ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Yarakamé Souleymane Daniogo

Solutions indéfiniment différentiables d'un système d'équations aux différences et application aux systèmes d'équations aux dérivées partielles

Tome XVI, nº 1 (2007), p. 91-106.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_1_91_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 1, 2007
pp. 91–106

Solutions indéfiniment différentiables d'un système d'équations aux différences et application aux systèmes d'équations aux dérivées partielles[*]

Yarakamé Souleymane Daniogo[1]

Résumé. — Dans cette note, nous prouvons l'existence de solutions indéfiniment différentiables d'un système de deux équations aux différences et appliquons la technique utilisée à l'étude des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles.
Dans chaque cas, on montre que les solutions sont les premières composantes des solutions d'un système matriciel que nous étudions.

Abstract. — In this note, we prove the existence of the infinitely differentiable solutions of a system of two difference equations and then apply the developed technique to the study of some systems of linear partial differential equations.
In each case, we show that the solutions are the first components of solutions of a matrix system which we study.

Introduction

On définit, sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ des fonctions complexes indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^2$, les automorphismes X_1 et X_2 par :

$$X_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + 1, x_2) \quad \text{et} \quad X_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 1).$$

Pour tout polynôme R de l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$, notons $R(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})$ l'opérateur obtenu en remplaçant respectivement, dans l'expression de R, les indéterminées z_1, z_2, z_3, z_4 par X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}. On considère sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ la structure canonique de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$-module. Soit W une fonction complexe indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

(*) Reçu le 13 mai 2005, accepté le 9 février 2006.
(1) Université d'Angers, LAREMA, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers, France
daniogo@tonton.univ-angers.fr

Une équation aux différences, linéaire, à coefficients constants, sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, relativement aux pas récurrents $(1,0)$ et $(0,1)$, s'écrit :

$$R(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})f = W;$$

f est l'inconnue. En multipliant chacun de ses membres par un opérateur $X_1^k X_2^l$, pour des entiers k, $l \in \mathbb{N}$ convenablement choisis, elle se ramène à la forme : $Q(X_1, X_2)\, f = W$, où $Q \in \mathbb{C}[z_1,\, z_2]$. On se propose de montrer qu'un système d'équations du type :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Q_1(X_1, X_2)f & = & W_1 \\ Q_2(X_1, X_2)f & = & W_2 \end{array} \right. , \qquad \text{avec} \qquad Q_1(X_1, X_2)\, W_2 = Q_2(X_1, X_2)\, W_1, \tag{0.1}$$

admet des solutions indéfiniment différentiables, sous l'hypothèse :

Hypothèse 0.1. — *L'idéal engendré par les polynômes Q_1 et Q_2 dans l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ est de codimension finie.*

La condition $Q_1(X_1, X_2)\, W_2 = Q_2(X_1, X_2)\, W_1$ est appelée relation de compatibilité des équations du système (0.1). Du fait de la commutation de $Q_1(X_1, X_2)$ et $Q_2(X_1, X_2)$, elle est une condition nécessaire à l'existence d'une solution.

On note $\mathfrak{I}$ l'idéal engendré par les opérateurs $Q_1(X_1, X_2)$ et $Q_2(X_1, X_2)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$.

Si $\mathfrak{I}$ est égal à $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$, l'élément unité s'exprime sous la forme : $1 = \sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})\, Q_k(X_1, X_2)$. Dans ces conditions, on vérifie que la fonction $\sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}) W_k$ est l'unique solution du système (0.1). Pour éliminer ce cas évident, dans toute la suite, nous supposons que

$$\mathfrak{I} \neq \mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}].$$

Des travaux ont été menés, dans certains cas particuliers du sujet où $W_1 = W_2 = 0$.
En 1993, J.-P. Bézivin et F. Gramain ont démontré que si une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on identifie naturellement $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$) vérifie deux équations aux différences du type $P(X_1)\, f = 0$ et $Q(X_2)\, f = 0$, où P et Q sont des polynômes non nuls à une indéterminée, alors f est un polynôme exponentiel (c-à-d de la forme $f(z) = \sum_{i=0}^{k} A_i e^{\alpha_i z}$, où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $A_i \in \mathbb{C}[z]$) [3].

Récemment, une technique qui peut être utilisée pour résoudre le système (0.1), dans le cas $W_1 = W_2 = 0$, fut développée par J.-C. Jolly pour étudier les solutions méromorphes (voir première partie de [7]). L'idée de cette méthode est de ramener, dans un premier temps, ce sujet à l'étude d'une famille finie de systèmes particuliers d'équations. Puis, on transforme ces derniers en des systèmes matriciels de manière à exprimer les solutions du système primaire à partir des solutions des systèmes matriciels générés. Cependant, lorsque l'une des fonctions W_1 ou W_2 est non nulle, l'application de cette méthode devient ardue et rencontre des problèmes.

Dans cet exposé, à travers la construction d'une solution du problème principal, nous transformons directement le système (0.1) en un système matriciel de sorte que ses solutions soient les premières composantes des solutions du système matriciel. Ce transfert de problèmes est rendu possible grâce à une application linéaire ρ. Elle joue un rôle capital. On simplifiera ainsi le travail, avec ce système matriciel.

Cette méthode sera, par la suite, appliquée à l'étude des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. Nous ferons, aussi, quelques remarques sur sa généralisation.

1. Solutions du système d'équations aux différences (0.1)

1.1. Quelques propriétés utiles

Proposition 1.1. — *Les opérateurs X_1 et X_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. Les algèbres $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ et $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ sont, donc, isomorphes.*

Démonstration 1.2. — Pour deux nombres complexes non nuls a et b donnés, considérons la fonction $\exp(a\,x_1 + b\,x_2)$. Tout opérateur $R(X_1, X_2)$ de l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ vérifie la relation :

$$R(X_1, X_2)\exp(a\,x_1 + b\,x_2) = R(e^a, e^b)\,\exp(a\,x_1 + b\,x_2).$$

Par conséquent, si nous avons $R(X_1, X_2) = 0$, alors le polynôme R est nul. Il en résulte que X_1 et X_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. □

Proposition 1.3. — *Les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux : c'est-à-dire, leurs diviseurs communs dans l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_2]$, sont uniquement les nombres complexes non nuls.*

Cette condition repose sur l'hypothèse 0.1 qui est équivalente à la donnée de deux polynômes Q_1 et Q_2 ayant un nombre fini de zéros en commun [1]. Or ceci n'est possible que s'ils sont premiers entre eux.
On l'utilisera pour introduire l'application linéaire ρ.

Proposition 1.4. — *L'idéal $\mathfrak{I}$ est de codimension finie dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$.*

Démonstration 1.5. — On note $\widetilde{\mathfrak{I}}$ l'idéal engendré par les deux opérateurs $Q_1(X_1, X_2)$ et $Q_2(X_1, X_2)$ dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$. Cette preuve s'appuie sur le fait que toute classe de l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{C}[X_1,X_2,X_1^{-1},X_2^{-1}]}{\mathfrak{I}}$ admet un représentant dans l'espace $\mathbb{C}[X_1, X_2]$.
En effet, avec la proposition 1.1 et l'hypothèse 0.1, on voit que $\widetilde{\mathfrak{I}}$ est de codimension finie. Dans ces conditions, les idéaux $\mathfrak{I} \cap \mathbb{C}[X_1]$ et $\mathfrak{I} \cap \mathbb{C}[X_2]$ ne sont pas réduits à l'idéal nul $\{0\}$ (car sinon, un supplémentaire de $\widetilde{\mathfrak{I}}$ dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ contiendrait $\mathbb{C}[X_1]$ ou $\mathbb{C}[X_2]$: ce qui est contradictoire). En outre, la relation $\mathfrak{I} \neq \mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$ permet de voir qu'ils sont, en fait, des idéaux propres. Soit $R(X_1)$ un générateur de $\mathfrak{I} \cap \mathbb{C}[X_1]$. On pose $R(X_1) = \alpha\, X_1^{\nu} + T(X_1)$, où α est un nombre complexe non nul et $T \in \mathbb{C}[z_1]$ est un polynôme dont la valuation est au moins égale à $\nu + 1$, avec $\nu \in \mathbb{N}$. Alors, la relation $X_1^{-1} = -\frac{1}{\alpha}\, X_1^{-\nu-1}\, T(X_1) + \frac{1}{\alpha}\, X_1^{-\nu-1}\, R(X_1)$ est satisfaite et par suite, la classe de X_1^{-1} admet un représentant dans $\mathbb{C}[X_1]$. De même, la classe de X_2^{-1} admet un représentant dans $\mathbb{C}[X_2]$. Par conséquent, l'application canonique de $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ dans l'espace quotient $\frac{\mathbb{C}[X_1,X_2,X_1^{-1},X_2^{-1}]}{\mathfrak{I}}$ est surjective et on obtient l'isomorphisme d'algèbres : $\frac{\mathbb{C}[X_1,X_2]}{\mathfrak{I}\cap\mathbb{C}[X_1,X_2]} \simeq \frac{\mathbb{C}[X_1,X_2,X_1^{-1},X_2^{-1}]}{\mathfrak{I}}$.
Comme l'idéal $\widetilde{\mathfrak{I}}$ est inclus dans l'intersection $\mathfrak{I} \cap \mathbb{C}[X_1, X_2]$ et est de codimension finie dans l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, X_2]$, on en déduit la proposition. □

1.2. Les principaux outils

Soient u et v deux fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^2$, vérifiant la relation $(X_1 - 1)v = (X_2 - 1)u$. On pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Ce paragraphe vise à étudier dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, le système d'équations :

$$\begin{cases} (X_1 - 1)\, g &= u \\ (X_2 - 1)\, g &= v \end{cases} \tag{1.1}$$

et à introduire l'application ρ. Ce système servira à résoudre le problème matriciel.

Notons pour commencer, que les solutions du système (1.1) sont obtenues à l'addition d'une fonction doublement périodique près, de périodes e_1 et e_2. En outre, si g_1 est une solution de $(X_1 - 1)\, g = u$, on obtient une solution de ce système en additionnant à g_1 une solution e_1-périodique g_2 de l'équation $(X_2 - 1)\, g = v - (X_2 - 1)\, g_1$. La proposition qui suit termine l'étude du système (1.1).

Proposition 1.6. — *Le système d'équations (1.1) admet des solutions indéfiniment différentiables sur* $\mathbb{R}^2$. *Plus précisément, il existe deux fonctions* g_1 *et* g_2 *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, *vérifiant les relations :* $(X_1 - 1)\, g_1 = u$, $(X_1 - 1)\, g_2 = 0$ *et* $(X_2 - 1)\, g_2 = v - (X_2 - 1)\, g_1$.

Démonstration 1.7. — Soit $\{\varphi_{-\infty},\ \varphi_{+\infty}\}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité du plan $\mathbb{R}^2$ telle que les supports de $\varphi_{-\infty}$ et $\varphi_{+\infty}$ vérifient les inclusions : $\operatorname{supp} \varphi_{-\infty} \subset]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$ et $\operatorname{supp} \varphi_{+\infty} \subset]-1, +\infty[\times \mathbb{R}$.
Pour tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, un nombre fini de translatées $(x_1 + n, x_2)$ (respt. $(x_1 - n, x_2)$) appartiennent au support de $\varphi_{-\infty}$ (respt. $\varphi_{+\infty}$) $(n \in \mathbb{N})$.
La somme

$$g_1(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi_{+\infty}\, u)(x_1 - n, x_2) - \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi_{-\infty}\, u)(x_1 + n, x_2)$$

est, donc, convergente sur $\mathbb{R}^2$ et y est indéfiniment différentiable. On vérifie bien, à l'aide de l'égalité $\varphi_{-\infty} + \varphi_{+\infty} = 1$, la relation $(X_1 - 1)\, g_1 = u$.
Concernant la fonction g_2, la relation de compatibilité $(X_1 - 1)v = (X_2 - 1)u$ entraine que $v - (X_2 - 1)\, g_1$ est e_1-périodique. En procédant comme précédemment, avec à la place de u l'expression $v - (X_2 - 1)\, g_1$, on termine la démonstration de la proposition, en choisissant une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité, cette fois-ci, e_1-périodique et subordonnée au recouvrement ouvert $\{\mathbb{R} \times]-\infty, 1[,\ \mathbb{R} \times]-1, +\infty[\}$. Cette partition peut être obtenue de la façon suivante : On désigne par Pr_2 l'application deuxième projection de $\mathbb{R}^2$. Soit $\{\Theta_{-\infty},\ \Theta_{+\infty}\}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité de la droite $\mathbb{R}$ telle qu'on ait les inclusions : $\operatorname{supp} \Theta_{-\infty} \subset]-\infty, 1[$ et $\operatorname{supp} \Theta_{+\infty} \subset]-1, +\infty[$.
La famille $\{\Theta_{-\infty} \circ \mathrm{Pr}_2,\ \Theta_{+\infty} \circ \mathrm{Pr}_2\}$ représente, donc, une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité, e_1-périodique. D'où la proposition. $\square$

Nous allons à présent, introduire l'application linéaire ρ. Elle servira à ramener le problème principal à un problème matriciel. Son importance est liée au fait que le problème matriciel est plus aisé à étudier.

Proposition 1.8. — *Il existe une application* $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$-*linéaire* ρ *définie de* $\mathfrak{I}$ *dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, *vérifiant :* $\rho(Q_1(X_1, X_2)) = W_1$ *et* $\rho(Q_2(X_1, X_2)) = W_2$.

Démonstration 1.9. — Pour tout élément

$$\Theta = \sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})\, Q_k(X_1, X_2)$$

de l'idéal $\mathfrak{I}$, on pose

$$\rho(\Theta) = \sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})\, W_k.$$

La proposition est vérifiée si cette égalité est indépendante de l'expression de Θ. Nous allons, donc, prouver que si on a

$$\sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}) Q_k(X_1, X_2) = 0,$$

alors, nécessairement, la relation $\sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})\, W_k = 0$ est satisfaite. En multipliant chaque membre de

$$\sum_{k=1}^{2} R_k(X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1})\, Q_k(X_1, X_2) = 0$$

par un opérateur $X_1^k X_2^l$, avec k et l convenablement choisis dans $\mathbb{N}$, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que Θ est de la forme :

$$\Theta = \sum_{k=1}^{2} P_k(X_1, X_2)\, Q_k(X_1, X_2), \text{ avec} P_k \in \mathbb{C}[z_1,\ z_2].$$

Le problème posé revient, ainsi, à prouver l'implication :

$$\sum_{k=1}^{2} P_k(X_1, X_2)\, Q_k(X_1, X_2) = 0 \implies \sum_{k=1}^{2} P_k(X_1, X_2)\, W_k = 0. \quad (1.2)$$

Dans ces conditions, puisque X_1 et X_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ (voir Prop. 1.1), nous avons $P_1\, Q_1 + P_2\, Q_2 = 0$. Comme les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, suivant le théorème de Gauss, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[z_1,\ z_2]$ tel que $P_1 = P\, Q_2$ et $P_2 = -P\, Q_1$. Par conséquent, avec la relation de compatibilité $Q_1(X_1, X_2)\, W_2 = Q_2(X_1, X_2)\, W_1$, on a le résultat recherché :

$$\sum_{k=1}^{2} P_k(X_1, X_2)\, W_k = P(X_1, X_2)[Q_2(X_1, X_2)\, W_1 - Q_1(X_1, X_2)\, W_2] = 0.$$

L'application ρ est, donc, bien définie et la proposition est satisfaite. $\square$

Corollaire 1.10. — *Si une fonction f_0 vérifie les conditions $Q_1(X_1, X_2)\, f_0 = W_1$ et $Q_2(X_1, X_2)\, f_0 = W_2$, alors, pour tout $\Theta \in \mathfrak{I}$, on a : $\rho(\Theta) = \Theta\, f_0$.*

1.3. Exposé introductif du problème matriciel

Pour simplifier les notations, par abus d'écriture, on notera $\mathfrak{I}^m$ (respt. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})^m$) l'espace des matrices à une colonne, m lignes et à coefficients dans $\mathfrak{I}$ (respt. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})$). L'extension naturelle de l'application ρ à $\mathfrak{I}^m$ sera encore désignée par ρ.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une base d'un supplémentaire de l'idéal $\mathfrak{I}$ dans l'algèbre des opérateurs $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$ telle que $\varepsilon_1 = 1$. On note ε^{t} la transposée de ε (vue comme une matrice à une ligne).
Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on considère les décompositions suivant l'idéal $\mathfrak{I}$ et la base ε :

$$X_1\,\varepsilon_i = T_{i1} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,\varepsilon_j \quad \text{et} \quad X_2\,\varepsilon_i = T_{i2} + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\,\varepsilon_j,$$

avec T_{i1}, T_{i2} appartenant à $\mathfrak{I}$ et a_{ij}, b_{ij} appartenant à $\mathbb{C}$. En posant $\mathbf{A}_1 = (a_{ij})_{i,j}$, $\mathbf{A}_2 = (b_{ij})_{i,j}$, $T_1 = (T_{i1})_i$ et $T_2 = (T_{i2})_i$, avec $i,\ j = 1, \dots, m$, ces égalités se traduisent ensemble, par les écritures matricielles :

$$(X_1 - \mathbf{A}_1)\,\varepsilon^{\mathrm{t}} = T_1 \quad \text{et} \quad (X_2 - \mathbf{A}_2)\,\varepsilon^{\mathrm{t}} = T_2.$$

On en déduit la proposition :

Proposition 1.11. — *Les opérateurs $(X_1 - \mathbf{A}_1)\,\varepsilon^t$ et $(X_2 - \mathbf{A}_2)\,\varepsilon^t$ appartiennent à $\mathfrak{I}^m$.*

Le problème matriciel : Il consiste à étudier, dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{C})^m$, le système d'équations matricielles :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (X_1 - \mathbf{A}_1)F & = & \rho((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^{\mathrm{t}}) \\ (X_2 - \mathbf{A}_2)F & = & \rho((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^{\mathrm{t}}) \end{array} \right. . \tag{1.3}$$

Proposition 1.12. — *On a la relation de compatibilité des équations :* $(X_1 - \mathbf{A}_1)\rho((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^t) = (X_2 - \mathbf{A}_2)\rho((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^t)$.

Démonstration 1.13. — Puisque ρ est $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$-linéaire, nous avons :

$$\begin{array}{lcl} (X_1 - \mathbf{A}_1)\rho((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^{\mathrm{t}}) & = & \rho((X_1 - \mathbf{A}_1)(X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^{\mathrm{t}}), \\ (X_2 - \mathbf{A}_2)\rho((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^{\mathrm{t}}) & = & \rho((X_2 - \mathbf{A}_2)(X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^{\mathrm{t}}). \end{array}$$

On en déduit, avec la commutation de $(X_1 - \mathbf{A}_1)$ et $(X_2 - \mathbf{A}_2)$, la relation $(X_1 - \mathbf{A}_1)\rho((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^{\mathrm{t}}) = (X_2 - \mathbf{A}_2)\rho((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^{\mathrm{t}})$. □

Proposition 1.14. — *Les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Les matrices* $\mathbf{A}_1$ *et* $\mathbf{A}_2$ *sont inversibles et commutent,*
2. $Q_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = Q_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = 0$.

Démonstration 1.15. — Ces propriétés sont des corollaires de celles des automorphismes définis de façon naturelle, par l'action multiplicative des classes de X_1 et X_2 sur l'algèbre $\frac{\mathbb{C}[X_1,X_2,X_1^{-1},X_2^{-1}]}{\mathfrak{J}}$. En effet, par construction, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ ont respectivement pour transposées, les matrices de ces deux automorphismes dans la base $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_m)$. La première propriété est par conséquent, évidemment vérifiée. Concernant la seconde, la condition $Q_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = Q_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \bar{0}$ montre qu'elle est également vérifiée. □

Théorème 1.16. — *Le problème matriciel admet des solutions.*

Démonstration 1.17. — Pour prouver ce théorème, le lemme 1.18 ci-dessous, servira à faire un changement d'inconnues, afin de réduire le problème matriciel au système (1.1). Ce lemme est bien connu (il se démontre à l'aide de la décomposition de Dunford, en déterminant $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ sous forme de polynôme en $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ respectivement).

Lemme 1.18. — *Si* $\mathbf{A}_1$ *et* $\mathbf{A}_2$ *sont deux matrices inversibles qui commutent, il existe deux matrices* $\mathbf{B}_1$ *et* $\mathbf{B}_2$ *vérifiant :* $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_1 = \exp \mathbf{B}_1$ *et* $\mathbf{A}_2 = \exp \mathbf{B}_2$.

La première condition de la proposition 1.14, entraine l'existence de $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$. Soient respectivement ϑ et τ deux solutions des cas particuliers du système (1.1) donnés par : $(u, v) = (1, 0)$ et $(u, v) = (0, 1)$ (voir le paragraphe 1.2). On pose par définition :

$$\mathbf{A}_1^{\vartheta} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C}) \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \exp(\vartheta(x_1, x_2)\,\mathbf{B}_1) \end{array} \text{ et } \mathbf{A}_2^{\tau} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C}) \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \exp(\tau(x_1, x_2)\,\mathbf{B}_2) \end{array}.$$

On définit de la même façon $\mathbf{A}_1^{-\vartheta}$ et $\mathbf{A}_2^{-\tau}$ en remplaçant dans ces définitions ϑ par $-\vartheta$ et τ par $-\tau$. Il est immédiat, avec le lemme 1.18, que les fonctions $\mathbf{A}_1^{\vartheta}$ et $\mathbf{A}_2^{\tau}$ commutent, sont inversibles et ont respectivement pour inverses $\mathbf{A}_1^{-\vartheta}$ et $\mathbf{A}_2^{-\tau}$.

Le changement d'inconnues $F = \mathbf{A}_1^{\vartheta}\,\mathbf{A}_2^{\tau}\,G$, opéré dans le problème matriciel, conduit par une suite de transformations équivalentes, au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (X_1 - \mathbf{I}_m)G & = & \mathbf{A}_1^{-\vartheta}\,\mathbf{A}_1^{-1}\,\mathbf{A}_2^{-\tau}\,\rho((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^{\mathrm{t}}) \\ (X_2 - \mathbf{I}_m)G & = & \mathbf{A}_1^{-\vartheta}\,\mathbf{A}_2^{-\tau}\,\mathbf{A}_2^{-1}\,\rho((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^{\mathrm{t}}) \end{array} \right. , \tag{1.4}$$

où $\mathbf{I}_m$ est la matrice unité d'ordre m. On vérifie, à l'aide de la relation de compatibilité des équations du problème matriciel, que les équations du système (1.4) sont bien compatibles. De plus, en raisonnant composante par composante, on voit que les coordonnées des solutions de ce système sont les solutions d'un système d'équations du type (1.1) (étudié au paragraphe 1.2). D'où le théorème. □

1.4. Solutions du problème principal

L'étude du système (0.1) s'achève à travers le théorème que voici :

Théorème 1.19. — *Soient W_1, W_2 deux fonctions de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et Q_1, Q_2 deux polynômes de l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ tels que l'idéal qu'ils engendrent soit de codimension finie. On suppose que la relation $Q_1(X_1, X_2)\, W_2 = Q_2(X_1, X_2)\, W_1$ est satisfaite et que l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par les opérateurs $Q_1(X_1, X_2)$ et $Q_2(X_1, X_2)$ dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$ est non trivial. Alors, le système d'équations (0.1) admet des solutions. Elles sont les premières composantes des solutions du problème matriciel associé.*

Démonstration 1.20. — Le théorème 1.19 se démontre, à l'aide du lemme 1.21 ci-dessous. Une preuve de ce lemme sera donnée ultérieurement :

Lemme 1.21. — *Pour tout opérateur $H(X_1, X_2) \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ et pour toute solution F du problème matriciel, nous avons les propriétés :*

1. $[H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)]\varepsilon^t \in \mathfrak{I}^m$,
2. $[H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)]F = \rho((H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2))\varepsilon^t)$.

Soit $F = (f_1, \ldots, f_m)$ une solution du problème matriciel. Compte tenu de la seconde condition de la proposition 1.14, le lemme précédent implique :

$$\begin{cases} (Q_1(X_1, X_2) - Q_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2))\varepsilon^t = Q_1(X_1, X_2)\varepsilon^t \in \mathfrak{I}^m \\ (Q_2(X_1, X_2) - Q_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2))\varepsilon^t = Q_2(X_1, X_2)\varepsilon^t \in \mathfrak{I}^m \end{cases},$$

puis

$$\begin{cases} Q_1(X_1, X_2)F = \rho(Q_1(X_1, X_2)\varepsilon^t) \\ Q_2(X_1, X_2)F = \rho(Q_2(X_1, X_2)\varepsilon^t) \end{cases}.$$

Comme $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$, les premières composantes de ces dernières égalités sont :

$$\begin{cases} Q_1(X_1, X_2)f_1 = W_1 \\ Q_2(X_1, X_2)f_1 = W_2 \end{cases}.$$

La composante f_1 de F est donc une solution du problème principal.
Par ailleurs, il résulte directement du corollaire 1.10 et la proposition 1.11, que si f est une solution du problème principal, la fonction définie par $\varepsilon^t f$ est une solution du problème matriciel. Le théorème est par conséquent, satisfait.

Démonstration du lemme 1.21. — On pose :

$$H(z_1, z_2) - H(z_3, z_4) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, (z_1^i z_2^j - z_3^i z_4^j), \text{ avec } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Il résulte de l'identité $z_1^i z_2^j - z_3^i z_4^j = (z_1^i - z_3^i) z_2^j + (z_2^j - z_4^j) z_3^i$ qu'il existe un polynôme $P_{123} \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ et un polynôme $P_{234} \in \mathbb{C}[z_2, z_3, z_4]$ tels que :

$$H(z_1, z_2) - H(z_3, z_4) \;=\; P_{123}\, (z_1 - z_3) + P_{234}\, (z_2 - z_4).$$

Dans ces conditions, l'opérateur $[H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)]\varepsilon^t$ est égal à l'expression :

$$P_{123}(X_1, X_2, \mathbf{A}_1)\, (X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^t + P_{234}(X_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\, (X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^t.$$

C'est, donc, un élément de $\mathfrak{I}^m$. Par ailleurs, pour toute solution F, en utilisant la linéarité de ρ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho\left((H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2))\varepsilon^t\right) &= P_{123}(X_1, X_2, \mathbf{A}_1)\, \rho\left((X_1 - \mathbf{A}_1)\varepsilon^t\right) \\
&\quad + P_{234}(X_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\, \rho\left((X_2 - \mathbf{A}_2)\varepsilon^t\right), \\
\rho\left((H(X_1, X_2) - H(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2))\varepsilon^t\right) &= P_{123}(X_1, X_2, \mathbf{A}_1)\, (X_1 - \mathbf{A}_1)F \\
&\quad + P_{234}(X_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)\, (X_2 - \mathbf{A}_2)F
\end{aligned}$$

et le second résultat est, ainsi, démontré. □

Ce qui suit est une conséquence directe du théorème 1.19.

Corollaire 1.22. — *L'application première projection de l'espace des solutions du problème matriciel dans l'espace des solutions du problème principal, est un isomorphisme affine. L'isomorphisme réciproque est ε^t.*

2. Application aux systèmes d'équations aux dérivées partielles

On considère deux polynômes Q_1, Q_2 de $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ vérifiant l'hypothèse 0.1 et deux fonctions W_1, W_2 de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. La technique utilisée, dans l'étude antérieure, s'applique plus facilement, à l'étude du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) f = W_1 \\ Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) f = W_2 \end{cases}, \quad \text{avec } Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) W_2 = Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) W_1. \tag{2.1}$$

Comme précédemment, on se réduit au cas où l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par les opérateurs $Q_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ et $Q_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$ est tel que $\mathfrak{I} \neq \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$. Nous rappelons la propriété suivante des dérivées partielles (voir la référence [4]) :

Proposition 2.1. — *Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.*

De ce fait, l'algèbre $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ et donc $\mathfrak{I}$ est de codimension finie. On construit un problème matriciel, en suivant la même démarche qu'au paragraphe 1.3. Plus précisément, il existe une application $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$-linéaire $\rho : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, vérifiant : $\rho(Q_1(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})) = W_1$ et $\rho(Q_2(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})) = W_2$. Soit $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ une base d'un supplémentaire de l'idéal $\mathfrak{I}$ dans $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$. On considère la transposée $\mathbf{A}_1$ (respt. $\mathbf{A}_2$) de la matrice (dans la base $\bar{\varepsilon}$) de l'endomorphisme défini par l'action multiplicative de la classe de $\frac{\partial}{\partial x_1}$ (respt. $\frac{\partial}{\partial x_2}$) sur l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]}{\mathfrak{I}}$. On obtient dans ces conditions, le système matriciel :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{A}_1\right) F &= \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{A}_1\right) \varepsilon^{\mathrm{t}}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{A}_2\right) F &= \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{A}_2\right) \varepsilon^{\mathrm{t}}\right) \end{cases}, \tag{2.2}$$

où le domaine de définition de ρ a été étendu naturellement à $\mathfrak{I}^m$ (la compatibilité de ces équations, se vérifie par calcul). Les matrices $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ ne sont pas ici, nécessairement inversibles. Le problème matriciel (2.2) admet des solutions. En effet, en opérant le changement d'inconnues $F = e^{(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2)}G$, par une suite de transformations équivalentes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} G &= V_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} G &= V_2 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} V_1, \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{-(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2)} \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{A}_1\right) \varepsilon^{\mathrm{t}}\right), \\ V_2 &= e^{-(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2)} \rho\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{A}_2\right) \varepsilon^{\mathrm{t}}\right). \end{aligned}$$

Soient a_1 et a_2 deux nombres réels quelconques. La fonction définie par l'expression $\int_{a_1}^{x_1} V_1(\xi_1, a_2)d\xi_1 + \int_{a_2}^{x_2} V_2(x_1, \xi_2)d\xi_2$, est une solution du système précédent (la vérification utilise la relation de compatibilité de ses équations). L'ensemble de ses solutions est un espace affine de direction $\mathbb{C}^m$. La relation $F = e^{(x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2)}G$, détermine les solutions F du problème matriciel (2.2), à partir des solutions G du système d'équations (2.3). Le théorème ci-dessous se démontre comme le théorème 1.19.

Théorème 2.2. — *Soient W_1, W_2 deux fonctions de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et Q_1, Q_2 deux polynômes de l'algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ tels que l'idéal qu'ils engendrent soit de codimension finie. On suppose que la relation*

$$Q_1(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})W_2 = Q_2(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})\, W_1$$

est satisfaite et l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par les opérateurs $Q_1(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ et $Q_2(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ dans $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$ est non trivial. Alors, le problème principal (2.1) admet des solutions. Elles sont les premières composantes des solutions du problème matriciel (2.2).

Corollaire 2.3. — *L'application première projection de l'espace des solutions du problème matriciel (2.2) dans l'espace des solutions du problème principal (2.1), est un isomorphisme affine. La dimension de l'espace des solutions du problème principal (2.1) est donc égale à la codimension m de l'idéal engendré par les polynômes Q_1 et Q_2.*

Soient $W_1, \dots, W_\nu$ des fonctions indéfiniment différentiables de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $Q_1, \dots, Q_\nu$ des polynômes de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tels que l'idéal qu'ils engendrent soit de codimension finie (Hypothèse 0.1 généralisée), où $n, \nu \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 2$ et $\nu \geqslant 1$. En supposant satisfaite la condition de Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov (D'après [8], cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution) :

$$\sum_{k=1}^{\nu} P_k(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n})\, Q_k(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=1}^{\nu} P_k(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n})\, W_k = 0$$

J. D'Almeida a étudié, dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, la généralisation suivante du système (2.1) : $Q_k(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})f = W_k$; $k = 1, \dots, \nu$ (voir la référence [2]). Il donne dans des cas particuliers, des méthodes de construction d'une solution, et montre que la dimension de l'espace affine défini par les solutions, est égale à la codimension de l'idéal engendré par les polynômes Q_k.

De façon directe, la condition de Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov montre qu'il existe une application $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$-linéaire ρ, définie de l'idéal $\mathfrak{I}$ (engendré par les $Q_k(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})$) dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ et vérifiant les relations : $\rho(Q_k(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n})) = W_k$. A travers l'étude du système (2.1), on peut noter que, sous cette condition et l'hypothèse 0.1 généralisée, la méthode de résolution exposée, résout le problème posé par J. D'Almeida. Elle permet d'obtenir ses résultats, et détermine l'espace des solutions.

3. Quelques remarques sur la généralisation de la méthode

Pour commencer, remarquons que, sous l'hypothèse 0.1, la propriété (1.2) (voir la preuve de Prop. 1.8) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution. En outre, elle entraine la relation de compatibilité du système d'équations (0.1). Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, on pose $X_i\, f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},\, x_i+1,\, x_{i+1},\ldots,x_n)$, avec $n \geqslant 2$ et $i = 1,\ldots,n$. Soient $W_1,\ldots,W_\nu$ des fonctions de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ et $Q_1,\ldots,Q_\nu$ des polynômes de l'algèbre $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ satisfaisant à l'hypothèse 0.1 généralisée, où $\nu \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas (général) du système d'équations aux différences $Q_k(X_1,\ldots,X_n)\, f = W_k$, avec $k = 1,\ldots,\nu$, la propriété (1.2) se traduit par la relation :

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{k=1}^{\nu} P_k(X_1,\ldots,X_n)\, Q_k(X_1,\ldots,X_n) = 0 \\ \Downarrow \\ \textstyle\sum_{k=1}^{\nu} P_k(X_1,\ldots,X_n)\, W_k = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. — *Si la propriété (3.1) est satisfaite, alors il existe dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ une solution du système d'équations*

$$Q_k(X_1,\ldots,X_n)\, f = W_k, \textit{avec } k = 1,\ldots,\nu.$$

Démonstration 3.2. — On conserve la notation $\mathfrak{I}$ pour désigner l'idéal engendré par les opérateurs $Q_k(X_1,\ldots,X_n)$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\, X_1^{-1},\ldots,X_n^{-1}]$ et on suppose $\mathfrak{I} \neq \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\, X_1^{-1},\ldots,X_n^{-1}]$, pour éliminer les cas évidents.
En procédant comme dans l'étude du système (0.1), on voit que l'idéal $\mathfrak{I}$ est de codimension finie et l'application $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\, X_1^{-1},\ldots,X_n^{-1}]$-linéaire $\rho : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, qui envoie $Q_k(X_1,\ldots,X_n)$ sur W_k est bien définie. En outre, l'étude du cas général se réduit à la construction d'une solution d'un système de la forme $(X_i-1)\, g = u_i$, $i = 1,\ldots,n$, où les seconds membres u_i appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ et vérifient les $\binom{n}{2}$ relations de compatibilité

$(X_i-1)\, u_j = (X_j-1)\, u_i$. A l'instar de l'étude du paragraphe 1.2, si $g_1, \ldots, g_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle qu'on ait les relations : $(X_1 - 1)\, g_1 = u_1$ et pour $l = 2, \ldots, n$,

$$(X_1-1)\, g_l = 0, \quad \ldots \quad , (X_{l-1}-1)\, g_l = 0, \quad (X_l-1)\, g_l = u_l-(X_l-1) \sum_{i=1}^{l-1} g_i,$$

alors, la somme $\sum_{i=1}^{n} g_i$ est une solution du système $(X_i - 1)\, g = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ces fonctions se construisent de la même façon qu'au paragraphe 1.2. La proposition est, donc, satisfaite. $\square$

On déduit de ce résultat que la propriété (3.1) est aussi une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution. Son équivalent dans l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles est la condition de Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov (voir [8]).

Pour $n = \nu = 2$, à partir de l'étude du système (0.1), on peut voir que, sous l'hypothèse 0.1, la propriété (1.2) est équivalente à la compatibilité des équations du système (0.1).

Dans le cas contraire, la compatibilité des équations se traduit par les $\binom{\nu}{2}$ égalités $Q_k(X_1, \ldots, X_n)\, W_j = Q_j(X_1, \ldots, X_n)\, W_k$. La propriété (3.1) implique ces égalités. L'implication inverse reste un problème ouvert. Sans donner de contre-exemple, nous pensons qu'elle n'est pas toujours satisfaite. Ceci constitue le nœud de la généralisation.
Cependant, le cas particulier où les polynômes $Q_1, \ldots, Q_\nu$ forment une suite régulière (c'est-à-dire tout polynôme Q_k n'est pas un diviseur de zéro dans l'algèbre $\frac{\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]}{(Q_1,\ldots,Q_{k-1})}$ et $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \neq (Q_1, \ldots, Q_\nu)$), donne une réponse satisfaisante :

Théorème 3.3. — *On suppose que les polynômes $Q_1, \ldots, Q_\nu$ forment une suite régulière et les $\binom{\nu}{2}$ relations*

$$Q_k(X_1, \ldots, X_n)\; W_j = Q_j(X_1, \ldots, X_n)\, W_k$$

sont satisfaites. Alors, il existe une solution indéfiniment différentiable du système d'équations $Q_k(X_1, \ldots, X_n)\, f = W_k$, $k = 1, \ldots, \nu$.

Démonstration 3.4. — La proposition 3.1 montre qu'il suffit d'établir la propriété (3.1) pour que le théorème soit vérifié. Posons $\Omega = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Comme la proposition 1.1, les opérateurs $X_1, \ldots, X_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$. Pour simplifier les notations, on fera l'identification naturelle d'algèbres : $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$.

On considère la base canonique $(e_1, \ldots, e_\nu)$ du Ω-module Ω^ν, où, pour $k = 1, \ldots, \nu$, $e_k = (\delta_{kj})_{j=1,\ldots,\nu}$, avec $\delta_{kk} = 1$ et $\delta_{kj} = 0$ si $j \neq k$. Considérons le Ω-module $N = \{\sum_{k=1}^{\nu} P_k\, e_k \in \Omega^\nu \ / \ \sum_{k=1}^{\nu} P_k\, Q_k = 0\}$ et son sous-module N' engendré par la famille $Q_{k_1}\, e_{k_2} - Q_{k_2}\, e_{k_1}$, avec $1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant \nu$. Remarquons que, si $N = N'$, les $\binom{\nu}{2}$ relations de compatibilité entrainent la propriété (3.1). La preuve de cette égalité ($N = N'$) utilise une propriété du complexe de Koszul $K(Q_1, \ldots, Q_\nu)$ induite par la régularité de la suite $(Q_1, \ldots, Q_\nu)$ [6]. En effet, il est bien connu que si la suite $(Q_1, \ldots, Q_\nu)$ est régulière, les groupes d'homologie du complexe : $H_i(Q_1, \ldots, Q_\nu)$, avec l'entier $i > 0$, sont nuls; en particulier, $H_1(Q_1, \ldots, Q_\nu) = 0$. Par conséquent, l'égalité $H_1(Q_1, \ldots, Q_\nu) = \frac{N}{N'}$ (qui s'établit aisément) implique la relation $N = N'$. D'où le théorème. $\square$

Pour terminer l'étude de cet article, notons que l'utilisation des exponentiels matriciels (dans les changements d'inconnues), des partitions de l'unité et des intégrales (dans la résolution des systèmes matriciels (1.3) et (2.2)), fait que la méthode exposée n'est pas effective. Elle permet cependant d'obtenir des résultats intéressants, par des moyens assez simples. Outre l'étude des solutions indéfiniment différentiables, elle s'applique à l'étude des solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$, des systèmes d'équations aux différences. Cette dernière est l'objet de la référence [5].

Bibliographie

[1] Adams (W.W.), Loustaunau (P.). — An Introduction to Gröbner Bases, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Volume 3, p. 63 (1994).

[2] D'Almeida (J.). — Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants associés aux idéaux de colongueur finie, l'Enseignement Mathématique, t. 50, p. 19-24 (2004).

[3] Bézivin (J.-P.), Gramain (F.). — Solutions entières d'un système d'équations aux différences, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 43, 3, p. 791-814 (1993).

[4] Coutinho (S.C.). — A Primer of Algebraic D-modules, London Mathematical Society, Student Texts 33, Proposition 2.1, p. 9.

[5] Daniogo (Y.S.). — Solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de systèmes d'équations aux différences, avec seconds membres non tous nuls, à coefficients constants et à deux pas récurrents, thèse de Mathématiques, Université d'Angers (2006).

[6] Greuel (G.-M.), Pfister (G.). — A Singular, Introduction to Commutative Algebra, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, p. 369-374 (2002).

[7] Jolly (J.-C.). — Solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ des systèmes d'au moins deux équations (homogènes) aux différences, à coefficients constants et à deux pas récurrents (première partie), Solutions à ε près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés (deuxième partie), thèse de Maths., Université d'Angers, p. 3-34 (2001).

[8] Palamodov (V.P.). — Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Springer-Verlag, Chap. 6 et 7 (1970).