Annales de la faculté des sciences de Toulouse

E. Lacour

Sur l'équation de la chaleur $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{\delta u}{\delta z}$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 9, nº 3 (1895), p. B1-B19
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1895_1_9_3_B1_0>

SUR

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial z},$$

PAR M. E. LACOUR,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

INTRODUCTION.

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

dans laquelle u désigne une fonction de x, y, t, et k une constante positive, se présente dans la théorie de la chaleur quand on étudie comment varie avec le temps la température d'un plan indéfini. On donne à cette équation, en posant $kt=z$, une forme un peu plus simple

$$\delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

J'étends à cette équation quelques-uns des résultats donnés par M. Appell dans une Note *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$ (*Journal de Mathématiques* de Jordan, p. 187).

On peut trouver par un calcul direct toutes les transformations qui conservent à l'équation $\delta u=0$ sa forme. On applique l'une de ces transformations aux polynomes entiers en x, y, z qui satisfont à l'équation $\delta u=0$.

En considérant, en même temps que l'équation $\delta u=0$, l'équation adjointe

$$\delta' v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

on parvient à un théorème analogue au théorème de Green.

Une première application de ce théorème conduit à des formules se rattachant à des formules que M. Hermite a données pour des polynomes $U_{m,n}$ déduits par différentiation d'une exponentielle $e^{ax^2+2bxy+cy^2}$.

Le même théorème conduit à une égalité entre deux expressions de la température au temps t qu'on obtiendrait en regardant cette température comme déterminée par l'état antérieur correspondant à un instant t_1, puis à un instant t_2. Cette égalité peut servir à prolonger la définition d'une intégrale de l'équation $\delta u = 0$.

1. *Chercher toutes les transformations telles que*

$$u = \lambda(x, y, z)\,U(X, Y, Z),$$
$$X = \varphi(x, y, z), \qquad Y = \psi(x, y, z), \qquad Z = \chi(x, y, z)$$

qui ramènent l'équation

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

à la même forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Z} = 0.$$

1 (*a*). — Soit

$$u = \lambda U.$$

En regardant λ et U comme des fonctions de x, y, z, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\delta u = U\,\delta\lambda + \frac{2\,\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2\,\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda\,\delta U.$$

Exprimons les dérivées de U par rapport à x, y, z en fonction des dérivées de U prises par rapport à X, Y, Z. On a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x},$$

puis

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \Phi\left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

Φ désignant une forme quadratique dont le discriminant est le hessien de la fonction $U(X, Y, Z)$.

On obtient des expressions analogues pour $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, puis pour $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$. Si l'on substitue dans δu les expressions de $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ et δU et si l'on divise par λ le résultat de cette substitution, on obtient l'équation transformée sous la forme

$$\begin{aligned}
&U\frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{\partial U}{\partial X}\delta X + \frac{\partial U}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial U}{\partial Z}\delta Z \\
&+ \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial X}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \\
&+ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right] \\
&+ \frac{2\,\partial^2 U}{\partial Y\,\partial Z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{2\,\partial^2 U}{\partial Z\,\partial X}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y}\right) + \frac{2\,\partial^2 U}{\partial X\,\partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

En identifiant cette équation transformée avec

$$\delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Z},$$

on trouve

$$\delta\lambda = 0, \tag{1}$$

$$\delta X + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = -\left(\delta Z + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial y}\right); \tag{6}$$

il faut joindre à ces équations trois autres qui se déduisent de (2), (3) et (6), en y remplaçant X par Y, et que nous désignerons par (2)', (3)', (6)'.

1 (*b*). — Nous avons donc à étudier un système de neuf équations; mais ce système se simplifie beaucoup si l'on se limite au cas des fonctions

réelles. Dans ce cas, l'équation (5) donne les conditions

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

qui font déjà disparaître les équations (3) et (3)'.

Si l'on écrit les équations (6) et (6)', en tenant compte de ces nouvelles conditions, et, si l'on en rapproche l'équation (4), on a un système d'équations en X et Y, savoir

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$(6)' \qquad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

d'où l'on peut conclure, comme nous allons le voir, les identités

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

En effet, d'après (6), $\frac{\partial Z}{\partial z}$ est positif; nous pouvons poser

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = R^2;$$

puis, en tenant compte de (6) et (6)',

$$\frac{\partial X}{\partial x} = R\cos\alpha, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = R\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = R\cos\beta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = R\sin\beta.$$

Alors la condition (4) devient

$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

ou

$$\beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}.$$

En prenant $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, nous trouvons

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -R\sin\alpha, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = R\cos\alpha$$

et, par suite,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x};$$

et l'on sait que ces égalités entraînent

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

Si l'on prenait $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, les résultats se déduiraient des précédents en changeant Y en $-Y$.

On peut démontrer que α est indépendant de x et de y : en effet, les identités

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = 0$$

donnent, en se rappelant que R ne dépend que de z,

$$-\sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

$$\cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

Ainsi α est indépendant de x, y et, puisqu'on a posé,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = R\cos\alpha, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = R\sin\alpha,$$

R dépendant seulement de z, on voit que X *et* Y *sont des fonctions linéaires de x et y dont les coefficients sont fonctions de z.*

1 (*c*). — On en conclut d'abord que δX et δY se réduisent respectivement à $-\frac{\partial X}{\partial z}$ et à $-\frac{\partial Y}{\partial z}$. Alors les équations (2) et (2)′ deviennent, en y posant $2 \operatorname{Log} \lambda = \mu$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Nous pouvons éliminer μ entre ces deux équations, en les résolvant par rapport à $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ et en écrivant que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right).$$

Détaillons ce calcul.

D'abord, en tenant compte des relations

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{\partial X}{\partial y},\qquad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial x},$$

on peut dans les premiers membres des équations en $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ ne garder que l'une des fonctions X et Y, par exemple, X. Les deux équations deviennent

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$-\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial z},$$

et, comme

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial Z}{\partial z},$$

on obtient, en résolvant,

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}.$$

Différentions par rapport à y les deux membres de la première équation, puis, par rapport à x, les deux membres de la seconde équation, nous trouvons successivement

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x};$$

en retranchant membre à membre, il vient

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial z}=0.$$

1 (d). — En tenant compte des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents, nous allons pouvoir calculer successivement $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ et remonter de là à λ. L'égalité qui donne $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, savoir

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}$$

montre que $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ contient x et y au premier degré; dans le second membre, le coefficient de y est nul à cause de l'identité que nous avons rencontrée

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial X}{\partial x}=0;$$

donc $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ est de la forme

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=px+q,$$

p et q ne dépendant que de z; on en déduit

$$\mu=\frac{px^2}{2}+qx+\psi(y,z);$$

on voit de même la forme de μ considéré comme fonction de y, et on en conclut

$$\tfrac{1}{2}\mu=\operatorname{Log}\lambda=Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

les coefficients A, C, D, E, F ne dépendant que de z. On a par suite

$$\lambda=e^{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F}.$$

Il reste à déterminer les fonctions inconnues de z en écrivant que λ vérifie l'équation

$$\delta(\lambda)=\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0.$$

Comme l'on a

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\lambda(2Ax+D),\qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\lambda(2Ax+D)^2+2A\lambda,$$

on voit que l'équation $\delta\lambda = 0$ donne

$$(2Ax + D)^2 + (2Cy + E)^2 + 2A + 2C \equiv A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F',$$

et l'on trouve ainsi, pour déterminer A, C, ..., les équations

$$A' = 4A^2, \qquad C' = 4C^2,$$
$$D' = 4AD, \qquad E' = 4CE, \qquad F' = D^2 + E^2 + 2A + 2C.$$

Ces équations s'intègrent aisément; on obtient

$$A = -\frac{1}{4(z+h)}, \qquad C = -\frac{1}{4(z+k)},$$
$$D = \frac{a}{2(z+h)}, \qquad E = \frac{b}{2(z+k)},$$
$$F = -\frac{a^2}{4(z+h)} - \frac{b^2}{4(z+k)} - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(z+h) - \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(z+k),$$

a, b, h et k désignant des constantes, et il en résulte pour λ l'expression

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(z+h)(z+k)}}\, e^{-\frac{1}{4(z+h)}(x-a)^2 - \frac{1}{4(z+k)}(y-b)^2}.$$

1 (e). — Nous pouvons maintenant achever de déterminer X et Y; X satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Log}\lambda + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Log}\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur,

$$\frac{x-a}{z+h}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{y-b}{z+k}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

En appliquant la méthode ordinaire pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles, on trouve que l'intégrale de cette équation est donnée par

$$X = f(u, v), \qquad u = \frac{x-a}{z+h}, \qquad v = \frac{y-b}{z+k},$$

$f(u, v)$ désignant une fonction arbitraire de deux variables. La vérification de ce résultat s'aperçoit immédiatement en comparant

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{z+h}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{z+k}\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{x-a}{(z+h)^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y-b}{(z+k)^2}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Nous savons, d'autre part, que X est linéaire en x, y. Donc X est de la forme

$$X = P\frac{x-a}{z+h} + Q\frac{y-b}{z+k} + X_0;$$

de même

$$Y = P_1\frac{x-a}{z+h} + Q_1\frac{y-b}{z+k} + Y_0,$$

P, Q, X_0, P_1, Q_1, Y_0 étant des constantes. Enfin les relations entre les dérivées de X et de Y donnent

$$\frac{P_1}{z+h} = -\frac{Q}{z+k}, \qquad \frac{Q_1}{z+k} = \frac{P}{z+h}$$

et, par suite,

$$k = h, \qquad P_1 = -Q, \qquad Q_1 = P.$$

Posons

$$P = \rho\cos\alpha, \qquad Q = +\rho\sin\alpha;$$

alors, d'après l'équation (6),

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\rho^2}{(z+h)^2}, \qquad Z - Z_0 = -\frac{\rho^2}{z+h}.$$

Nous trouvons, en définitive,

$$X - X_0 = \rho\left(\frac{x-a}{z+h}\cos\alpha + \frac{y-b}{z+h}\sin\alpha\right),$$

$$Y - Y_0 = \rho\left(-\frac{x-a}{z+h}\sin\alpha + \frac{y-b}{z+h}\cos\alpha\right),$$

$$Z - Z_0 = -\frac{\rho^2}{z+h}.$$

Ainsi la substitution la plus générale conservant à l'équation $\delta u = 0$ *sa forme est*

$$u = C\frac{1}{z+h}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b^2)}{4(z+h)}}U(X, Y, Z),$$

C, a, b, h désignant des constantes et X, Y, Z ayant les expressions données par les formules précédentes.

2. *Cette substitution générale est composée avec les substitutions simples*

$$u = \mathrm{CU}, \qquad \mathrm{X} = \rho x, \qquad \mathrm{Y} = \rho y, \qquad \mathrm{Z} = \rho^2 z,$$

$$u = \mathrm{U}\frac{1}{z}e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}, \qquad \mathrm{X} = \frac{x}{z}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{y}{z}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{1}{z},$$

auxquelles il faut joindre les substitutions correspondant à une transformation des coordonnées.

Remarquons encore cette conséquence des formules précédentes : si $f(x, y, z)$ est une solution de l'équation $\delta u = 0$, on a une autre solution en considérant la fonction

$$\frac{1}{z}e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -\frac{1}{z}\right).$$

3. L'identité

$$\delta(uv) = u\,\delta v + v\,\delta u + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

se réduit, dans le cas où u est indépendant de y et v indépendant de x, à la suivante :

$$\delta(uv) = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Donc, en multipliant une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

par une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

(et en supposant u indépendant de y, v indépendant de x), on a une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Cela se vérifie immédiatement sur l'exemple

$$u = e^{ax+a^2z}, \qquad v = e^{by+b^2z}, \qquad uv = e^{ax+by+(a^2+b^2)z}.$$

Si l'on développe e^{ax+a^2y} suivant les puissances de a

$$e^{ax+a^2z} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1 2 - \nu} \mathrm{V}_\nu(x, z);$$

on sait que les coefficients $\mathrm{V}_\nu(x, z)$ sont des polynomes entiers en x et z homogènes et du degré ν par rapport à x et $\sqrt{z}$, et qui vérifient l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. On a

$$\mathrm{V}_n(x, z) = x^n + n(n-1)x^{n-2}\frac{z}{1} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-5}\frac{z^2}{1.2} + \ldots$$

ou encore, en posant $\varphi(x) = x^n$,

$$\mathrm{V}_n(x, z) = \varphi(x) + \varphi''(x)\frac{z}{1} + \ldots + \varphi^{(2k)}(x)\frac{z^k}{1.2\ldots k} + \ldots.$$

De même, $\mathrm{V}_n(y, z)$ vérifie l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$. D'après cela, si l'on pose

$$u = \mathrm{V}_p(x, z)\,\mathrm{V}_q(y, z),$$

u est une solution de l'équation $\delta u = 0$. De plus, u est un polynome entier en x, y, z homogène et du degré $p + q$ en x, y et $\sqrt{z}$.

Or si l'on cherche, par la méthode des coefficients indéterminés, le polynome le plus général entier en x, y, z homogène et du degré n en x, y, $\sqrt{z}$ vérifiant l'équation $\delta u = 0$, on trouve de suite que ce polynome contient linéairement $n + 1$ constantes arbitraires, puisque les coefficients du développement

$$u(x, y, 0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 2} + \ldots$$

peuvent être calculés au moyen de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

dès que l'on connaît le polynome homogène et de degré n en x, y auquel se réduit u pour $z = 0$.

D'après cela, on peut prendre pour le polynome cherché l'expression

$$\mathrm{V}_n(x, y, z) = \sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{A}_p \mathrm{V}_p(x, z)\,\mathrm{V}_q(y, z) \qquad (p + q = n),$$

les lettres A_0, A_1, ..., A_n désignant $n + 1$ constantes arbitraires.

Effectuons sur ce polynome la transformation du n° 2, nous trouvons une fonction

$$V_{-(n+2)}(x, y, z) = \frac{1}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} V_n\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} - \frac{1}{z}\right),$$

qui est homogène et du degré $-(n+2)$ en x, y et $\sqrt{z}$, et qui est aussi une solution de l'équation $\delta u = 0$.

4. La notion d'équation adjointe, due à Riemann, conduit à l'extension du théorème de Green (voir *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, de M. Darboux, t. II, chap. IV). Si l'équation différentielle considérée est

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

l'équation adjointe est

$$\delta' v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Il est facile de retrouver, dans ce cas particulier, l'extension du théorème de Green. Une intégration par parties donne l'égalité

$$\int u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial v}{\partial x} - \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

et, en échangeant u et v,

$$\int v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = v \frac{\partial u}{\partial x} - \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

En retranchant membre à membre ces deux égalités, on fait disparaître les intégrales du second membre, et en intégrant par rapport à y, puis par rapport à z,

$$\int\int\int \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx\, dy\, dz = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\, dz,$$

de même

$$\int\int\int \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy\, dz = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dz.$$

Ajoutons les premiers membres et introduisons δu et $\delta' v$, de telle façon que les termes ajoutés donnent une différentielle exacte, nous trouvons

$$\int\!\!\int\!\!\int (u\,\delta' v - v\,\delta u)\,dx\,dy\,dz - \int\!\!\int\!\!\int \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

En définitive, si l'on considère un volume V limité par une surface S, on a l'égalité suivante, donnant l'extension à l'équation $\delta u = 0$ du théorème de Green,

$$(8)\quad \int\!\!\int\!\!\int_{(V)} (u\,\delta' v - v\,\delta u)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int\!\!\int_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\,dz + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dz + uv\,dx\,dy\right],$$

l'intégrale triple étant étendue au volume V et l'intégrale double à la surface S, et la définition de ces intégrales étant précisée comme elle l'est dans la démonstration du théorème de Green (¹).

L'intégrale triple qui figure dans la formule générale disparaît quand on prend pour u et v des fonctions qui, dans le volume V, sont finies, continues et admettent les dérivées qui figurent dans la formule et vérifient les équations

$$\delta u = 0, \qquad \delta' v = 0,$$

et la formule devient

$$(9)\quad \int\!\!\int_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy\,dz + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dz + uv\,dx\,dy\right] = 0.$$

5. Appliquons cette formule au cas où la surface S est un cylindre de révolution autour de l'axe Oz limité par les deux plans

$$z = z_1, \qquad z = z_2,$$

et où l'on prend

$$u = \frac{1}{z} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}}, \qquad v = V_n(x, y, -z) \qquad (z > 0),$$

de sorte que l'on a bien

$$\delta u = 0, \qquad \delta' v = 0.$$

Nous remarquerons d'abord que la formule (9) peut s'écrire

$$\int\!\!\int_{(S)} \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos(n, x) + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos(n, y) + uv\cos(n, z)\right] d\sigma = 0,$$

(¹) *Voir* Émile PICARD, *Traité d'Analyse,* t. I, p. 138.

en désignant par $d\sigma$ un élément de la surface, par $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ les cosinus des angles que fait avec Ox, Oy, Oz la normale en un point de l'élément quand on prend comme direction positive sur cette normale la direction suivie sur cette normale par un mobile qui traverserait l'élément de surface en allant de l'intérieur à l'extérieur du volume considéré.

L'intégrale double est étendue à la surface totale du cylindre. Considérons d'abord les deux bases; nous supposerons z_1 et z_2 positifs et $z_2 > z_1$, de sorte que z_2 correspond à la base supérieure B_2 et z_1 à la base inférieure B_1. Soient I_1 et I_2 les parties de l'intégrale double qui sont données par les bases B_1 et B_2. Pour la base supérieure, on a constamment

$$z = z_2, \qquad \cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = 1,$$

de sorte que I_2 est donné par l'égalité

$$I_2 = \int\int_{B_2} u_2 v_2 \, dx \, dy,$$

en posant

$$u_2 = \frac{1}{z_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z_2}}, \qquad v_2 = V_n(x, y, -z_2).$$

Pour la base inférieure, on a constamment

$$z = z_1, \qquad \cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = -1,$$

de sorte que

$$I_1 = -\int\int_{B_1} u_1 v_1 \, dx \, dy,$$

en désignant par u_1 et v_1 ce que deviennent u et v quand on y fait $z = z_1$.

Quant à la partie I_l de l'intégrale correspondant à la surface latérale, nous allons démontrer qu'elle tend vers zéro quand le rayon R du cylindre augmente indéfiniment. Posons

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta,$$

il en résulte

$$d\sigma = R\, d\theta\, dz, \qquad u = \frac{1}{z} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} = -\frac{R\cos\theta}{2z^2} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{2z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4z}} = -\frac{R\sin\theta}{2z^2} e^{\frac{-R^2}{4z}},$$

$v = V_n(x, y, -z)$ devient un polynome entier en R; il en est de même pour $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$.

D'après cela, l'intégrale I_l prend la forme

$$I_l = \int_0^{2\pi} \int_{z_2}^{z_2} P \, d\theta \, dz,$$

P étant une somme de termes dont chacun est le produit de l'exponentielle $e^{\frac{-R^2}{4z}}$ par un facteur qui devient infini comme une puissance déterminée de R quand R augmente indéfiniment. Donc chacun des termes de P tend vers zéro quand R augmente indéfiniment. Il en est de même de P et, comme le champ de l'intégration est limité, puisque l'on a

$$z_1 < z < z_2,$$
$$0 < \theta < 2\pi,$$

l'intégrale I_l elle-même tend vers zéro quand R augmente indéfiniment. La formule se réduit à

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 v_1 \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 v_2 \, dx \, dy.$$

Pour faire sortir z de chacune des intégrales, posons

$$\frac{x}{\sqrt{z}} = \alpha, \qquad \frac{y}{\sqrt{z}} = \beta,$$

en nous rappelant que z reste constamment positif, il vient

$$\frac{dx \, dy}{z} = d\alpha \, d\beta,$$
$$u = \frac{1}{z} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}},$$
$$v = z^{\frac{n}{2}} V_n(\alpha, \beta, -1),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv \, dx \, dy = z^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} V_n(\alpha, \beta, -1) \, d\alpha \, d\beta.$$

Si, dans cette dernière égalité, on fait successivement $z = z_1$, puis

$z = z_2$, les valeurs que prend le premier membre sont égales, d'après la formule (10). On a donc

$$\left(z_2^{\frac{n}{2}} - z_1^{\frac{n}{2}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} V_n(\alpha, \beta, -1)\, d\alpha\, d\beta = 0,$$

et comme z_1 et z_2 sont différents

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}} V_n(\alpha, \beta, -1)\, d\alpha\, d\beta = 0.$$

Cette égalité peut se déduire d'une formule de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LVIII). Soient

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad \delta = ac - b^2$$

et ψ la forme adjointe de $\varphi(x, y)$, les polynomes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ de M. Hermite sont définis par les égalités

$$e^{-h(ax+by) - h_1(bx+cy)} = e^{\frac{1}{2}\varphi(h, h_1)} \sum \frac{h^m}{(m)} \frac{h_1^n}{(n)} U_{m,n},$$

$$e^{kx+k_1 y} = e^{\frac{\psi(k, k_1)}{2\delta}} \sum \frac{k^m}{(m)} \frac{k_1^n}{(n)} V_{m,n},$$

et la formule que nous voulons rappeler est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} U_{m,n} V_{p,q}\, dx\, dy = 0.$$

Comme $V_{00} = 1$, un cas particulier de cette formule est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)} U_{m,n}\, dx\, dy = 0.$$

6. Nous ferons encore une application de la formule

$$(9) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & \int \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cos(n, x)\, d\sigma \\ & + \int \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos(n, y)\, d\sigma + \int uv \cos(n, x)\, d\sigma, \end{aligned}$$

déduite de la formule analogue à la formule de Green, en y supposant $\delta u = 0$ et $\delta' v = 0$.

Nous prendrons

$$v = \frac{1}{\zeta - z} e^{-\frac{(\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2}{4(\zeta - z)}}, \qquad u = f(x, y, z),$$

$f(x, y, z)$ étant par hypothèse une solution de $\delta u = 0$; quant à v, on vérifie immédiatement que l'on a $\delta' v = 0$. Nous étendrons l'intégrale à la surface totale d'un cylindre de révolution dont l'axe est donné par les équations

$$x - \lambda = 0, \qquad y - \mu = 0,$$

et dont le rayon est R.

Considérons d'abord la partie de l'intégrale qui correspond à la surface latérale; on aura

$$x = \lambda + \text{R} \cos\theta, \qquad y = \mu + \text{R} \sin\theta, \qquad d\sigma = \text{R}\, d\theta\, dz,$$

de sorte que

$$v = \frac{1}{\zeta - z} e^{-\frac{\text{R}^2}{4(\zeta - z)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\text{R} \cos\theta}{2(\zeta - z)^2} e^{-\frac{\text{R}^2}{4(\zeta - z)}}.$$

Dans l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(n, x)\, d\sigma,$$

le coefficient différentiel tend vers zéro quand R augmente indéfiniment, si l'on fait l'hypothèse que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, et, comme le champ d'intégration est limité, l'intégrale elle-même tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y)\, d\sigma,$$

si l'on suppose que v et $\frac{\partial v}{\partial y}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, et, comme pour un point de la surface latérale on a $\cos(n, z) = 0$, on voit que la partie du second membre de la formule (9) qui correspond à la surface latérale du cylindre tend vers zéro quand le rayon augmente indéfiniment. Il reste à considérer les deux bases $z = z_1$ et $z = z_2$.

En raisonnant comme on l'a fait dans la première application de la même formule, on voit que les valeurs correspondantes de l'intégrale

$$\int uv \cos(n, z)\, d\sigma$$

sont, en supposant $z_1 < z_2$,

$$\frac{1}{\zeta - z_2}\int\int_{B_2} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta - z_2)}} f(x, y, z_2)\, dx\, dy$$
$$- \frac{1}{\zeta - z_1}\int_{B_1} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta - z_1)}} f(x, y, z_1)\, dx\, dy,$$

de sorte qu'on a, en définitive,

$$\frac{1}{\zeta - z_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta - z_1)}} f(x, y, z_1)\, dx\, dy$$
$$= \frac{1}{\zeta - z_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(\zeta - z_2)}} f(x, y, z_2)\, dx\, dy,$$

ou, en remplaçant ζ par z, x et y par λ et μ,

$$(12) \qquad \frac{1}{z - z_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(z - z_1)}} f(\lambda, \mu, z_1)\, d\lambda\, d\mu$$
$$= \frac{1}{z - z_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4(z - z_2)}} f(\lambda, \mu, z_2)\, d\lambda\, d\mu.$$

7. Rappelons les propriétés de la fonction $f(x, y, z)$, sur lesquelles on s'est appuyé dans la démonstration, on suppose que

$$u = f(x, y, z)$$

est une solution de $\delta u = 0$ admettant les dérivées qui figurent dans les formules pour toutes les valeurs de z satisfaisant aux inégalités

$$a \leqq z \leqq b,$$

c'est-à-dire pour tous les points d'une tranche comprise entre les plans parallèles $z = a$ et $z = b$. On suppose, en outre, que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ restent finis quand x et y augmentent indéfiniment, ou, si ces fonctions deviennent infinies, que leurs produits par une exponentielle $e^{-k^2(x^2+y^2)}$ tendent vers zéro pour x et y infinis, k étant une constante différente de zéro. Enfin on a pris

$$a < z_1 < z_2 < b.$$

et l'on a supposé ζ supérieure à la plus grande des valeurs considérées de z.

En supposant toutes ces hypothèses réalisées, on peut dire, d'après l'égalité (12), que la fonction

$$(13) \qquad F(x, y, z) = \frac{1}{z - z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z-z_1)}} f(\lambda, \mu, z_1)\, d\lambda\, d\mu,$$

où l'on suppose que $z > z_1$ est indépendante de z_1. On aura, en particulier, puisqu'on peut faire $z_1 = a$,

$$F(x, y, z) = \frac{1}{z - a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z-a)}} f(\lambda, \mu, a)\, d\lambda\, d\mu.$$

Mais, quand z tend vers z_1, l'intégrale (13) tend vers $4\pi f(x, y, z_1)$; cela se démontre rigoureusement par un raisonnement entièrement analogue à celui qui est donné, pour une fonction de deux variables $F(x, y)$, dans le Mémoire de M. Weierstrass, *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* (*Sitzungsberichte*, p. 803; 1885).

On a donc la formule

$$f(x, y, z_1) = \frac{1}{4\pi(z_1 - a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \mu, a)\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4(z_1-a)}} d\lambda\, d\mu,$$

qui détermine la fonction $f(x, y, z)$ dans la tranche considérée, quand on connaît la valeur de la fonction sur la face $z = a$.