

MARIE BLANC

Actions cycliques libres sur les 3-Q-sphères

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 10,
n° 4 (2001), p. 587-594

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_4_587_0

© Université Paul Sabatier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Actions cycliques libres sur les 3- \mathbb{Q} -sphères (*)

MARIE BLANC (†)

RÉSUMÉ. — Dualités de Pontriaguine, Poincaré et théorie de Smith restreignent les p -groupes agissant librement sur une 3-sphère d'homologie rationnelle de p -composante du H_1 donnée.

ABSTRACT. — Pontriaguine, Poincaré's dualities and Smith's Theory produce restrictions on p -groups acting freely on a rational 3-homology-sphere of given p -component of the H_1 .

(Appendice de *Catherine Baily et Edith Vinchon*,
et Postface d'après le *second arbitre*)

Cette note donne des restrictions sur les p -groupes agissant librement sur une 3-sphère d'homologie rationnelle L de p -composante $H_1(L)_{(p)}$ du H_1 donnée :

THÉORÈME A. — Une 3- \mathbb{Q} -sphère L avec $H_1(L)_{(2)} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'a pas d'action libre du groupe cyclique C_2 à deux éléments.

THÉORÈME B. — Une 3- \mathbb{Q} -sphère L avec $H_1(L)_{(2)} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'a pas d'action libre d'un groupe à quatre éléments.

THÉORÈME C. — Une 3- \mathbb{Q} -sphère L avec $H_1(L)_{(p)} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier impair, n'a pas d'action libre du groupe cyclique C_p à p éléments.

Ces résultats, dûs à Alexander Reznikov, sont conséquences des dualités de Pontryaguine et de Poincaré dans les revêtements cycliques (voir

(*) Reçu le 19 septembre 2001, accepté le 2 avril 2002

(†) 130 galerie de l'Arlequin, 38100 Grenoble.

l'Appendice), et suivront des Lemmes 1 et 2 ci-dessous, fruits de notre lecture de [R] et d'une prépublication du même auteur pour laquelle nous n'avons pas de référence¹.

Dans la postface le lecteur trouvera motivations et indications bibliographiques dont nous sommes redevables au second arbitre.

Soit $\pi : L \rightarrow M$ le revêtement cyclique de degré n de classe caractéristique $\omega \in H^1(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Si M est une variété orientée de dimension 3 le Bockstein entier $\beta_{\mathbb{Z}}(\omega) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ est Poincaré dual de $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$, l'élément caractéristique. Le type $t(\pi)$ de π est l'ordre de $\langle \omega, \gamma \rangle$. Si $H_1(M)$ est de torsion ω est l'enlacement avec γ , pour tout $\alpha \in H_1(M)$ on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \langle \omega, \alpha \rangle = n(\gamma, \alpha)_M \in \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$.

LEMME 1. — Soit M une variété de dimension 3 fermée et $\pi : L \rightarrow M$ un revêtement double connexe de classe caractéristique $\omega \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors :

$$b_1(M) \geq 2b_1(M) - b_1(L) - 1 = \dim\{\omega \cup \alpha \mid \alpha \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\} \geq 0 \quad (1)$$

où $b_1(X) = \dim H_1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et si M est orientable,

$$b_1(L) \bmod 2 = t(\pi) \bmod 2 \quad (2)$$

Si $C_n = \langle s \rangle$ agit sur un groupe abélien A alors le H^1 et le H^2 de C_n à coefficients dans A sont $H^1(C_n, A) = \ker N / \text{Im } T$ et $H^2(C_n, A) = \ker T / \text{Im } N$ où $T, N : A \rightarrow A$ sont $1 - s$ et $1 + s + \dots + s^{n-1}$ respectivement (Cf. §8 de [AW]).

LEMME 2. — Soit L une 3-sphère d'homologie rationnelle et $\pi : L \rightarrow M$ un revêtement cyclique de degré n et d'élément caractéristique $\gamma \in H_1(M)$. Alors

L'enlacement de L met en dualité $H^1(C_n, H_1(L))$ et $H^2(C_n, H_1(L))$.

Ces groupes de cohomologie sont cycliques d'ordre $\frac{n}{t(\pi)}$ et la suite

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow[k \rightarrow k\gamma]{} H_1(M) \xrightarrow{\text{tr}_*} H_1(L) \xrightarrow{T} H_1(L) \xrightarrow{\pi_*} H_1(M) \xrightarrow[\alpha \rightarrow n(\gamma, \alpha)_M]{\varphi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (3)$$

où tr_* est l'adjoint de π_* pour les enlacements de L et M est exacte.

Preuve du Lemme 1. — Le dual de Poincaré (à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) de ω est représenté par une surface $W \subset M$. Les bords ∂_i dans la suite de

(1) En dépit de l'affirmation du premier arbitre les listes du M.P.I. à Bonn ne la contiennent pas.

Gysin-Smith :

$$H_2(M) \xrightarrow{\partial_2} H_1(M) \xrightarrow{\text{tr}} H_1(L) \xrightarrow{\pi_*} H_1(M) \xrightarrow{\partial_1} H_0(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

sont les intersections homologiques avec W , ainsi $\text{Im}(\partial_1) = H_0(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car ω est non nul et $\{\omega \cup \alpha \mid \alpha \in H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$ est Poincaré-dual de $\ker \text{tr}$, d'où (1).

Si M est orientable $w_1(W) = \omega|_W$ et, comme $X \cap Y \cap W = (Y \cap W) \cap_W (Y \cap W)$, la forme d'intersection de W induit sur $\text{Im} \partial_2$ une forme bilinéaire symétrique S , non dégénérée par dualité de Poincaré. Ainsi

$$\dim(\ker \text{tr}) \equiv \langle (\omega|_W)^2, [W] \rangle = \langle \omega^3, [M] \rangle \pmod{2}$$

d'où, d'après l'égalité de (1), la congruence (2) puisque $t(\pi)$ est 1 ou 2 suivant que $\langle \omega^3, [M] \rangle$ est ou non nul modulo 2.

Preuve du Lemme 2. — s_* étant une isométrie de $A = H_1(L)$ on a : $(\text{Im } N)^\perp = \ker N$ et $(\text{Im } T)^\perp = \ker(1 - s^{-1}) = \ker T$ d'où $(\ker N)^\perp = ((\text{Im } N)^\perp)^\perp = \text{Im } N$ et $(\ker T)^\perp = \text{Im } T$, ainsi l'enlacement de L met $H^1(C_n, A)$ et $H^2(C_n, A)$ en dualité.

La monodromie $\varphi : B = H_1(M) \rightarrow C_n$ étant le γ -enlacement et la relation d'adjonction $(\text{tr}(x), y)_L = (x, \pi_*(y))_M$ donnant $\ker \text{tr} = (\text{Im}(\pi_*))^\perp = \langle \gamma \rangle$ (car $\text{Im}(\pi_*) = \langle \gamma \rangle^\perp$), la suite (3) est celle du transfert d'un revêtement cyclique de 3- \mathbb{Q} -sphères.

Comme $\text{tr} \circ \pi_* = N$ on déduit de l'exactitude aux trois premiers termes de (3) que $H^2(C_n, A) = B/(\pi_*(A) + \ker \text{tr})$. L'exactitude aux deux derniers termes donne alors $H^2(C_n, A) = C_n/\varphi(\langle \gamma \rangle)$ qui est cyclique d'ordre $\frac{n}{t(\pi)}$.

Preuve du Théorème A. — Supposons que L admette une action libre de C_2 .

L'enlacement de L , somme orthogonale de ses restrictions aux composantes primaires, induit sur $A = H_1(L)_{(2)}$ une forme b de dièse $b^\sharp : A \rightarrow \hat{A}$ un isomorphisme. Ainsi si x et y sont les générateurs canoniques de $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'élément $b^\sharp(y)$, étant d'ordre 4, induit un isomorphisme de $A' = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur le sous-groupe des éléments d'ordre 4 dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . En particulier b est non dégénérée sur A' d'où la décomposition orthogonale $A = A' \oplus A'^\perp$. Soit x' un générateur de A'^\perp . Ainsi si $z = uy + vx' \in A$ est d'ordre 4 on a $b(z, z) = u^2 b(y, y) + v^2 b(x', x') = b(y, y) + \frac{v^2}{2}$ car $u = \pm 1$ et, x' étant d'ordre 2, $b(x', x') = \frac{1}{2}$. Donc $b(z, z) = b(y, y)$ si et seulement si $z \in A'$.

Préservant l'enlacement, le groupe C_2 respecte donc A' et agit en somme directe sur $A = A' \oplus A'^{\perp}$. Mais $H^1(C_2, A) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui contredit le Lemme 2 car la cyclicité se conserve par passage à la composante 2-primaire.

Preuve du Théorème B. — Supposons qu'un groupe G à quatre éléments agisse librement sur N . Il contient une involution s induisant s_* sur la composante 2 primaire $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de $H_1(L)$ dont la matrice X est de déterminant 1.

On a $2\text{Id} - \text{tr}(X)X = X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)\text{Id} = 0$, ainsi $X = \begin{pmatrix} \epsilon & 2b \\ 2c & \epsilon \end{pmatrix}$ et $H_1(\langle s \rangle, A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, or $|H_1(\langle s \rangle, A)| = \frac{2}{t(\pi)} = 1$ par le Lemme 2 car, comme $b_1(L) = 2$, la congruence dans le Lemme 1 donne $t(\pi) = 2$.

Preuve du Théorème C. — La composante p -primaire A de $H_1(L)$ étant un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, le générateur s_* de C_p a 1 pour valeur propre², donc un vecteur fixe $x = s_*(x)$. Si $b(x, x) \neq 0$ est non nul s_* est l'identité car elle respecte $\langle x \rangle^{\perp}$, un supplémentaire unidimensionnel de $\langle x \rangle$. Sinon, p étant impair, b est hyperbolique somme directe de ses deux sous-espaces isotropes. D'ordre impair, s_* ne peut les échanger, et $s_* = \text{Id}_A$ contredisant le Lemme 2 car si A est un C_p -module trivial, $H^1(C_p, A) = A$ n'est pas cyclique.

Remerciements. — À A. Reznikov car la peine que nous avons eu à lire [R] a permis de mettre en valeur nos dualités balbutiantes. N'oublions pas non plus ni Monsieur Carreira qui, de ses doigts agiles, a donné à un touffu manuscrit la forme que l'on voit, ni le second arbitre dont la lecture précise a suppléé à l'incompétence du dactylographe et à notre ignorance bibliographique.

Bibliographie

- [R] REZNIKOV (A.). — *Three-manifolds classfield theory*, Selecta Mathematica, New Series vol 3, No 3 361-399 (1997).
- [AW] ATIYAH (M.F.), WALL (C.T.C.). — *Cohomology of groups* dans *Algebraic Number Theory*, édité par J.W.S. Cassels, A. Frölich, Academic Press, 1967.

⁽²⁾ Car, dans la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'équation $\lambda^p = 1$ n'a qu'une solution $\lambda = 1$.

Appendice

par Catherine Bailly et Edith Vinchon

Dualités de Pontryaguine, Poincaré
et revêtements cycliques en dimension 3.

1) *Enlacements.* — Un *Enlacement* du groupe abélien fini A est une forme bilinéaire symétrique $b : A \times A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de dièse

$$b^\sharp : A \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \widehat{A}, y \mapsto [x \mapsto b(x, y)]$$

un isomorphisme de A sur son *dual de Pontryaguine* \widehat{A} .

Soit B un sous-groupe de A . La restriction $\rho_B : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ étant surjective les ordres vérifient :

$$|\widehat{A}| = |\widehat{A/B}| |\widehat{B}| \quad \text{d'où, par récurrence sur l'ordre, } |\widehat{A}| = |A|.$$

L'*orthogonal* du sous-groupe B est $B^\perp = \ker(\rho_B \circ b^\sharp : A \rightarrow \widehat{A} \rightarrow \widehat{B})$. D'où :

$$|A| = |\widehat{B}| |B^\perp| = |B| |B^\perp|$$

ainsi, puisque $B \subset (B^\perp)^\perp$, un sous-groupe coïncide avec son bi-orthogonal :

$$B = (B^\perp)^\perp$$

et si la forme induite par b sur B est un enlacement alors A est en somme orthogonale³ :

$$A = B \oplus B^\perp$$

2) *Dualité de Poincaré et enlacements.* — Soit M une 3-variété fermée orientée. L'isomorphisme de Poincaré, « produit penché » par l'orientation, (Theorem 18 p. 297 de [Sp]) $PD : H_1(M) \rightarrow H^2(M)$ induit sur la torsion un isomorphisme $T_1(M) \rightarrow T^2(M)$. Les coefficients universels $T^2(M) \simeq \text{Ext}(H_1(M), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Q}) = T_1(\widehat{M})$ traduisent cet isomorphisme en le dièse d'un enlacement b_M sur le premier groupe de torsion de M .

Donnons la version originale (Cf. §69,70 et 77 de [ST]) de la dualité d'une variété fermée orientée et triangulée V de dimension n . L'association

(3) $b_{|B}^\sharp$ étant bijective $B \cap B^\perp = 0$ et si $z \in A$, alors $b^\sharp(z)_{|B} = b^\sharp(x)$ où $x \in B$ et $z - x \in B^\perp$.

à la cellule duale σ^{n-k} d'un k -simplexe τ^k l'élément τ^{k*} de la base du complexe des k -cochaînes, dual de l'élément τ^k de la base canonique des chaînes simpliciales, est un isomorphisme du complexe $C_{n-k}(V')$ cellulaire de la cellulation duale sur le complexe $C^k(V)$ des cochaînes simpliciales induisant PD : $H_{n-k}(V) \rightarrow H^k(V)$.

Si $V = M$, les constructions du premier paragraphe donnent si $y \in T_1(M)$ est représenté par un cycle λ dont le multiple $Q\lambda = \partial\Sigma$ borde la chaîne Σ de la cellulation duale et $x \in T_1(M)$ est représenté par le cycle μ de la triangulation alors $b_M(x, y) = \frac{1}{Q}\mu \cdot \Sigma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où $\mu \cdot \Sigma \in \mathbb{Z}$ est l'intersection des chaînes transverses μ et Σ . Cette formule vaut encore si au lieu de chaînes de la triangulation et de la cellulation duale, μ , λ et Σ sont des chaînes singulières transverses.

3) *Théorie de Smith d'un revêtement cyclique fini.* — Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement cyclique de degré n d'un complexe simplicial Y , son groupe de Galois C_n est engendré par la transformation de revêtement $s : X \rightarrow X$. Soit λ un anneau et T et N les éléments $1-s$ et $1+s+\dots+s^{n-1}$ de l'anneau de groupe $\Lambda = \lambda[C_n]$.

Le complexe des λ -chaînes simpliciales $C_k(X, \lambda) = \bigoplus_{i \in I_k} \Lambda \tilde{\sigma}_i^k$ où $\tilde{\sigma}_i^k$ est un k -simplexe de X d'image $\pi(\tilde{\sigma}_i^k) = \sigma_i^k$, le i ème k -simplexe de Y est un complexe de Λ -modules libres et $\pi_* : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ est $\sum a_i \tilde{\sigma}_i^k \mapsto \sum \epsilon(\alpha_i) \sigma_i^k$ où $\epsilon : \Lambda \rightarrow \lambda$ est $\sum a_j s^j \mapsto \sum a_j$. Soient $T_*(X) = \{Tx \mid x \in C_*(X)\}$ et $N_*(X) = \{Nx \mid x \in C_*(X)\}$, deux sous-complexes de $C_*(X)$ avec $\sum a_i \tilde{\sigma}_i^k \mapsto \sum a_i N \tilde{\sigma}_i^k$ un isomorphisme de complexe $\text{Tr} : C_*(Y) \rightarrow N_*(X)$. Le *transfert* est le composé

$$\text{tr} = \text{ioTr} : C_*(Y) \rightarrow N_*(X) \hookrightarrow C_*(X)$$

La suite $\Lambda \xrightarrow{T} \Lambda \xrightarrow{N} \Lambda \xrightarrow{T} \Lambda \xrightarrow{\epsilon} \lambda \rightarrow 0$ étant exacte, les suites courtes de complexes :

$$0 \rightarrow T_*(X) \rightarrow C_*(X) \xrightarrow{\pi_*} C_*(Y) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N_*(X) \simeq C_*(Y) \xrightarrow{\text{tr}} C_*(X) \xrightarrow{T} T_*(X) \rightarrow 0$$

sont exactes, produisant les deux *Suites exactes longues de λ -homologie de Smith*.

4) *Revêtements cycliques finis de 3- \mathbb{Q} -sphères.* — Une 3-sphère d'homologie rationnelle, ou 3- \mathbb{Q} -sphère, est une variété fermée connexe L de dimension 3 de premier groupe d'homologie $H_1(L)$ fini, elle est donc orientable⁴. Par dualité de Poincaré et coefficients universels $H_2(L) \simeq H^1(L) \simeq$

(4) Car le $w_1(N) \in H^1(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ d'une variété L est dual d'une hypersurface F de

$\text{Hom}(H_1(L), \mathbb{Z}) = 0$. Si $\pi : L \rightarrow M$ est un revêtement cyclique fini alors M est aussi une 3- \mathbb{Q} -sphère⁵.

Comme $H_2(L)$, $H_2(M)$ sont nuls et, pour $k = 0, 3$, $\mathbb{Z} \simeq H_k(L) \xrightarrow{\pi^k} H_k(M) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \simeq H_k(M) \xrightarrow{\text{tr}_k} H_k(L) \simeq \mathbb{Z}$ sont les multiplications par n pour π_3 et tr_0 et 1 pour π_0 et tr_3 , les deux suites de Smith (pour $\lambda = \mathbb{Z}$) s'accouplent pour accoucher les 3- \mathbb{Q} -sphères de leur *Suite exacte du transfert d'un revêtement cyclique* :

$$0 \rightarrow C_n \rightarrow H_1(M) \xrightarrow{\text{tr}_*} H_1(L) \xrightarrow{\text{T}} H_1(L) \xrightarrow{\pi_*} H_1(M) \xrightarrow{\varphi} C_n \rightarrow 0$$

La matrice de $\text{tr}_k : C_k(M) \rightarrow C_k(L)$ dans les bases $(\sigma_i^k)_{i \in I_k}$ de $C_k(M)$ et $(s^j \tilde{\sigma}_i^k)_{i \in I_k, j=0, \dots, n-1}$ de $C_k(L)$, étant transposée de celle de $\pi_k : C_k(M) \rightarrow C_k(L)$ dans ces mêmes bases, le transfert est d'après la fin de 2) l'adjoint, pour les enlacements de L et M , de $\pi_* : H_1(L) \rightarrow H_1(M)$:

$$\forall x \in H_1(L), y \in H_1(M) \quad (\pi_*(x), y)_M = (x, \text{tr}(y))_L$$

Références complémentaires

- [ST] SEIFERT (H.), THRELFALL (W.). — *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934.
 [Sp] SPANIER (E.H.). — *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

complémentaire orientable, ainsi F est orientable à fibré normal trivial et $w_1(L) = \rho([F])$ est la réduction de la classe entière $[F] \in H^1(L, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(L), \mathbb{Z}) = 0$ donc nulle puisqu'ici $H_1(L)$ est fini.

(⁵) Tout $y = h(\alpha) \in H_1(M)$, image par Hurewicz d'un lacet α de multiple α^n dans le noyau de la monodromie $\ker(\Phi : \pi_1(M) \rightarrow C_n)$, donc se relève et $ny = h(\alpha^n) = h(\pi_*(\beta)) = \pi_*(h(\beta))$. Ainsi y , annulé par n fois l'ordre de $h(\beta)$, est d'ordre fini. (Alternativement, π étant de degré non nul, est surjective en homologie rationnelle).

Marie Blanc

Postface

d'après des indications du second arbitre

Signalons qu'étant donné un groupe fini, il existe toujours une 3-sphère d'homologie rationnelle sur laquelle il agit librement (voir par exemple [C-L]). Cependant, comme on vient de le voir il n'en est plus de même si l'on fixe l'homologie entière. A contrario signalons l'article [K-L-W] où Kobayashi, Luft et Wang montrent le théorème qu'ils énoncent dans le titre établissant que l'existence de points fixes isolés est une contrainte très forte pour l'action.

Ultime bibliographie

- [C-L] COOPER (D.) and LONG (D.D.). — *Free actions of finite groups on rational homology 3-spheres*, *Topology and its applications* 101, 143-148 (2000).
- [K-L-W] KOBAYASHI (M.), LUFT (E.) and WANG (S.). — *A finite group acting on a rational homology 3-spheres with 0-dimensional fixed point set must be Z_2* , *Topology* 36, No 2, 509-518 (1997).