ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

OLIVIER SCHNEIDER

Stabilité des fibrés $\Lambda^p E_L$ et condition de Raynaud

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 14, nº 3 (2005), p. 515-525

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_3_515_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 3, 2005
pp. 515–525

Stabilité des fibrés $\Lambda^p E_L$ et condition de Raynaud(*)

Olivier Schneider(1)

Résumé. — Soit C une courbe lisse de genre $g \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$. Soit L un fibré en droites sur C engendré par ses sections globales et E_L le fibré dual du noyau du morphisme d'évaluation e_L. On étudie ici la relation entre la stabilité et la vérification d'une condition (R) introduite par Raynaud : on démontre que lorsque C est générale, E_L est semi-stable ; on prouve ensuite que E_L vérifie (R) lorsque $\deg(L) \geqslant 2g$ ou bien lorsque L est générique. Enfin on démontre que pour tout p dans $\{2, \ldots, \mathrm{rg}(E_L) - 2\}$, si $\deg(L) \geqslant 2g + 2$, $\Lambda^p E_L$ ne vérifie pas (R).

Abstract. — Let C be a smooth curve of genus $g \geqslant 2$ on $\mathbb{C}$. Let L be a line bundle on C generated by its global sections and let E_L be the dual of the kernel of the evaluation map e_L. We are studying here the relation between the stability the fact that the bundle is verifying a condition (R) introduced by Raynaud : we prove that E_L is semi stable when C is general. We also prove that E_L is verifying (R) when $\deg(L) \geqslant 2g$ or when L is generic. Finally we prove that for each p in $\{2, \ldots, \mathrm{rg}(E_L) - 2\}$, if $\deg(L) \geqslant 2g + 2$ then $\Lambda^p E_L$ is not verifying (R).

1. Introduction

Soit C une courbe lisse de genre $g \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$. Soit J la Jacobienne de C. Dans [R], M. Raynaud introduit la condition suivante : un fibré vectoriel E sur C vérifie $(\star)$ si il existe un ouvert non vide U de J tel que pour tout L dans U,

$$\min(h^0(E \otimes L), h^1(E \otimes L)) = 0.$$

On remarque que si E est un fibré vectoriel sur C de pente $g - 1$, vérifiant $(\star)$, alors E est semi-stable. On introduit ici une condition (R) (qui implique $(\star)$) de façon à pouvoir étendre cette propriété à tous les fibrés de pente entière. Soit $\mathcal{SU}_C(r, \mu)$ l'espace des modules des fibrés semi-stables sur C

(*) Reçu le 17 septembre 2003, accepté le 3 décembre 2004
(1) Laboratoire J.-A. Dieudonné, U.M.R. no 6621 du C.N.R.S., Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 (France).
E-mail : oschneid@math.unice.fr

de fibré déterminant fixé, de pente μ et de rang r. Les fibrés construits par M. Raynaud et par M. Popa (voir [P]) fournissent des exemples de fibrés stables ne vérifiant pas (R). Lorsque μ est entier, ces fibrés jouent un rôle crucial dans l'étude du fibré déterminant sur $\mathcal{SU}_C(r,\mu)$ (voir [Be2]). En effet, si on note $\mathcal{L}$ ce fibré déterminant, on a pour E dans $\mathcal{SU}_C(r,\mu)$,

$$E \text{ ne vérifie pas } (R) \Longleftrightarrow E \text{ est un point base de } \mid \mathcal{L} \mid.$$

Soit maintenant L un fibré en droites sur C engendré par ses sections globales, soit M_L le noyau du morphisme d'évaluation

$$e_L : H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow L.$$

On note $E_L := M_L^*$. Lorsque $\deg(L) \geqslant 2g+1$, E_L est stable (voir [E-L]) et si $\deg(L) = 2g$, alors E_L est stable si et seulement si L est très ample (voir [Be]). On établira ici le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit C une courbe lisse générale de genre $g \geqslant 3$ sur $\mathbb{C}$. Si L est un fibré en droites sur C engendré par ses sections globales, alors*

1. *E_L est semi-stable.*
2. *E_L vérifie (R) lorsque L est générique.*

De plus, on donnera des exemples de courbes sur lesquelles ces fibrés ne sont pas semi-stables. Enfin on conclura en évoquant le cas des fibrés $\Lambda^p E_L$ lorsque $\deg(L) \geqslant 2g+2$: ces fibrés sont semi-stables et on montrera qu'ils ne vérifient pas (R).

2. Condition de Raynaud et semi-stabilité

Dans tout ce qui suit C est une courbe lisse de genre $g \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$. Pour tout entier n, on note J^n la variété qui paramétrise les fibrés en droites de degré n sur C (J si $n = 0$). Soit E un fibré vectoriel sur C de rang r et de degré d. On dit que E vérifie la condition (R) si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ pour } L \text{ générique dans } J^n,\ h^0(E \otimes L) \text{ ou } h^1(E \otimes L) \text{ est nul.} \qquad (R)$$

On a les propriétés suivantes :

- tout fibré en droites vérifie (R).

- si E vérifie (R), alors :
  - Pour tout fibré en droites L sur C, $E \otimes L$ vérifie (R).
  - Le dual E^* de E, vérifie (R).

Si E est non nul, on définit sa pente par :

$$\mu(E) := \frac{d}{r}.$$

Rappelons qu'un fibré vectoriel E sur C est dit **stable** (resp. **semi-stable**) si tout sous-fibré propre de E a une pente strictement inférieure (resp. inférieure) à $\mu(E)$. On a des propriétés analogues a celles évoquées précédemment pour la condition (R) : tout fibré en droites est stable ; si E vérifie l'une ou l'autre de ces propriétés de stabilité, il en sera de même pour E^* et pour $E \otimes L$, avec L un fibré en droites quelconque sur C.

En fait, pour qu'un fibré E vérifie (R) il faut et il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :

1) $h^1(E \otimes L) = 0$ pour L fibré en droites sur C générique de degré $g-1-[\mu(E)]$.
2) $h^0(E \otimes L) = 0$ pour L fibré en droites sur C générique de degré $g-1-\ulcorner\mu(E)\urcorner$.

En effet, pour tout diviseur D sur C de degré positif, pour tout fibré en droites M sur C, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \otimes M \longrightarrow E \otimes M(D) \longrightarrow E \otimes \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

En écrivant la suite exacte longue d'homologie, on obtient :

$$h^1(C, E \otimes M(D)) \leqslant h^1(C, E \otimes M)$$

et

$$h^0(C, E \otimes M) \leqslant h^0(C, E \otimes M(D)).$$

- Si $n \geqslant g-1-[\mu(E)]$ alors tout fibré en droites générique de degré n s'écrit $M(D)$ avec M un fibré en droites générique de degré $g-1-[\mu(E)]$ et D un diviseur de degré positif. Comme

  $$h^1(C, E \otimes M(D)) \leqslant h^1(C, E \otimes M),$$

  la condition 1) implique que $h^1(E \otimes L) = 0$ génériquement lorsque L est fibré en droites sur C de degré $n \geqslant g-1-[\mu(E)]$.

- Si $n \leqslant g-1-\ulcorner\mu(E)\urcorner$ alors tout fibré en droites générique de degré $g-1-\ulcorner\mu(E)\urcorner$ s'écrit $M(D)$ avec M un fibré en droites générique de degré n et D un diviseur de degré positif. Comme
$$h^0(C, E\otimes M) \leqslant h^0(C, E\otimes M(D)),$$
la condition 2) implique que $h^0(E\otimes L)=0$ génériquement lorsque L est un fibré en droites sur C de degré $n \leqslant g-1-\ulcorner\mu(E)\urcorner$.

PROPOSITION 2.1. — *Soit C une courbe lisse de genre g sur $\mathbb{C}$. Si on a la suite exacte de fibrés vectoriels sur C suivante*
$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$
alors
$$E \text{ verifie } (R) \Longrightarrow \mu(F) \leqslant \ulcorner\mu(E)\urcorner \ \textit{ et } \ \mu(Q) \geqslant [\mu(E)].$$

Preuve. — Pour tout fibré en droites L on a
$$h^0(C, F\otimes L) \leqslant h^0(C, E\otimes L).$$
De plus si $\deg(L)=n$, on par Riemann-Roch
$$h^0(C, E\otimes L) - h^1(C, E\otimes L) = r(E)(n+\mu(E)-(g-1)).$$
De la même façon,
$$h^0(C, F\otimes L) - h^1(C, F\otimes L) = r(F)(n+\mu(F)-(g-1)).$$
Si E vérifie (R), alors pour $n=g-1-\ulcorner\mu(E)\urcorner$,
$$h^0(C, F\otimes L) = h^0(C, E\otimes L) = 0.$$
Donc $\chi(F\otimes L)\leqslant 0$, ce qui entraîne la première inégalité.

De la même façon, pour tout fibré en droites L on a
$$h^1(C, Q\otimes L) \leqslant h^1(C, E\otimes L),$$
et
$$h^0(C, Q\otimes L) - h^1(C, Q\otimes L) = r(Q)(n+\mu(Q)-(g-1)).$$
Alors pour $n=g-1-[\mu(E)]$,
$$h^1(C, Q\otimes L) = h^1(C, E\otimes L) = 0.$$
Donc $\chi(Q\otimes L)\geqslant 0$, ceci entraîne la deuxième inégalité. □

On voit grâce à ce résultat que si $\mu(E)$ est entier, la condition (R) entraîne la semi-stabilité. Par contre la stabilité n'entraîne pas la vérification de la condition (R) (voir la construction de Raynaud dans [R]).

3. Stabilité des fibrés E_L

Soit L un fibré en droites sur C engendré par ses sections globales ; soit M_L le fibré vectoriel de rang $h^0(C,L)-1$ sur C, noyau du morphisme d'évaluation :

$$0 \longrightarrow M_L \longrightarrow H^0(C,L)\otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{ev_L} L \longrightarrow 0 \qquad (3.1)$$

On définit $E_L := M_L^*$. L. Ein et R. Lazarsfeld démontrent dans [E-L], que si $\deg(L) \geqslant 2g+1$, alors E_L est stable. Le cas $\deg(L) = 2g$ est traité par A. Beauville dans [Be] :

THÉORÈME 3.1 *(A. Beauville). — Si* $\deg(L) = 2g$, *alors* E_L *est semi-stable et possède un diviseur thêta. De plus* E_L *est stable si et seulement si* L *est très ample.*

Traitons maintenant les cas où L est un fibré en droites de degré inférieur à $2g$; on rappelle la propriété suivante (voir [L]) :

LEMME 3.2 *(R. Lazarsfeld). — Soit* C *une courbe lisse de genre* g *sur* $\mathbb{C}$. *Soit* L *un fibré en droites sur* C, *de degré* $g+d$ $(d \in \mathbb{Z})$ *et engendré par ses sections globales. Soient* $x_1, \dots, x_{d+h^1(L)-1}$, *des points distincts sur* C *tels que*

$$h^1(L(-\sum x_i)) = h^1(L).$$

On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{d+h^1(L)-1} \mathcal{O}_C(x_i) \longrightarrow E_L \longrightarrow L(-\sum_{i=1}^{d+h^1(L)-1} x_i) \longrightarrow 0.$$

Ceci induit la suite exacte suivante pour tout $0 \leqslant p \leqslant d+h^1(L)-1$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i_1<\ldots<i_p} \mathcal{O}_C(x_{i_1}+\ldots+x_{i_p}) \longrightarrow \Lambda^p E_L$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{j_1<\ldots<j_{d+h^1(L)-p}} L(-x_{j_1}-\ldots-x_{j_{d+h^1(L)-p}}) \longrightarrow 0.$$

LEMME 3.3. — *Soit* C *une courbe lisse de genre* g *sur* $\mathbb{C}$. *Soit* L *un fibré en droites sur* C *engendré par ses sections globales. Si* Q *est un fibré quotient propre de* E_L *de rang* n, *alors*

$$h^0(\det Q) \geqslant n+1.$$

Preuve du Lemme 3.3. — Soit $g+d$ le degré de L. Si on note $h := h^1(L)$, alors $r(E_L) = d+h$. D'après le lemme 3.2, pour tous $x_1, \ldots, x_{d+h-1}$ sur C tels que $h^1(L(-\sum x_i)) = h$, on a

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i_1<\ldots<i_n} \mathcal{O}_C(x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}) \longrightarrow \Lambda^n E_L \\ \longrightarrow \bigoplus_{j_1<\ldots<j_{d+h-n}} L(-x_{j_1}-\ldots-x_{j_{d+h-n}}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme Q est un fibré quotient de E_L on a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & \\ \bigoplus_{i_1<\cdots<i_n} \mathcal{O}_C(x_{i_1}+\cdots+x_{i_n}) \arrow[d] \arrow[drr, dashed, "\varphi_{x_1,\ldots,x_{d+h-1}}"] & & \\ \Lambda^n E_L \arrow[rr] \arrow[d] & & \det Q \arrow[r] & 0 \\ \bigoplus_{j_1<\cdots<j_{d+h-n}} L(-x_{j_1}-\cdots-x_{j_{d+h-n}}) \arrow[d] & & \\ 0 & & \end{tikzcd}$$

Dans tous les cas ceci impose

$$h^0(\det Q) \geqslant n+1.$$

En effet,

- ou bien il existe $x_1, \ldots, x_{d+h-1}$ tels que $\varphi_{x_1,\ldots,x_{d+h-1}}$ est nulle alors il existe $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{d+h-n}}$ sur C tels que $L(-x_{i_1}-\cdots-x_{i_{d+h-n}})$ s'injecte dans $\det Q$. Or comme

$$h = h^1(L) \leqslant h^1(L(-x_{i_1}-\cdots-x_{i_{d+h-n}})) \leqslant h^1(L(-\sum x_i)) = h,$$

  on a par Riemann-Roch :

$$h^0(L(-x_{i_1}-\cdots-x_{i_{d+h-n}})) = g+d-(d+h-n)-g+1+h = n+1 \leqslant h^0(\det Q).$$

- Ou bien $\varphi_{x_1,\ldots,x_{d+h-1}}$ n'est jamais nulle : pour $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$ génériques sur C, $\mathcal{O}_C(x_{i_1}+\cdots+x_{i_n})$ s'injecte dans $\det Q$; d'où

$$h^0(\det Q) \geqslant n+1.$$

Preuve du 1) *du Théorème 1.1.* — Soit $g+d$ le degré de L et $h := h^1(L)$. Démontrons la proposition par l'absurde : soit Q un fibré quotient propre de E_L de rang $n < r(E_L) = d+h$ et tel que $\mu(Q) < \mu(E_L)$. Ceci impose

$$\deg(Q) < n\left(\frac{g+d}{d+h}\right) : \tag{3.2}$$

D'après le lemme 3.3, $h^0(\det Q) \geqslant n+1$. Soit ρ le nombre de Brill-Noether pour les systèmes linéaires de degré $\deg(Q)$ et de dimension (projective) n :

$$\begin{aligned}\rho &= g-(n+1)(g-\deg(Q)+n)\\ &= -ng+(n+1)\deg(Q)-n(n+1).\end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\rho &< -ng+n(n+1)\left(\frac{g+d}{d+h}\right)-n(n+1)\\ &= n\left(\frac{(n+1)(g-h)}{d+h}-g\right) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Ceci contredit l'existence d'un tel fibré Q sur un courbe générale, ce qui prouve la semi-stabilité. □

Remarque 3.4. — Le résultat de la proposition n'est pas généralisable à toute courbe : soit C une courbe de genre $g \geqslant 3$, possédant un système linéaire g^1_d (de degré d et de dimension projective 1). Soit M le fibré en droites engendré par ce système linéaire. Alors pour tout fibré en droites L sur C générique de degré $g+d$, on a une injection $M \hookrightarrow L$, d'où une surjection

$$E_L \longrightarrow E_M \longrightarrow 0.$$

De plus

$$\mu(E_L) = \frac{g}{d}+1 \quad \textit{et} \quad \mu(E_M) = d.$$

Alors si $d < \frac{g}{d}+1$, E_L n'est pas semi-stable.

4. E_L et la condition (R)

Soit L un fibré en droites sur C engendré par ses sections globales. Soit M un autre fibré en droites sur C. Si on tensorise la suite exacte (3.1) par M et qu'on écrit la suite exacte longue d'homologie, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & H^0(C, M_L\otimes M) \longrightarrow H^0(C,L)\otimes H^0(C,M)\\ \xrightarrow{\mu_{L,M}}\ & H^0(C, L\otimes M) \longrightarrow H^1(C, M_L\otimes M) \longrightarrow \quad \ldots\end{aligned}$$

D'après ce qu'on a remarqué précédement, E_L vérifiera la condition (R) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\mu_{L,M}$ est surjective pour M fibré en droites sur C générique de degré $g - 1 - [\mu(M_L)]$.

2) $\mu_{L,M}$ est injective pour M fibré en droites sur C générique de degré $g - 1 - \ulcorner\mu(M_L)\urcorner$.

Remarquons tout d'abord que si $h^0(C, L) \leqslant 2$, alors $\mu_{L,M}$ est toujours de rang maximum ; en effet,

- ou bien $h^0(C, L) = 1$ et $\mu_{L,M}$ est trivialement toujours injective.
- ou bien $h^0(C, L) = 2$ et le « base-point free pencil trick » (voir [A,C,G,H] p. 152) nous donne le résultat.

PROPOSITION 4.1. — *Soit C une courbe lisse de genre g sur $\mathbb{C}$. Si L est un fibré en droites sur C de degré superieur à $2g$, alors E_L vérifie (R).*

Preuve. — Si $\deg(L) \geqslant 2g$, alors $[\mu(M_L)] = -2$. Pour que E_L vérifie (R) il faut donc que :

1) $\mu_{L,M}$ soit surjective pour M fibré en droites sur C générique de degré $g + 1$, et que

2) $\mu_{L,M}$ soit injective pour M fibré en droites sur C générique de degré g.

La deuxième assertion est évidente $(h^0(C, M) = 1)$. Pour le premier point, comme $h^0(C, M) = 2$ pour M générique de degré g, on applique encore le « base-point free pencil trick » pour obtenir le résultat. $\square$

Enfin comme sur une courbe générale, pour deux fibrés en droites génériques l'application $\mu_{L,M}$ est de rang maximum (voir [Ba]), on a le 2) du Théorème 1.1.

Remarque 4.2. — Pour les mêmes raisons que pour le premier point, ce résultat n'est pas généralisable à toute courbe : en effet, reprenons l'exemple de la Remarque 3.4 : C est une courbe lisse de genre g possédant un g_d^1 avec $d + 1 < \frac{g}{d} + 1$. Soit M le fibré en droites engendré par ce système linéaire. Alors pour tout fibré en droites L sur C générique de degré $g + d$, on a une surjection

$$E_L \longrightarrow E_M \longrightarrow 0,$$

et $\ulcorner\mu(E_M)\urcorner = \mu(E_M) = d < \mu(E_L) = \frac{g}{d}+1$. De ce fait d'après la Proposition 2.1, E_L ne vérifie pas (R).

5. Le cas des fibrés $\Lambda^p E_L$ lorsque $\deg(L) \geqslant 2g+2$

Lorsque $\deg(L) \geqslant 2g+1$, E_L est stable. De ce fait, pour tout $1 < p < \mathrm{rg}(E_L)$, $\Lambda^p E_L$ est polystable, c'est-à-dire somme directe de fibrés stables de même pente. Soit $\gamma := \left[\frac{g+1}{2}\right]$; dans [P] M. Popa démontre que lorsque $\deg(L) \geqslant g(\gamma+1)$, $\Lambda^\gamma E_L$ ne vérifie pas (R). De ceci il déduit le résultat suivant (voir [P]) :

THÉORÈME 5.1 *(M. Popa). — Pour tout $g \geqslant 2$, il existe un entier $\rho(g)$ tel que pour tout $r > \rho(g)$, il existe sur toute courbe de genre g un fibré stable de rang r ne vérifiant pas (R).*

En s'inpirant de cela, on démontre la Proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. — *Soit C une courbe lisse de genre $g \geqslant 2$ sur $\mathbb{C}$. Si L est un fibré en droites sur C de degré superieur ou égal à $2g+2$, alors pour tout p dans $\{2, \ldots, \mathrm{rg}(E_L)-2\}$, $\Lambda^p E_L$ ne vérifie pas (R).*

Preuve. — Soit $g+d$ le degré de L, un calcul facile donne :

$$\mu(\Lambda^p E_L) = p + \frac{g}{d}p.$$

Remarquons tout d'abord que d'après le Lemme 3.2, pour $x_1, \ldots, x_{d-1}$ $d-1$ points génériques sur C, on a pour tout p dans $\{2, \ldots, d-2\}$,

$$\mathcal{O}_C(x_1 + \ldots + x_p) \hookrightarrow \Lambda^p E_L.$$

Donc pour tous diviseurs effectifs A_q et B_p respectivement de degrés q et p, $h^0(C, \Lambda^p E_L(A_q - B_p)) \neq 0$. Etablissons maintenant grâce à ceci les conditions sur p pour que $\Lambda^p E_L$ ne vérifie pas (R) :

1) Si $p \leqslant g$, tout fibré en droites M générique de degré $g-2p$ est un fibré engendré par un diviseur de la forme $A_{g-p} - B_p$ avec A_{g-p} et B_p des diviseurs effectifs de degrés respectivement $g-p$ et p. D'après ce qui précède, $h^0(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \neq 0$ et comme
$$\chi(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \mu(\Lambda^p E_L \otimes M) \leqslant g-1,$$
$\Lambda^p E_L$ ne vérifiera pas (R) si $p + \frac{g}{d}p + g - 2p \leqslant g-1$, c'est-à-dire si $p \geqslant \frac{d}{d-g}$.

2) Si $p \geqslant g$ alors tout fibré en droites M générique de degré $-p$ s'écrit $\mathcal{O}_C(-A_p)$ avec A_p diviseur effectif de degré p. D'après ce qui précède, $h^0(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \neq 0$ et pour les mêmes raisons que dans le 1), $\Lambda^p E_L$ ne vérifiera pas (R) si $p + \frac{g}{d}p - p \leqslant (g-1)$, c'est-à-dire si $p \leqslant d - \frac{d}{g}$.

D'après les propriétés établies dans le premier paragraphe, pour prouver la Proposition il nous suffit de démontrer que $\Lambda^p E_L$ ou bien $\Lambda^{d-p} E_L$ (qui est le dual de $\Lambda^p E_L$ à $\otimes L$ près) ne vérifie pas (R) :

i) Si $d \leqslant 2g$ alors

- ou bien $\max(p, d-p) \geqslant g$, disons p et alors d'après 2) $\Lambda^p E_L$ ne vérifie pas (R) si $p \leqslant d - \frac{d}{g}$, ce qui est bien le cas puisque $d \leqslant 2g$.
- ou bien $\max(p, d-p) \leqslant g$ et si on suppose que $\Lambda^p E_L$ et $\Lambda^{d-p} E_L$ vérifient (R), d'après le 1), on doit avoir :

$$p > d - \frac{d}{g} \quad \text{et} \quad d - p > d - \frac{d}{g}.$$

Or ceci n'est pas possible lorsque $d \geqslant g + 2$.

ii) Si $d \geqslant 2g$ alors

- ou bien $\min(p, d-p) \leqslant g$ et d'après 1), on doit avoir $\min(p, d-p) \geqslant \frac{d}{d-g}$ ce qui est automatique lorsque $d \geqslant 2g$.
- ou bien p et $d-p$ sont supérieurs ou égaux à g et si on suppose que $\Lambda^p E_L$ et $\Lambda^{d-p} E_L$ vérifient (R), d'après le 2), on doit avoir :

$$p > d - \frac{d}{g} \text{ et } d - p > d - \frac{d}{g}.$$

Or cela implique $g \leqslant 1$, ça n'est donc pas possible. $\square$

Remerciements : Je remercie mon directeur de thèse Arnaud Beauville de m'avoir guidé dans ce travail de recherche.

Bibliographie

[A,C,G,H] ARBARELLO (E.), CORNALBA, GRIFFITHS (P.), J. HARRIS (J.). — Geometry of algebraic curves. Vol. I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267, Springer-Verlag, New York (1985).

[Ba] BALLICO (E.). — Line bundles on projective curves : the multiplication map, Atti Sem. Mat. Fis. Univ Modena, L, p. 17-21 (2002).

[Be] BEAUVILLE (A.). — Some stable vector bundles with reducible theta divisors, Manuscripta Math. 110, p. 343-349 (2003).

[Be2] BEAUVILLE (A.). — Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems, Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 17-33 (1995).

[E-L] EIN (L.), LAZARSFELD (R.). — Stability and restrictions of Picard bundles, with an application to the normal bundles of elliptic curves, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).

[L] LAZARSFELD (R.). — A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series, Lectures, World scientific press, Singapore, p. 500-559 (1989).

[P] POPA (M.). — On the base locus of the generalized theta divisor, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329, no. 6, p. 507-512 (1999).

[R] RAYNAUD (M.). — Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, Bull. Soc. math. France, 110, p. 103-125 (1982).