ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

PIERRE MAZET ET ERIC SAIAS

Étude du graphe divisoriel 4

Tome XXIX, nº 4 (2020), p. 971-975.

<http://afst.centre-mersenne.org/item?id=AFST_2020_6_29_4_971_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXIX, n° 4, 2020
pp. 971-975

Étude du graphe divisoriel 4 [(*)]

Pierre Mazet [(1)] et Eric Saias [(2)]

Résumé. — Nous montrons qu'il existe une permutation f des entiers positifs telle que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{ppcm}(f(n), f(n+1)) \leqslant cn(\log n)^2$, où c est une constante positive. Cela améliore des résultats d'Erdős, Freud et Hegyvári (1983), et de Chen et Ji (2011).

Abstract. — We show that there exists a permutation f of the positive integers such that for all $n \geqslant 2$, $\mathrm{lcm}(f(n), f(n+1)) \leqslant cn(\log n)^2$, where c is a positive constant. It improves previous results of Erdős, Freud and Hegyvári (1983), and of Chen and Ji (2011).

1. Introduction

Appelons chaîne-permutation du graphe divisoriel de $\mathbb{N}^*$ (ou plus simplement chaîne-permutation) toute application bijective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n)$ est un diviseur ou un multiple de $f(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Il est facile de construire des chaînes-permutations. Voici les premières valeurs de l'une d'entre elles :

$$1 - 2 - (2 \times 3) - 3 - (3 \times 4) - 4 - (4 \times 5) - 5 - (5 \times 7) - 7 - (7 \times 8) - 8 \cdots$$

On a ici $\limsup_{n \to +\infty} f(n)/n^2 = 1/4$. Le résultat principal de cet article, énoncé ci-dessous, montre que la convergence vers l'infini de $f(n)$ peut être beaucoup plus lente.

Théorème 1.1. — *Il existe une constante c_1 et une chaîne-permutation f telles que pour tout $n \geqslant 2$, on a*

$$f(n) \leqslant c_1 n (\log n)^2.$$

[(*)] Reçu le 26 juillet 2018, accepté le 6 février 2019.
[(1)] — piermazet@laposte.net
[(2)] Sorbonne Université, UMR8001, LPSM, 4 Place Jussieu 75252 Paris Cedex 05 (France) — eric.saias@upmc.fr
Article proposé par Damian Rössler.

Intéressons-nous maintenant à des permutations de $\mathbb{N}^*$ qui ne sont pas nécessairement des chaînes-permutations. Notons $[a, b]$ le plus petit commun multiple des entiers a et b. En 1981, Erdős, Freud et Hegyvári ont montré qu'il existe une constante c_2 et une permutation f de $\mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n \geqslant 3$, on a

$$[f(n), f(n+1)] \leqslant n \exp\{c_2 \sqrt{\log n} \log\log n\}$$

(voir [2, théorème 3]). En modifiant légèrement la permutation choisie par Erdős, Freud et Hegyvári, Chen et Ji [1] ont montré trente ans plus tard que l'on peut remplacer la fonction à l'intérieur de l'accolade par $(2\sqrt{2} + o(1))\sqrt{\log n \log\log n}$. Il découle immédiatement de notre théorème une amélioration de leur résultat.

Corollaire 1.2. — *Il existe une constante c_3 et une permutation f de $\mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n \geqslant 2$, on a*

$$[f(n), f(n+1)] \leqslant c_3 n (\log n)^2.$$

Signalons que Tenenbaum [6] conjecture que l'on peut remplacer l'expression à droite du signe $\leqslant$ dans cette dernière formule par $n(\log n)^{1+o(1)}$. L'exposant 1 de $\log n$ serait alors optimal car on sait que ([4, théorème 3]) pour toute permutation f de $\mathbb{N}^*$, on a

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{[f(n), f(n+1)]}{n \log n} > 0.$$

Pour établir le théorème, on utilise une construction de chaîne finie due à Tenenbaum (voir [6, paragraphe 4]) et un résultat relatif aux entiers à diviseurs denses ([3, théorème 1]) (pour la définition de ces termes, voir le paragraphe suivant). Même si cela ne nous est pas utile ici, signalons au passage que le récent travail de Weingartner [7] fournit un équivalent asymptotique de la fonction de comptage des entiers à diviseurs y-denses, uniforme en y.

2. Notations

Appelons chaîne toute application injective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n)$ est un diviseur ou un multiple de $f(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Appelons aussi chaîne finie de longueur l tout l-uplet $\mathcal{C} = a_1, a_2, \ldots, a_l$ d'entiers positifs deux à deux distincts et tels que a_i est un diviseur ou un multiple de a_{i+1} pour tout entier i de l'intervalle $[1, l-1]$. On notera $\operatorname{longueur}(\mathcal{C}) := l$.

On note pour tout entier $n \geqslant 2, P^+(n)$ (respectivement $P^-(n)$) le plus grand (resp. petit) facteur premier de n. On pose de plus $P^+(1) = 1$.

On note

$$F(n) := \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \max\{dP^-(d) : d|n, d > 1\} & (n \geqslant 2). \end{cases}$$

On dit qu'un entier n est à diviseurs y-denses si $F(n) \leqslant yn$. Cette dénomination provient de l'identité

$$\frac{F(n)}{n} = \max_{1 \leqslant i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)}$$

où $1 = d_1(n) < d_2(n) < \cdots < d_{\tau(n)}(n) = n$ désigne la suite croissante des diviseurs de n (voir [5, lemme 2.2]).

3. Preuve du théorème

Soit p un nombre premier.

Au paragraphe 4 de [6], Tenenbaum construit une famille de chaînes finies $\Gamma(x, p)$ pour tout réel $x \geqslant 2$. On s'intéresse ici au cas particulier $x = 2p^2$ pour lequel on a les quatre propriétés suivantes.

- $\Gamma(8, 2) = 1 - 2$.
- Pour tout $p \geqslant 3, \Gamma(2p^2, p) = 1 - p - \cdots - 2$.
- Pour tout $p, \Gamma(2p^2, p)$ est constituée d'entiers m sans facteur carré et tels que $m \leqslant 2p^2, P^+(m) \leqslant p$.
- Pour tout $p, \Gamma(2p^2, p)$ contient tous les entiers m sans facteur carré et tels que $F(m) \leqslant p^2$.

Cette dernière propriété combinée avec le théorème 1 de [3] entraîne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout p

$$\text{longueur}(\Gamma(2p^2, p)) \geqslant cp^2 / \log p. \tag{3.1}$$

Nous modifions légèrement $\Gamma(2p^2, p)$ en considérant la chaîne finie $\mathcal{D}(p)$ obtenue en déplaçant dans $\Gamma(2p^2, p)$ le 1 initial pour le mettre en final, puis en multipliant le tout par le nombre premier p^* suivant immédiatement p. On a donc pour $p \geqslant 3, \mathcal{D}(p) = p^*p - \cdots - 2p^* - p^*$.

Soit f_0 la suite commençant à 1, puis obtenue par concaténation des $\mathcal{D}(p)$.

$$f_0 : 1 - \mathcal{D}(2) - \mathcal{D}(3) - \mathcal{D}(5) - \mathcal{D}(7) - \cdots$$

On vérifie que f_0 est une chaîne formée d'entiers sans facteur carré. On pose $q_0 = 1$.

On construit alors par récurrence une suite croissante $(q_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres égaux à 1 ou premiers et des chaînes f_k construites à partir de f_0 en remplaçant, pour $p \leqslant q_k$, la chaîne finie $\mathcal{D}(p)$ par une chaîne finie $\mathcal{C}(p)$ à définir.

Supposons construits $q_0 \leqslant q_1 \leqslant \cdots \leqslant q_{k-1}$, $\mathcal{C}(p)$ pour $p \leqslant q_{k-1}$ ainsi donc que $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$. Si k est dans l'image de f_{k-1}, on pose $q_k = q_{k-1}$, il n'y a pas de nouvelle chaîne finie $\mathcal{C}(p)$ à définir et donc $f_k = f_{k-1}$.

On suppose dorénavant que k n'est pas dans l'image de f_{k-1}.

On choisit q_k un nombre premier tel que $q_k > q_{k-1}$ et

$$q_k \geqslant k^2. \tag{3.2}$$

On définit alors $\mathcal{C}(p)$ pour $q_{k-1} < p \leqslant q_k$ de la manière suivante.

- Si $q_{k-1} < p < q_k$, on pose $\mathcal{C}(p) = \mathcal{D}(p)$.
- Si $p = q_k$, on choisit $\mathcal{C}(p) = pk^2 - k - p^*pk^2 - \mathcal{D}(p)$.

Le fait que $\mathcal{D}(p)$ est formée d'entiers sans facteur carré assure que les éléments de $\mathcal{C}(p)$ sont deux à deux distincts et donc que $\mathcal{C}(p)$ est une chaîne finie.

On pose alors

$$f_k : 1 - \mathcal{C}(2) - \mathcal{C}(3) - \cdots - \mathcal{C}(q_k) - \mathcal{D}(q_k^*) - \mathcal{D}(q_k^{**}) - \cdots$$

et on vérifie que c'est une chaîne. On définit enfin

$$f = \lim_{k\to+\infty} f_k = 1 - \mathcal{C}(2) - \mathcal{C}(3) - \mathcal{C}(5) - \cdots - \mathcal{C}(p) - \cdots$$

et on vérifie que c'est une chaîne-permutation.

Le début de cette chaîne-permutation est formée des trois entiers $1-6-3$, et est suivie de la chaîne finie $\mathcal{C}(3)$. Soit $n \geqslant 4$; il existe donc un nombre premier p tel que $f(n) \in \mathcal{C}(p^*)$. En utilisant notamment (3.2), on a $f(n) \leqslant 2p^{*2}p^{**} \asymp p^3$. Par ailleurs notons r un nombre premier générique. On a en utilisant (3.1) et le théorème des nombres premiers

$$n \geqslant \sum_{r\leqslant p} \text{longueur}(\mathcal{C}(r)) \gg \sum_{r\leqslant p} r^2/\log r \asymp p^3/(\log p)^2.$$

On en déduit que $f(n) \ll n(\log n)^2$. Cela conclut la démonstration du théorème.

Bibliographie

[1] Y. G. Chen & C. S. Ji, « The permutation of integers with small least common multiple of two subsequent terms », *Acta Math. Hung.* **132** (2011), n° 4, p. 307-309.

[2] P. Erdös, R. Freud & N. Hegyvári, « Arithmetical properties of permutations of integers », *Acta Math. Hung.* **41** (1983), n° 1-2, p. 169-176.

[3] E. SAIAS, « Entiers à diviseurs denses. I », *J. Number Theory* **62** (1997), n^o 1, p. 163-191.
[4] ———, « Applications des entiers à diviseurs denses », *Acta Arith.* **83** (1998), n^o 3, p. 225-240.
[5] G. TENENBAUM, « Sur un problème de crible et ses applications », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **19** (1986), n^o 1, p. 1-30.
[6] ———, « Sur un problème de crible et ses applications II. Corrigendum et étude du graphe divisoriel », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **28** (1995), n^o 2, p. 115-127.
[7] A. WEINGARTNER, « Practical numbers and the distribution of divisors », *Q. J. Math* **66** (2015), n^o 2, p. 743-758.