A_{ij}^{\alpha,\beta}$ étant des indéterminées, avec $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant d$. On munit R des dérivations $\partial_1, \dots, \partial_n$ définies par $\partial_k(x_i) = \delta_{ki}$, $\partial_k A_{ij}^{\alpha,\beta} = A_{ij}^{\alpha,\beta+\varepsilon_k}$, ε_k l'indice $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 à la place k).

Ceci étant, une donnée (K, ∂, a_i) définit un morphisme d'anneaux différentiels $u \colon R \to K$; on envoie x_i en x_i,$A_{ij}^{\alpha,\beta}$ en $a_{ij}^{\alpha,\beta}$.

Le noyau de u est un idéal différentiel premier $\mathfrak{q} \subset R$. Réciproquement, si on prend un idéal différentiel premier $\mathfrak{q} \subset R$, le corps des fractions $F(R/\mathfrak{q})$ est muni de façon évidente d'une structure (∂, a_i) du type précédent (c'est ici que l'hypothèse d'existence des x_i intervient ; si on ne le faisait pas, les ∂_i risqueraient de ne plus être indépendants après le passage au quotient).

Le passage $(K, \partial, a_i) \to$ idéal $\mathfrak{q} \to$ corps (K', ∂', a'_i) ne donne pas forcément $K' = K$; mais K' est un sous-corps différentiel de K sur lequel N est défini ; et il suffit visiblement d'établir le résultat pour les corps obtenus ainsi.

Pour simplifier les notations, on notera $Z = \operatorname{specdiff} R$ l'ensemble des idéaux différentiels premiers de R. Pour $\mathfrak{p} \in Z$, on notera $V(\mathfrak{p})$ (« variété de $\mathfrak{p}$ », ou clôture de Zariski de $\mathfrak{p}$) l'ensemble des $\mathfrak{q} \in Z$ vérifiant $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$.

3.5.3. Soit $F(R)$ le corps des fractions de R, et $D(R)$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $F(R)$ (pas nécessairement dans R). Soit $\mathcal{N} \subset D(R)^t$ le $D(R)$-module à gauche engendré par les $A_{ij} = \Sigma A_{ij}^{\alpha,0} \partial^{\alpha}$.

Prenons une base de Gröbner $(n_1, \dots, n_p)$ de $\mathcal{N}$ pour l'ordre choisi. On suppose les n_i normalisés ainsi : pour tout i, le monôme dominant de n_i a pour coefficient 1. Il existe alors $f \in R$, $f \neq 0$ ayant la propriété suivante : les coefficients des n_i, et ceux de l'expression des n_i par les (A_{ij}) sont dans $R[f^{-1}]$.

Soit maintenant $\mathfrak{q} \in Z$. Par restriction, $\mathcal{N}$ donne un sous-module $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ de $D(R/\mathfrak{q})^t$, $D(R/\mathfrak{q})$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans le corps des fractions $F(R/\mathfrak{q})$.

Supposons en particulier qu'on a $f \notin \mathfrak{q}$. Alors les n_i passent au quotient et donnent des éléments $\bar{n}_i \in \mathcal{N}(\mathfrak{q})$. Le point crucial est le suivant :

Lemme 3.11. — *Les $\bar{n}_i$ forment une base de Gröbner de $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$.*

Comme les n_i sont à coefficients dans $R[f^{-1}]$, avec des coefficients dominants égaux à 1, les quotients et les restes de la division d'un élément de $D(R)^t$ à coefficients dans $R[f^{-1}]$ par $(n_1, \ldots, n_p)$ sont encore à coefficients dans $R[f^{-1}]$ (pour cette question de division, voir [18] dans le cas commutatif, et [12] ou [11] dans le cas des anneau d'opérateurs différentiels).

Ces opérations passeront alors au quotient mod $\mathfrak{q}$. On en déduit :

(a) Les restes de la division des générateurs $(\overline{A}_{ij})$ de $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ par $(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_p)$ sont nuls ;
(b) Les restes de la division des S-polynômes $S(\bar{n}_i, \bar{n}_j)$ par les $(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_p)$ sont nuls.

Alors, le critère de Buchberger (*loc. cit.*) donne le résultat cherché.

3.5.4. Soit (f) l'idéal différentiel réduit (*i.e.* égal à sa racine) engendré par f, et soit $(f) = \cap\, \mathfrak{p}_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$ une décomposition de (f) en idéaux différentiels premiers (cf. [37]). Pour $\mathfrak{q} \in Z$, la condition $f \notin \mathfrak{q}$ équivaut à $\mathfrak{q} \notin V(\mathfrak{p}_1) \cap \cdots \cap V(\mathfrak{p}_q)$.

Pour les idéaux vérifiant cette condition, notre problème est résolu par le lemme qui précède. Sinon, il existe au moins un i tel qu'on ait $q \in V(\mathfrak{p}_i)$; choisissons un tel i, par exemple le plus petit, et recommençons avec R remplacé par $R/\mathfrak{p}_i$. Soit $\mathcal{N}(\mathfrak{p}_i)$ le sous-module de $D(R/\mathfrak{p}_i)^t$ obtenu par passage au quotient à partir de $\mathcal{N}$, et prenons-en une base de Gröbner. En répétant l'argument ci-dessus, on trouve qu'il existe $\mathfrak{p}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,u}$ strictement contenus dans $\mathfrak{p}_i$ et tels que, pour $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_i) - \bigcup V(\mathfrak{p}_{i,j})$ la base de Gröbner précédente se restreint en une base de Gröbner de $\mathcal{N}(\mathfrak{q}) \subset D(R/\mathfrak{q})^t$.

Par récurrence, on fabrique une famille finie d'indices $(i_1, \ldots, i_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ et d'idéaux différentiels premiers $\mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_\ell} \in Z$, avec $\mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}} \supsetneq \mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}j}$ tels que, pour $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}}) - \bigcup_j V(\mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}j})$, les $\mathcal{N}(\mathfrak{q})$ correspondants aient une base de Gröbner « constante », en un sens évident.

Pour terminer, on applique le théorème de Ritt–Raudenbush [37] : une suite croissante d'idéaux réduits (et *a fortiori*, d'idéaux premiers) est stationnaire. Un argument classique montre alors que l'arbre des $\mathfrak{p}_{i_1,\ldots,i_\ell}$ qu'on vient de fabriquer est fini. Ceci achève la démonstration.

Le raisonnement précédent peut être vu comme une variante différentielle de la « stratification platifiante » classique en géométrie algébrique ; voir par exemple [18]. À ma connaissance, ce type d'arguments a été utilisé pour la première fois par Grothendieck dans son étude des schémas de Hilbert ; voir [20].

Bibliographie

[1] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, translated from the 1957 English original by M. Lazard, edited and with a foreword by G. Julia, x+211 pages.

[2] M. Aschenbrenner & A. Leykin, « Degree bounds for Gröbner bases in algebras of solvable type », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), n° 8, p. 1578-1605.

[3] D. Bayer & D. Mumford, « What can be computed in algebraic geometry ? », in *Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991)*, Sympos. Math., vol. 34, Cambridge University Press, 1993, p. 1-48.

[4] D. Bayer & M. Stillman, « A criterion for detecting m-regularity », *Invent. Math.* **87** (1987), n° 1, p. 1-11.

[5] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 21, North-Holland Publishing Co., 1979, xvii+374 pages.

[6] F. Boulier, F. Ollivier, D. Lazard & M. Petitot, « Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals », Technical report IT 306, LIFL, Université de Lille, 1997.

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, 1980, Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique., vii+216 pages.

[8] R. L. Bryant, S.-s. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt & P. A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 18, Springer, 1991, viii+475 pages.

[9] É. Cartan, « Les sous-groupes des groupes continus de transformations », *Ann. de l'Éc. Norm.* **25** (1908), p. 57-194.

[10] ———, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Actualités Sci. Ind., vol. 994, Hermann et Cie., 1945, 214 pages.

[11] F. J. Castro-Jiménez, « Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels », in *Géométrie algébrique et applications, III (La Rábida, 1984)*, Travaux en Cours, vol. 24, Hermann et Cie., 1987, p. 1-19.

[12] F. J. Castro-Jiménez & M. Granger, « Explicit calculations in rings of differential operators », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, Séminaires et Congrès, vol. 8, Société Mathématique de France, 2004, p. 89-128.

[13] A. L. Chistov & D. Y. Grigoriev, « Complexity of a standard basis of a D-module », *St. Petersbg. Math. J.* **20** (2009), n° 5, p. 709-736.

[14] P. Gabriel, « Construction de pré-schémas quotients », SGA 62-63, fasc. 2a, exposé 5, I.H.E.S.

[15] R. B. Gardner, « Differential geometric methods interfacing control theory », in *Differential geometric control theory (Houghton, Mich., 1982)*, Progr. Math., vol. 27, Birkhäuser, 1983, p. 117-180.

[16] M. Giusti, « Some effectivity problems in polynomial ideal theory », in *EUROSAM 84 (Cambridge, 1984)*, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 174, Springer, 1984, p. 159-171.

[17] H. L. Goldschmidt, « Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations », *J. Differ. Geom.* **1** (1967), p. 269-307.

[18] G.-M. Greuel & G. Pfister, *A* **Singular** *introduction to commutative algebra*, 2nd extended éd., Springer, 2007, With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann, with 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX), xx+689 pages.

[19] D. Y. Grigoriev, « Complexity of solutions of linear systems in rings of differential operators », *J. of Math. Sciences* **70** (1994), nº 4, p. 1873-1880.

[20] A. Grothendieck, « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki*, vol. 6, Société Mathématique de France, 1995, p. 249-276.

[21] V. W. Guillemin & S. Sternberg, « An algebraic model of transitive differential geometry », *Bull. Am. Math. Soc.* **70** (1964), p. 16-47.

[22] G. Hermann, « Zur Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale », *Math. Ann.* **95** (1926), nº 1, p. 736-788.

[23] L. Hsu & N. Kamran, « Classification of second-order ordinary differential equations admitting Lie groups of fibre-preserving point symmetries », *Proc. London Math. Soc.* **58** (1989), nº 2, p. 387-416.

[24] N. Kamran, K. G. Lamb & W. F. Shadwick, « The local equivalence problem for $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painlevé transcendents », *J. Differ. Geom.* **22** (1985), nº 2, p. 139-150.

[25] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publicações da Sociedade de Matemática de São Paulo, 1967, 75 pages.

[26] D. Lazard, « Algèbre linéaire sur $K[X_1, \cdots, X_n]$, et élimination », *Bull. Soc. Math. France* **105** (1977), nº 2, p. 165-190.

[27] B. Malgrange, « Équations de Lie. I », *J. Differ. Geom.* **6** (1972), p. 503-522.

[28] ———, « Équations de Lie. II », *J. Differ. Geom.* **7** (1972), p. 117-141.

[29] ———, « Le groupoïde de Galois d'un feuilletage », in *Essays on geometry and related topics, Vol. 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, p. 465-501.

[30] ———, « Cartan involutiveness = Mumford regularity », in *Commutative algebra (Grenoble/Lyon, 2001)*, Contemporary Mathematics., vol. 331, American Mathematical Society, 2003, p. 193-205.

[31] ———, *Systèmes différentiels involutifs*, Panoramas et Synthèses, vol. 19, Société Mathématique de France, 2005, vi+106 pages.

[32] ———, « Pseudogroupes de Lie et théorie de Galois différentielle », `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00469778`, 2010.

[33] D. Marker, *Model theory: An introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 217, Springer, 2002, viii+342 pages.

[34] T. Morimoto, « Sur le problème de l'équivalence des structures géométriques », *Jap. J. Math.* **9** (1983), nº 2, p. 293-372.

[35] S. Neut, « Implantation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence de Cartan », Thèse, Université de Lille 1, LIFL (France), 2003.

[36] P. J. Olver, *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge University Press, 1995, xvi+525 pages.

[37] J. F. Ritt, *Differential algebra*, Colloquium Publications, vol. 33, American Mathematical Society, 1950, viii+184 pages.

[38] A. Seidenberg, « An elimination theory for differential algebra », *Univ. California Publ. Math.* **3** (1956), p. 31-65.

[39] J.-P. Serre, « Espaces fibrés algébriques », in *Exposés de séminaires. 1950–1999*, Documents Mathématiques, vol. 1, Société Mathématique de France, 2001, Séminaire Chevalley, 2e année (1958), exp. 1.

[40] I. M. Singer & S. Sternberg, « The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups », *J. Anal. Math.* **15** (1965), p. 1-114.
[41] W. J. Sweeney, « The D-Neumann problem », *Acta Math.* **120** (1968), p. 223-277.