ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

PATRICE PONGÉRARD, CLAUDE WAGSCHAL

Opérateurs de Fuchs non linéaires

Tome XVI, nº 2 (2007), p. 303-329.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_2_303_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 2, 2007
pp. 303–329

Opérateurs de Fuchs non linéaires(*)

Patrice Pongérard(1), Claude Wagschal(2)

Résumé. — On se propose d'étudier des équations aux dérivées partielles non linéaires du type de Fuchs au sens de Baouendi-Goulaouic ([1] et [2]) dans des espaces de fonctions suffisamment différentiables par rapport à la variable fuchsienne et dans des espaces de Gevrey par rapport aux autres variables. Les méthodes utilisées reposent sur le formalisme des séries formelles Gevrey développé dans [13] et adapté aux équations du type de Fuchs dans [6] et [7]. On obtient ainsi des théorèmes qui généralisent ceux de Baouendi-Goulaouic concernant le cas analytique.

Abstract — We study in this article nonlinear partial differential equations of Fuchs type in spaces of functions sufficiently differentiable with respect to the fuchsian variable and in Gevrey spaces with respect the other variables. The results are a generalization of those of Baouendi-Goulaouic obtained in the analytic case.

1. Notations et résultats

Précisons d'abord les espaces utilisés. Considérons un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on notera $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ et D^α la dérivation en x d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Étant donné un entier $0 \leqslant k \leqslant \infty$ et un espace de Banach E, on note $\mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega; E)$ l'espace vectoriel des fonctions $u : I \times \Omega \to E$ admettant pour tout $0 \leqslant l \leqslant k$ [lorsque $k = \infty$, on convient que ceci signifie pour tout l] et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ des dérivées partielles continues $D_t^l D^\alpha u : I \times \Omega \to E$. Cet espace vectoriel $\mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega; E)$ est stable par dérivation par rapport à x et

$$D_t^l D^\alpha u = D^\alpha D_t^l u \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant k \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

(*) Reçu le 15 juin 2005, accepté le 17 février 2006.
(1) 23 allée des rubis, La Réunion, France.
mpongera@univ-reunion.fr
(2) Université Paul Sabatier (Toulouse) UMR CNRS 5640, Institut de Mathématiques, 31062 Toulouse cedex 9, France.
claude.wagschal@free.fr

Étant donné un nombre réel $d \geqslant 1$, on note $G^{k,d}(I \times \Omega; E)$ le sous-espace constitué des fonctions $u \in \mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega; E)$ telles que, pour tout compact $K \subset I$ et tout $0 \leqslant l \leqslant k$, il existe une constante $c_{K,l} \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{(t,x)\in K\times\Omega} \|D_t^l D^\alpha u(t,x)\| \leqslant c_{K,l}^{|\alpha|+1} |\alpha|!^d \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant k \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Lorsque I est un intervalle compact, ceci signifie donc qu'il existe une constante $c_l \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{(t,x)\in I\times\Omega} \|D_t^l D^\alpha u(t,x)\| \leqslant c_l^{|\alpha|+1} |\alpha|!^d \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant k \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Lorsque k est fini, on peut supposer les constantes $c_{K,l}$ et c_l indépendantes de l.

Lorsque I est un intervalle compact et lorsque k est fini, ceci signifie donc qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{(t,x)\in I\times\Omega} \|D_t^l D^\alpha u(t,x)\| \leqslant c^{|\alpha|+1} |\alpha|!^d \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant k \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

et on peut alors écrire

$$G^{k,d}(I \times \Omega; E) = \bigcup_{L>0} G_{(L)}^{k,d}(I \times \Omega; E)$$

où $G_{(L)}^{k,d}(I \times \Omega; E)$ désigne le sous-espace des fonctions u pour lesquelles il existe $c \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{(t,x)\in I\times\Omega} \|D_t^l D^\alpha u(t,x)\| \leqslant c\, L^{|\alpha|} |\alpha|!^d \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant k \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Pour simplifier les notations, étant donné un réel $r > 0$ et des entiers $0 \leqslant h \leqslant k \leqslant \infty$, nous noterons $G_h^{k,d}(]0,r] \times \Omega; E)$ l'espace vectoriel des $u \in G^{k,d}(]0,r] \times \Omega; E)$ tels que

$$(tD_t)^l u \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega; E) \text{ pour tout } 0 \leqslant l \leqslant h,$$

ceci signifiant que la fonction $(tD_t)^l u$, bien définie sur $]0,r] \times \Omega$, se prolonge par continuité à $[0,r] \times \Omega$ en une fonction appartenant à l'espace $G^{0,d}([0,r] \times \Omega; E)$. Cet espace est évidemment stable par dérivation en x.

On notera que

$$G_0^{0,d}(]0,r] \times \Omega; E) = G^{0,d}([0,r] \times \Omega; E).$$

Remarque 1.1. — Dans la définition des espaces $G_h^{k,d}$, on peut remplacer les opérateurs $(tD_t)^l$ par les opérateurs $t^l D_t^l$. Il existe en effet des $a_{lj} > 0$ et des $b_{lj} \in \mathbb{R}$ tels que

$$(tD_t)^l = \sum_{j=1}^{l} a_{lj} t^j D_t^j,\ t^l D_t^l = \sum_{j=1}^{l} b_{lj} (tD_t)^j \text{ pour } l \geqslant 1.$$

Note. — L'espace des fonctions appartenant à l'espace $G^{0,d}(I \times \Omega; E)$ et indépendantes de t sera noté $G^d(\Omega; E)$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, les espaces précédents seront notés simplement $\mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega)$, $G^{k,d}(I \times \Omega)$, etc.

On considère une équation non linéaire de la forme

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(t,x)(tD_t)^l u(t,x) = f(t,x,D^\Lambda u(t,x)) \tag{1.1}$$

où

$$a_l \in G^{1,d}([0,s] \times \Omega),\ a_m = 1,\ s > 0,$$

$$\Lambda = \{(l,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n\,;\ l + d\,|\alpha| \leqslant m \text{ et } 0 \leqslant l < m\},$$

$$D^\Lambda u = (t^{l+1} D_t^l D^\alpha u)_{(l,\alpha)\in\Lambda},$$

on se donne d'autre part un voisinage ouvert convexe Ω' de l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n'}$ où $n' =$ Card Λ et une fonction

$$f : [0,s] \times \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}$$

appartenant à l'espace $G^{0,d}([0,s] \times (\Omega \times \Omega'))$: il existe une constante $c_0 \geqslant 0$ telle que, pour tout $(t,x,y) \in [0,s] \times \Omega \times \Omega'$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^{n'}$,

$$|D_x^\alpha D_y^\beta f(t,x,y)| \leqslant c_0^{|\alpha|+|\beta|+1} (|\alpha| + |\beta|)!^d. \tag{1.2}$$

Il s'agit d'une équation du type de Fuchs de poids nul selon la terminologie de [1] ; une équation de poids $0 \leqslant p \leqslant m$ se ramène très simplement à une équation de poids nul.

D'après la remarque 1.1, on peut écrire indifféremment $(tD_t)^l$ ou $t^l D_t^l$. Remarquons également que

$$a_l(t,x) = a_l(0,x) + t b_l(t,x) \text{ où } b_l(t,x) = \int_0^1 D_t a_l(\sigma t, x)\, d\sigma.$$

La fonction b_l appartenant à l'espace $G^{0,d}([0,s] \times \Omega)$, l'équation (1.1) peut s'écrire (en changeant de notation)

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(x)(tD_t)^l u(t,x) = f(t,x,D^\Lambda u(t,x)) \tag{1.3}$$

où $a_l \in G^d(\Omega)$.

Introduisons le polynôme de degré m

$$P(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{m} a_l(x)\lambda^l$$

et l'opérateur $P \equiv P(x,tD_t)$, dite partie fuchsienne de l'opérateur (1.3) qui s'écrit alors

$$P(x,tD_t)u(t,x) = f(t,x,D^\Lambda u(t,x)).$$

Nous noterons $\mathcal{Z}(x)$, $x \in \Omega$, l'ensemble des zéros du polynôme $P(x,\bullet)$. On se propose d'abord d'établir le

Théorème 1.2. — *On suppose qu'il existe une partie compacte K du demi-plan $\Re e\,\lambda < 0$ telle que*

$$\mathcal{Z}(x) \subset K \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{1.4}$$

1. Alors, il existe $0 < r \leqslant s$ tel que l'équation (1.3) admette une unique solution $u \in G^{m,d}_m(]0,r] \times \Omega)$.

2. En outre, étant donné un entier $h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $f \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega \times \Omega')$, on a

$$u \in G^{m+h,d}_{m+h}(]0,r] \times \Omega) \tag{1.5}$$

et

$$(tD_t)^j u \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.6}$$

Nous allons en déduire plus généralement le résultat suivant.

Théorème 1.3. — *1. Soient $h,k \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $k \leqslant h$. On suppose qu'il existe une partie compacte K du demi-plan $\Re e\,\lambda < k$ telle que*

$$K \cap \mathbb{N} = \emptyset \text{ et } \mathcal{Z}(x) \subset K \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{1.7}$$

On suppose en outre $f \in G^{h,d}([0,s] \times \Omega \times \mathbb{R}^{n'})$.

Alors, il existe $0 < r \leqslant s$ tel que l'équation (1.3) admette une unique solution

$$u \in G^{m+h,d}_{m+h-k}(]0,r] \times \Omega) \text{ telle que } (tD_t)^j u \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.8}$$

2. S'il existe une partie compacte K de $\mathbb{C}$ telle que (1.4) soit vérifié et si $f \in G^{\infty,d}([0,s] \times \Omega \times \mathbb{R}^{n'})$, l'équation (1.3) admet une unique solution $u \in G^{\infty,d}([0,r] \times \Omega)$.

2. Séries formelles Gevrey

Nous utiliserons le formalisme développé dans [13], c'est-à-dire celui des séries formelles à une indéterminée, notée ξ, dépendant d'un paramètre $t \in [0,r]$, $r > 0$, soit

$$\Phi(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \Phi_k(t) \tag{2.1}$$

et nous supposerons que les fonctions $\Phi_k : [0,r] \to \mathbb{R}_+$ sont continues. Si

$$\Psi(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \Psi_k(t),\ \Psi_k \in \mathcal{C}([0,r];\mathbb{R}_+),$$

est une autre série formelle, nous noterons $\Phi \ll \Psi$ la relation $\Phi_k(t) \leqslant \Psi_k(t)$ pour tout t et tout k.

Étant donné une fonction $u \in \mathcal{C}^{0,\infty}([0,r] \times \Omega; E)$, on note $u \ll \Phi$ la relation

$$\forall t \in [0,r],\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x \in \Omega} \|D^\alpha u(t,x)\| \leqslant \Phi_{|\alpha|}(t).$$

Si $u \ll \Phi$, on a évidemment $D^\alpha u \ll D^{|\alpha|}\Phi$ pour tout α.

On définit l'espace

$$\mathcal{C}^{0,\infty}_\Phi([0,r] \times \Omega; E) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}([0,r] \times \Omega; E)\,;\ (\exists c \geqslant 0)(u \ll c\,\Phi)\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|u\|_\Phi = \min\{c \geqslant 0\,;\ u \ll c\,\Phi\}.$$

L'espace $\mathcal{C}^{0,\infty}_\Phi([0,r] \times \Omega; E)$ est alors un espace de Banach [13, proposition 6.1].

Lorsque $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; E)$ est une fonction indépendante de t et $\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}(\xi^k/k!)\Phi_k$ une série formelle à coefficients $\geqslant 0$, la relation $u \ll \Phi$ signifie évidemment

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \sup_{x\in\Omega} \|D^\alpha u(x)\| \leqslant \Phi_{|\alpha|}.$$

Bien entendu, on peut utiliser le même formalisme si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, la fonction u étant alors holomorphe. Voici un exemple simple dont nous aurons besoin.

Exemple 2.1. — On considère la fonction $\varphi(z) = 1/z$ dans l'ouvert $|z| > \delta > 0$ de $\mathbb{C}$. Étant donné que

$$|D^k\varphi(z)| = \frac{k!}{|z|^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{\delta^{k+1}} \text{ pour } |z| > \delta,$$

on a

$$\varphi(z) \ll \Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{\delta^{k+1}}.$$

Rappelons qu'à la série formelle Φ, on associe la série formelle

$$\Phi^d(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!}\, k!^{d-1}\Phi_k(t).$$

Nous utiliserons le

Lemme 2.2. — *Soient $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$, alors $\Phi^d\Psi^d \ll (\Phi\Psi)^d$ et, si $\Psi(0) = 0$, $\Phi^d \circ \Psi^d \ll (\Phi \circ \Psi)^d$.*

Preuve. — Si $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k\xi^k$ et $\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k\xi^k$, la première propriété résulte de l'inégalité $(j!(k-j)!)^{d-1} \leqslant k!^{d-1}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$. Quant à la seconde, on a

$$\Phi \circ \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi \circ \Psi)_k \xi^k$$

où $(\Phi \circ \Psi)_0 = \Phi_0$ et, pour $k \geqslant 1$,

$$(\Phi \circ \Psi)_k = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ j_1+\ldots+j_i=k}} \Phi_i\Psi_{j_1}\ldots\Psi_{j_i}.$$

Il s'agit alors de vérifier que

$$i!^{d-1}\, j_1!^{d-1} \dots j_i!^{d-1} \leqslant k!^{d-1}$$

si $j_1 + \dots + j_i = k$ où $j_* \geqslant 1$ et ceci résulte de l'inégalité $i!\, j_1! \dots j_i! \leqslant k!$ sous les mêmes conditions. $\square$

Soient $R > 0$, $\rho > 0$ et un entier $m \geqslant 1$, nous utiliserons la série formelle

$$\Phi_{R,\rho}(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{D^{mk}\varphi_R(\xi)}{(mk)!} \tag{2.2}$$

où φ_R est la série entière (2.1) de [13]

$$\varphi_R(\xi) = K^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^l}{R^l (l+1)^2},$$

la constante $K > 0$ étant telle que $\varphi_R^2(\xi) \ll \varphi_R(\xi)$.

On écrit $\Phi_{R,\rho}$ sous la forme (2.1). On a

$$D^{mk}\varphi_R(\xi) = K^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{mk+l}} \, \frac{(mk+l)!}{(mk+l+1)^2} \, \frac{\xi^l}{l!},$$

d'où

$$\Phi_{R,\rho}(t,\xi) = K^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{mk+l}} \, \frac{(mk+l)!}{(mk)!\,(mk+l+1)^2} \, \frac{\xi^l}{l!} \right),$$

et

$$\Phi_l(t) = \frac{K^{-1}}{R^l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+l)!}{(mk)!\,(mk+l+1)^2} \left(\frac{\rho t}{R} \right)^k.$$

Cette série entière ayant pour rayon de convergence R/ρ, la fonction Φ_l est bien définie et continue sur le segment $[0,r]$ si $\rho r < R$. Notons également que

$$\Phi^d_{R,\rho}(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(mk)!}.$$

L'espace de Banach $\mathcal{C}^{0,\infty}_{\Phi^d_{R,\rho}}([0,r] \times \Omega; E)$ sera noté $G^d_{R,\rho}([0,r] \times \Omega; E)$ et la norme de cet espace sera notée $\|\bullet\|_{R,\rho}$. Dire qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^{0,\infty}([0,r] \times \Omega; E)$ appartient à cet espace signifie que

$$\forall t \in [0,r],\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \sup_{x \in \Omega} \|D^\alpha u(t,x)\| \leqslant \|u\|_{R,\rho}\, |\alpha|!^{d-1}\, \Phi_{|\alpha|}(t).$$

Lemme 2.3. — *Si E est une algèbre de Banach, l'espace $G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;E)$ est une algèbre de Banach.*

Preuve. — Il s'agit de vérifier que $(\Phi^d_{R,\rho})^2 \ll \Phi^d_{R,\rho}$, c'est-à-dire $(\Phi_{R,\rho})^2 \ll \Phi_{R,\rho}$ d'après le lemme précédent, soit

$$T \equiv \sum_{l+l'=j} \frac{\Phi_l(t)}{l!}\frac{\Phi_{l'}(t)}{l'!} \leqslant \frac{\Phi_j(t)}{j!}.$$

Étant donné que

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} R^{(m-1)i}(\rho t)^i \sum_{\substack{k+k'=i\\ l+l'=j}} \frac{1}{l!l'!}\,\frac{D^{mk+l}\varphi_R(0)}{(mk)!}\,\frac{D^{mk'+l'}\varphi_R(0)}{(mk')!},$$

il s'agit de vérifier que

$$\sum_{\substack{k+k'=i\\ l+l'=j}} \frac{1}{l!l'!}\,\frac{D^{mk+l}\varphi_R(0)}{(mk)!}\,\frac{D^{mk'+l'}\varphi_R(0)}{(mk')!} \leqslant \frac{1}{j!}\,\frac{D^{mi+j}\varphi_R(0)}{(mi)!}.$$

Cette inégalité sera a fortiori vérifiée si

$$\sum_{\substack{q+q'=mi\\ l+l'=j}} \frac{(mi)!}{q!q'!}\,\frac{j!}{l!l'!}\,D^{q+l}\varphi_R(0)\,D^{q'+l'}\varphi_R(0) \leqslant D^{mi+j}\varphi_R(0).$$

Il sufit alors de dériver j fois, puis mi fois, l'inégalité $\varphi_R^2 \ll \varphi_R$ pour obtenir le résultat voulu. $\square$

Pour majorer une composée de fonctions, nous utiliserons le corollaire 6.5 de [13]. Si $\Phi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$ est une série formelle, on note $[\Phi] = \Phi - \Phi(0)$ et

$$\Theta_R(\xi) = \frac{R}{R-\xi} \text{ pour } R > 0.$$

Ce corollaire s'écrit alors

Lemme 2.4. — *Pour $0 \leqslant c < R'$ et tout $R > 0$, on a*

$$\Theta^d_{R'} \circ [c\Phi^d_{R,\rho}] \ll \max\Big(K, \frac{c}{R'-c}\Big)\Phi^d_{R,\rho}.$$

Lemme 2.5. — *On a*

$$G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;E)\subset G^{0,d}_{(L)}([0,r]\times\Omega;E)\ \textit{où}\ L=\frac{1}{R(1-\tau)},\ \tau=\Big(\frac{\rho r}{R}\Big)^{1/m}.$$

Preuve. — Soit $u\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;E)$, on a

$$\sup_{(t,x)\in[0,r]\times\Omega}\|D^\alpha u(t,x)\|\leqslant\|u\|_{R,\rho}\,|\alpha|!^{d-1}\,\Phi_{|\alpha|}(r)$$

et

$$\Phi_l(r)\leqslant\frac{K^{-1}}{R^l}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+l)!}{j!}\frac{\tau^j}{(j+l+1)^2}\leqslant\frac{K^{-1}}{R^l}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+l)!}{j!}\tau^j=\frac{K^{-1}}{R^l}\frac{l!}{(1-\tau)^{l+1}}$$

ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.6. — *Soit* $u\in G^{0,d}_{(L)}([0,r]\times\Omega;E)$*, alors si*

$$0<R<1/L\ \textit{et}\ 0<r<R/\rho,$$

u appartient à l'espace $G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;E)$.

Preuve. — Il s'agit de vérifier qu'il existe $c\geqslant 0$ tel que, pour tout $t\in[0,r]$ et tout $l\in\mathbb{N}$,

$$L^l\,l!^d\leqslant c\,l!^{d-1}\Phi_l(t),$$

c'est-à-dire

$$L^l\,l!\leqslant c\,\Phi_l(0)=c\,\frac{K^{-1}}{R^l}\frac{l!}{(l+1)^2}$$

et il suffit de prendre $c=K\sup_l(RL)^l(l+1)^2$. □

Lemme 2.7. — *Soient* E,F *et* G *des espaces de Banach,* $(u,v)\mapsto uv$ *une application bilinéaire continue de* $E\times F$ *dans* G *de norme* $\leqslant 1$*. Soit* $u\in G^{0,d}_{(L)}([0,r]\times\Omega\,;\,E)$*, alors si*

$$\sup_{(t,x)\in[0,r]\times\Omega}\|D^\alpha u(t,x)\|\leqslant c\,L^{|\alpha|}\,|\alpha|!^d\ \ \textit{pour tout}\ \alpha\in\mathbb{N}^n$$

et

$$0<R\leqslant\frac{1}{\eta L}\ \textit{où}\ \eta>1\ \textit{et}\ 0<r<R/\rho,$$

on a

$$v\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega\,;\,F)\Longrightarrow uv\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega\,;\,G)$$

et il existe une constante $c(\eta)>0$ *telle que l'application linéaire* $v\mapsto uv$ *est continue de norme* $\leqslant c\,c(\eta)$.

Preuve. — On a
$$u \ll c\,\Theta^d_{1/L}(\xi) \ll c\,\Theta^d_{\eta R}(\xi)$$
et, d'après le lemme 2.4 de [13], il existe une constante $c(\eta) > 0$ telle que
$$\Theta_{\eta R}(\xi) \ll c(\eta)\,\varphi_R(\xi),$$
d'où
$$\Theta_{\eta R}(\xi)\varphi_R(\xi) \ll c(\eta)\,\varphi_R^2(\xi) \ll c(\eta)\,\varphi_R(\xi)$$
et
$$\Theta_{\eta R}(\xi)D^j\varphi_R(\xi) \ll c(\eta)\,D^j\varphi_R(\xi) \text{ pour tout entier } j.$$
On en déduit que
$$\Theta_{\eta R}(\xi)\Phi_{R,\rho}(t,\xi) \ll c(\eta)\,\Phi_{R,\rho}(t,\xi),$$
d'où
$$uv \ll c\,\|v\|_{R,\rho}\,\Theta^d_{\eta R}(\xi)\Phi^d_{R,\rho}(t,\xi) \ll c\,c(\eta)\,\|v\|_{R,\rho}\,\Phi^d_{R,\rho}(t,\xi),$$
ce qui permet de conclure. $\square$

Nous utiliserons les deux lemmes qui suivent.

Lemme 2.8. — *Pour tout $p, q \geqslant 0$*
$$\frac{D^p\varphi_R(\xi)}{p!} \ll R^q(q+1)^2\,\frac{D^{p+q}\varphi_R(\xi)}{(p+q)!}.$$

Preuve. — Il s'agit de vérifier que
$$\frac{(p+r)!}{p!\,(p+r+1)^2} \leqslant (q+1)^2\,\frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\,(p+q+r+1)^2}.$$
On a en effet
$$\frac{(p+r)!}{p!} \leqslant \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!}$$
et
$$\frac{(p+q+r+1)^2}{(p+r+1)^2} = \left(1+\frac{q}{p+r+1}\right)^2 \leqslant (q+1)^2. \qquad \square$$

Rappelons le lemme 2.6 de [6].

Lemme 2.9. — *Pour tout $R > 0$ et tout entier i, j, k tels que $di \leqslant k$*
$$D^i\Big(D^j\varphi_R\Big)^d(\xi) \ll R^{k-i}\Big(\frac{k+1}{i+1}\Big)^2\Big(D^{j+k}\varphi_R\Big)^d(\xi). \tag{2.3}$$

Preuve. — On a

$$\left(D^j\varphi_R\right)^d(\xi) = K^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+j+1)^2}\frac{(l+j)!}{R^{l+j}}\frac{\xi^l}{l!}\,l!^{d-1}$$

et il s'agit de vérifier l'inégalité

$$\frac{1}{(l+i+j+1)^2}\frac{(l+i+j)!}{R^{l+i+j}}\,(l+i)!^{d-1} \leqslant$$

$$R^{k-i}\left(\frac{k+1}{i+1}\right)^2\frac{1}{(l+k+j+1)^2}\frac{(l+k+j)!}{R^{l+k+j}}\,l!^{d-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(l+i+j)!\,(l+i)!^{d-1}}{(l+i+j+1)^2} \leqslant \left(\frac{k+1}{i+1}\right)^2\frac{(l+k+j)!\,l!^{d-1}}{(l+k+j+1)^2}.$$

Vu que $i \leqslant k$, on a

$$\left(\frac{l+k+j+1}{l+i+j+1}\right)^2 \leqslant \left(\frac{k+1}{i+1}\right)^2$$

et la fonction

$$j \mapsto \frac{(l+i+j)!}{(l+k+j)!}$$

est décroissante. Il s'agit donc de vérifier que

$$(l+i)!\,(l+i)!^{d-1} \leqslant (l+k)!\,l!^{d-1}.$$

On a en effet

$$\frac{(l+i)!}{(l+k)!}\left(\frac{(l+i)!}{l!}\right)^{d-1} \leqslant \frac{(l+i)^{i(d-1)}}{(l+i+1)^{k-i}} \leqslant 1$$

car $i(d-1) \leqslant k-i$. $\square$

3. Étude de la partie fuchsienne

Dans ce paragraphe, on peut supposer les fonctions à valeurs complexes. Il s'agit alors d'étudier l'équation

$$P(x,tD_t)u(t,x) \equiv \sum_{l=0}^{m} a_l(x)(tD_t)^l u(t,x) = v(t,x) \qquad (3.1)$$

où $a_l \in G^d(\Omega) = G^d(\Omega;\mathbb{C})$. D'après [1] et [2], on sait que, sous l'hypothèse (1.4), pour tout $v \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega)$ et tout $x \in \Omega$, il existe une unique fonction $t \mapsto u(t,x)$ continue sur $[0,r]$ et de classe $\mathcal{C}^m$ sur $]0,r]$ tel que $(Pu)(t,x) = v(t,x)$ pour $0 < t \leqslant r$ et $x \in \Omega$. Afin de préciser la régularité en x de cette solution, on écrit l'équation (3.1) sous la forme d'un système du premier ordre en posant

$$u_j = (tD_t)^j u \text{ et } U = (u_0, \dots, u_{m-1}).$$

La fonction $t \mapsto U(t,x)$ continue sur $[0,r]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,r]$ vérifie

$$(tD_t)U(t,x) = A(x).U(t,x) + V(t,x) \text{ pour } (t,x) \in]0,r] \times \Omega \tag{3.2}$$

où $V = (0,\dots,0,v)$ et $A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ est l'endomorphisme de matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{C}^m$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{m-1}(x) \end{pmatrix}.$$

On notera que dét $(\lambda I - A(x)) = P(x,\lambda)$ et que $\mathcal{Z}(x)$ est le spectre de cet endomorphisme.

Plus généralement, soit $A \in G^d(\Omega\,;\mathcal{L}(\mathbb{C}^m))$. Supposons que le spectre $\mathcal{Z}(x)$ de l'endomorphisme $A(x)$ vérifie l'hypothèse (1.4). Alors, si $V \in G^{0,d}([0,r]\times\Omega\,;\mathbb{C}^m)$, il existe d'après [2] une unique fonction $t \mapsto U(t,x)$ continue sur $[0,r]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,r]$ solution de (3.2) et elle est donnée par la formule

$$U(t,x) = \int_0^1 \sigma^{-A(x)}.V(\sigma t,x)\,\frac{d\sigma}{\sigma} \tag{3.3}$$

où $\sigma^{-A(x)} = e^{-\ln\sigma\,A(x)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, $\sigma > 0$. Nous poserons

$$(\mathcal{P}U)(t,x) = (tD_t)U(t,x) - A(x).U(t,x) \text{ et } U = \mathcal{P}^{-1}V.$$

On a alors l'estimation suivante.

Proposition 3.1. — *Il existe $c \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\sigma > 0$,*

$$\sup_{x\in\Omega} \|D^\alpha(\sigma^{-A(x)})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)} \leqslant c^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!^d\,\sigma^\varepsilon.$$

Pour établir ce résultat, on utilise la représentation suivante

$$\sigma^{-A(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma^{-\lambda}(\lambda I - A(x))^{-1}\, d\lambda,\ \sigma > 0,$$

où $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est un lacet tel que l'indice de tout point de K par rapport à γ soit égal à 1. Compte-tenu de l'hypothèse (1.4), on peut supposer que ce lacet est tracé dans le demi-plan $\Re e\, \lambda < 0$. Il en résulte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Re e\, \gamma(s) \leqslant -\varepsilon$ pour tout $s \in [0,1]$, d'où

$$|\sigma^{-\lambda}| \leqslant \sigma^{\varepsilon} \text{ pour } \lambda \in \gamma([0,1]). \tag{3.4}$$

Posons

$$\text{dét }(\lambda I - A(x)) = P(x,\lambda),$$

nous avons besoin ensuite du

LEMME 3.2. — *Soit K' une partie compacte de $\mathbb{C}$ telle que $K \cap K' = \emptyset$, alors il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$\sup_{\lambda\in K'}\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha(1/P(x,\lambda))| \leqslant c^{|\alpha|+1}\, |\alpha|!^d \textit{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Preuve. — Il existe $\delta > 0$ tel que $|P(x,\lambda)| > \delta$ pour tout $x \in \Omega$ et $\lambda \in K'$. Il existe d'autre part $c_0 \geqslant 0$ tel que

$$|D^\alpha P(x,\lambda)| \leqslant c_0^{|\alpha|+1}\, |\alpha|!^d \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, x \in \Omega \text{ et } \lambda \in K',$$

soit

$$P(x,\lambda) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!}\, c_0^{k+1}\, k!^d,$$

ou encore

$$P(x,\lambda) \ll \Psi^d(\xi) \text{ pour tout } \lambda \in K' \text{ avec } \Psi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_0^{k+1}\xi^k.$$

Les notations étant celles de l'exemple 2.1, on a

$$\varphi(z) \ll \Phi(\xi) \ll \Phi^d(\xi),$$

d'où, d'après le lemme 2.2,

$$\varphi \circ P(\bullet,\lambda) \ll \Phi^d \circ [\Psi]^d \ll (\Phi \circ [\Psi])^d.$$

Les séries entières Φ et Ψ étant convergentes, il en est de même de la série $\Phi \circ [\Psi]$, ce qui permet de conclure. $\square$

LEMME 3.3. — *Soit K' une partie compacte de $\mathbb{C}$ telle que $K \cap K' = \emptyset$, alors il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$\sup_{\lambda \in K'} \sup_{x \in \Omega} \|D^\alpha(\lambda I - A(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)} \leqslant c^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!^d \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Preuve. — On a

$$(\lambda I - A(x))^{-1} = \Big(\frac{P_{ij}(x,\lambda)}{P(x,\lambda)}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$$

où P_{ij} est un polynôme en λ à coefficients dans l'espace $G^d(\Omega)$ et il existe donc une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{\lambda \in K'} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha P_{ij}(x,\lambda)| \leqslant c^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!^d \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Vu le lemme précédent, ceci permet de conclure. □

La proposition 3.1 résulte de l'inégalité (3.4) et de ce lemme en prenant $K' = \gamma([0,1])$. Si $V \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m)$, on en déduit une estimation de la forme

$$\sup_{x \in \Omega} \|D^\alpha\big(\sigma^{-A(x)}.V(\sigma t, x)\big)\|_{\mathbb{C}^m} \leqslant c^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!^d\,\sigma^\varepsilon,\ 0 < \sigma \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant r.$$

Ceci montre que la fonction U définie par (3.3) appartient à l'espace $G^{0,d}([0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m)$; la fonction $(tD_t)U$ appartient également à cet espace d'après l'équation (3.2), donc $U \in G^{1,d}(]0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m)$, soit

$$V \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m) \Longrightarrow \mathcal{P}^{-1}V \in G_1^{1,d}(]0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m).$$

En raisonnant par récurrence sur k pour $h = 0$, puis sur h, on vérifie aisément le

LEMME 3.4. — *Soit $0 \leqslant h \leqslant k \leqslant \infty$, alors*

$$V \in G_h^{k,d}(]0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m) \Longrightarrow \mathcal{P}^{-1}V \in G_{h+1}^{k+1,d}(]0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m).$$

D'après la formule (3.3), on en déduit que

$$V \in G^{k,d}([0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m) \Longrightarrow \tag{3.5}$$

$$\mathcal{P}^{-1}V \in G^{k,d}([0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m) \cap G_{k+1}^{k+1,d}(]0,r] \times \Omega; \mathbb{C}^m).$$

Lorsque $V \in G^{0,d}([0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m)$, on vérifie que

$$D_t(\mathcal{P}^{-1}(tV))(t,x) = A(x).\int_0^1 \sigma^{-A(x)}.V(\sigma t,x)\,d\sigma + V(t,x),\ 0<t\leqslant r, x\in\Omega,$$

et on en déduit que

$$V\in G^{k,d}([0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m) \Longrightarrow \mathcal{P}^{-1}(tV)\in G^{k+1,d}([0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m). \qquad (3.6)$$

Proposition 3.5. — *Il existe $R_0>0$ et une constante $c\geqslant 0$ telle que, pour $0<R\leqslant R_0$, $\rho r<R$ et $V\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m)$, la solution $U\in G_1^{1,d}(]0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m)$ de (3.2) vérifie*

$$(tD_t)^l U(t,x) \ll c\,\|V\|_{R,\rho}\sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{1-l}(mk)!} \ \textit{pour}\ l=0,1.$$

Preuve. — On a

$$V(\sigma t,x) \ll \|V\|_{R,\rho}\sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\sigma\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(mk)!},\ 0<\sigma\leqslant 1.$$

D'après la proposition 3.1 et le lemme 2.7 où on prend $E=\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, $F=G=\mathbb{C}^m$ et où on remplace ρ par $\sigma\rho$, il existe $R_0>0$ et une constante $c\geqslant 0$ telle que, pour $0<R\leqslant R_0$,

$$\sigma^{-A(x)}.V(\sigma t,x) \ll c\,\sigma^{\varepsilon}\|V\|_{R,\rho}\sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\sigma\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(mk)!}.$$

Vu que

$$\int_0^1 \sigma^{k+\varepsilon-1}\,d\sigma = \frac{1}{k+\varepsilon}\leqslant \frac{c}{k+1},$$

ceci prouve l'inégalité voulue pour U.

Pour majorer $(tD_t)U$, on utilise l'équation (3.2). On note que $U\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega\,;\mathbb{C}^m)$ et que $\|U\|_{R,\rho}\leqslant c\,\|V\|_{R,\rho}$. On applique de nouveau le lemme 2.7 pour majorer $A(x).U(t,x)$ et, quitte à réduire R_0, on obtient le résultat voulu. $\square$

Revenons à l'étude de l'équation (3.1). Ce qui précède prouve que, pour $v\in G^{0,d}([0,r]\times\Omega)$, cette équation admet une unique solution $u\in G_0^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$ notée $P^{-1}v$ et de plus $u\in G_m^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$. Le lemme 3.4 prouve que, pour $0\leqslant h\leqslant k\leqslant\infty$,

$$v\in G_h^{k,d}(]0,r]\times\Omega)\Longrightarrow P^{-1}v\in G_{h+m}^{k+m,d}(]0,r]\times\Omega). \qquad (3.7)$$

D'après (3.5), on a

$$v \in G^{k,d}([0,r] \times \Omega) \Longrightarrow (tD_t)^j P^{-1} v \in G^{k,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{3.8}$$

D'après (3.6), on a

$$v \in G^{k,d}([0,r] \times \Omega) \Longrightarrow (tD_t)^j P^{-1}(tv) \in G^{k+1,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j < m. \tag{3.9}$$

La proposition 3.5 va nous permettre d'établir la

Proposition 3.6. — *Il existe $R_0 > 0$ et une constante $c \geqslant 0$ telle que pour $0 < R \leqslant R_0$, $\rho r < R$ et $v \in G^d_{R,\rho}([0,r] \times \Omega)$, la solution $u \in G^{m,d}_m(]0,r] \times \Omega)$ de (3.1) vérifie*

$$(tD_t)^l u(t,x) \ll c \, \|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{m-l}(mk)!} \textit{ pour } 0 \leqslant l \leqslant m.$$

Preuve. — D'après la proposition 3.5, on a

$$(tD_t)^l u(t,x) \ll c \, \|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)(mk)!} \text{ pour } 0 \leqslant l \leqslant m-1$$

et

$$(tD_t)^m u(t,x) \ll c \, \|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(mk)!}.$$

Le résultat est donc acquis pour $l = m-1$ et $l = m$. On raisonne ensuite par récurrence ; on suppose le résultat démontré pour $j+1 \leqslant l \leqslant m$ et que

$$(tD_t)^l u(t,x) \ll c \, \|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k} (\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{m-(j+1)}(mk)!}$$

$$\text{pour } 0 \leqslant l \leqslant j+1.$$

Si $0 \leqslant i \leqslant j$, on peut alors écrire

$$(tD_t + 1)u_i = u_i + u_{i+1},$$

d'où

$$u_i(t,x) = \int_0^1 (u_i + u_{i+1})(\sigma t, x) \, d\sigma.$$

On remarque ensuite que

$$\int_0^1 \frac{\sigma^k}{(k+1)^{m-(j+1)}}\, d\sigma = \frac{1}{(k+1)^{m-j}},$$

d'où

$$(tD_t)^l u(t,x) \ll 2c\,\|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{m-j}(mk)!} \text{ pour } 0 \leqslant l \leqslant j$$

et ceci permet de conclure. $\square$

Note. — Dans la définition de la série $\Phi_{R,\rho}(t,\xi)$, on peut remplacer l'entier m par un entier $m' \geqslant 1$, ceci ne change rien à ce qui précède. Le fait d'avoir choisi $m' = m$ ($m' \geqslant m$ conviendrait tout aussi bien) n'interviendra que dans la démonstration du théorème 1.2.

4. Preuve du théorème 1.2

Posons $u' = P(x, tD_t)u$, soit $u = P^{-1}u'$, l'équation (1.1) s'écrit $u' = Tu'$ où T désigne l'opérateur

$$T : u \mapsto f(t, x, D^{\Lambda}(P^{-1}u)(t,x)).$$

Nous allons établir la

Proposition 4.1. — *Il existe $R_0 > 0$, $a_0 > 0$ et une fonction $c :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ tels que, pour*

$$0 < R \leqslant R_0,\ a \geqslant a_0,\ c(R)a \leqslant \rho,\ c(R) < \rho,\ 0 < r \leqslant s \text{ et } r\rho < R,$$

l'application T est une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0;a)$ de l'algèbre de Banach $G^d_{R,\rho}([0,r] \times \Omega)$.

Preuve. — On peut écrire

$$f(t,x,y) - f(t,x,y') = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t,x,y,y')(y_\lambda - y'_\lambda)$$

$$\text{pour } (t,x,y,y') \in [0,s] \times \Omega \times \Omega' \times \Omega'$$

où les fonctions f_λ appartiennent à l'espace $G^{0,d}([0,s] \times (\Omega \times \Omega' \times \Omega'))$. Il existe donc une constante $c_1 \geqslant 0$ telle que, pour tout $(t,x,y,y') \in [0,s] \times \Omega \times \Omega' \times \Omega'$ et tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^{n'} \times \mathbb{N}^{n'}$,

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_{y'}^\gamma f(t,x,y,y')| \leqslant c_1^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+1}(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!^d.$$

Soit $\eta > 1$, d'après l'inégalité (1.2) et cette inégalité, il existe des constantes $c \geqslant 0$, $R_0 > 0$ et $R' > 0$ telles que, pour $0 < R \leqslant R_0$ et $(t, x, y, y') \in [0, s] \times \Omega \times \Omega' \times \Omega'$,

$$\begin{cases} |D_x^\alpha D_y^\beta f(t,x,y)| & \leqslant \; c \dfrac{|\alpha|!^d}{(\eta R)^{|\alpha|}} \dfrac{\beta!^d}{R'^{|\beta|}}, \\ |D_x^\alpha D_y^\beta D_{y'}^\gamma f_\lambda(t,x,y,y')| & \leqslant \; c \dfrac{|\alpha|!^d}{(\eta R)^{|\alpha|}} \dfrac{\beta!^d}{R'^{|\beta|}} \dfrac{\gamma!^d}{R'^{|\gamma|}}. \end{cases}$$

On a en effet

$$(|\alpha| + |\beta|)! \leqslant 2^{|\alpha|+|\beta|} |\alpha|! |\beta|! \leqslant 2^{|\alpha|+|\beta|} n'^{|\beta|} |\alpha|! \beta!,$$

d'où

$$c_0^{|\alpha|+|\beta|+1} (|\alpha| + |\beta|)!^d \leqslant c_0'^{|\alpha|+|\beta|+1} |\alpha|!^d \beta!^d$$

et la première inégalité est satisfaite si

$$c \geqslant c_0', \; 1/(\eta R_0) \geqslant c_0' \text{ et } 1/R' \geqslant c_0'.$$

On satisfait de même à la seconde. Bien entendu, on peut supposer R_0 inférieur à la constante R_0 de la proposition 3.6.

Ces inégalités s'écrivent simplement

$$\begin{cases} \forall t \in [0,s], f(t,x,y) & \ll \; c\,\Theta_{\eta R}^d(\xi) \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \Theta_{R'}^d(y_\lambda), \\ \forall t \in [0,s], f_\lambda(t,x,y,y') & \ll \; c\,\Theta_{\eta R}^d(\xi) \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \Theta_{R'}^d(y_\lambda) \Theta_{R'}^d(y'_\lambda). \end{cases}$$

D'après la version Gevrey du lemme 2.4 de [13] (voir (6.7) de [13]), on en déduit que

$$\begin{cases} \forall t \in [0,s], f(t,x,y) & \ll \; c\,\Phi_{R,\rho}^d(t,\xi) \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \Theta_{R'}^d(y_\lambda), \\ \forall t \in [0,s], f_\lambda(t,x,y,y') & \ll \; c\,\Phi_{R,\rho}^d(t,\xi) \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \Theta_{R'}^d(y_\lambda) \Theta_{R'}^d(y'_\lambda). \end{cases} \tag{4.1}$$

Soient $a > 0$, $0 < R \leqslant R_0$, $0 < r \leqslant s$ et $\rho > 0$ tels que $\rho r < R$ et soit $u \in B'(0; a) \subset G_{R,\rho}^d([0,r] \times \Omega)$, posons

$$y_\lambda(t,x) = t^{l+1} D_t^l D^\alpha (P^{-1} u)(t,x), \lambda = (l, \alpha).$$

Dans ce qui suit, toute constante $\geqslant 0$ indépendante des paramètres a, R, r et ρ sera indifféremment notée c.

D'après la proposition 3.6, il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que, pour $0 < R \leqslant R_0$ et $\rho r < R$,

$$y_\lambda(t,x) \ll c\,a \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}\rho^k t^{k+1} \frac{D^{|\alpha|}(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{m-l}(mk)!}.$$

Il existe d'autre part une constante encore notée $c \geqslant 0$ telle que

$$D^{|\alpha|}(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi) \ll c\,R^{m-l-|\alpha|}(D^{mk+m-l}\varphi_R)^d(\xi) \text{ d'après le lemme 2.9,}$$

$$D^{mk+m-l}\varphi_R(\xi) \ll c\,R^l \frac{(m(k+1)-l)!}{(m(k+1))!} D^{m(k+1)}\varphi_R(\xi) \text{ d'après le lemme 2.8,}$$

$$\frac{1}{(k+1)^{m-l}} \frac{(m(k+1)-l)!}{(mk)!} \leqslant \frac{(m(k+1)-l)^{m-l}}{(k+1)^{m-l}} \leqslant c.$$

On en déduit que

$$y_\lambda \in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega) \text{ et } \|y_\lambda\|_{R,\rho} \leqslant \frac{c(R)}{\rho}\,a. \tag{4.2}$$

On en déduit que

$$\sup_{x\in\Omega} |y_\lambda(t,x)| \leqslant \frac{c(R)}{\rho}\,a\,\Phi_0(t)$$

où

$$\Phi_0(t) \leqslant \Phi_0(r) \leqslant \Phi_0(R/\rho) = K^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(mk+1)^2} = c,$$

d'où

$$\sup_{x\in\Omega} |y_\lambda(t,x)| \leqslant \frac{c(R)}{\rho}\,a \text{ pour tout } 0 \leqslant t \leqslant r. \tag{4.3}$$

Il en résulte que sous une condition de la forme $c(R)a \leqslant \rho$ la fonction composée $f(t,x,D^\Lambda u(t,x))$ est bien définie pour $(t,x) \in [0,r]\times\Omega$ et, sous une condition analogue, d'après (4.1) et le lemme 2.4, on a

$$f(t,x,D^\Lambda u(t,x)) \ll c\,\Phi^d_{R,\rho}(t,\xi).$$

Il existe donc $a_0 > 0$ tel que $T(B'(0;a)) \subset B'(0;a)$ si

$$a \geqslant a_0 \text{ et } c(R)a \leqslant \rho. \tag{4.4}$$

Soient $u, u' \in B'(0;a)$, un raisonnement analogue montre que les fonctions composées $f_\lambda(t,x,D^\Lambda u(t,x), D^\Lambda u'(t,x))$ sont bien définies pour $(t,x) \in [0,r] \times \Omega$ et que

$$Tu - Tu' \ll \frac{c(R)}{\rho} \, \|u-u'\|_{R,\rho} \, \Phi^d_{R,\rho}(t,\xi).$$

Ceci montre que $T : B'(0;a) \to B'(0;a)$ est une contraction stricte si $c(R) < \rho$. $\square$

Preuve du théorème 1.2. — 1. En ce qui concerne l'existence, on choisit ρ tel que $c(R_0)a_0 \leqslant \rho$ et $c(R_0) < \rho$, puis $0 < r \leqslant s$ tel que $r\rho < R_0$. L'application T est alors une contraction stricte de la boule $B'(0;a_0)$ de l'espace $G^d_{R_0,\rho}([0,r] \times \Omega)$; elle admet un unique point fixe $u' \in B'(0;a_0)$ et $u = P^{-1}u' \in G^{m,d}_m(]0,r] \times \Omega)$ est une solution de (1.1).

2. Pour vérifier l'unicité de cette solution u, nous aurons besoin de préciser le choix des paramètres ρ et r comme suit. D'après (4.3), on a

$$\sup_{(t,x)\in[0,r]\times\Omega} |t^{l+1} D^l_t D^\alpha (P^{-1}u')(t,x)| \leqslant \frac{c(R_0)}{\rho} \, a_0 \,;$$

étant donné un voisinage compact $K \subset \Omega'$ de l'origine de $\mathbb{R}^{n'}$, on peut donc supposer que

$$D^\Lambda(P^{-1}u')(t,x) \in K \text{ pour tout } (t,x) \in [0,r] \times \Omega. \tag{4.5}$$

Considérons alors une solution $v \in G^{m,d}_m(]0,r] \times \Omega)$.

a. On vérifie d'abord qu'il existe $0 < r' \leqslant r$ tel que $u = v$ sur $[0,r'] \times \Omega$. Posons $v' = Pv \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega)$ et soit $L > 0$ tel que $u', v' \in G^{0,d}_{(L)}([0,r] \times \Omega)$.

Choisissons $0 < R \leqslant R_0$, $0 < r'' \leqslant r$ et ρ tels que

$$0 < R < 1/L \text{ et } r''\rho < R,$$

alors (lemme 2.6) u' et v' appartiennent à l'espace $G^d_{R,\rho}([0,r''] \times \Omega)$. Posons $a = \max(a_0, \|u'\|_{R,\rho}, \|v'\|_{R,\rho})$ et prenons $\rho' \geqslant \rho$ et $0 < r' \leqslant r''$ tels que

$$c(R)a \leqslant \rho', \; c(R) < \rho' \text{ et } r'\rho' < R.$$

Alors, $u', v' \in G^d_{R,\rho'}([0,r'] \times \Omega)$, $\|u'\|_{R,\rho'} \leqslant \|u'\|_{R,\rho} \leqslant a$ et de même $\|v'\|_{R,\rho'} \leqslant a$. Les fonctions u' et v' appartiennent donc à la boule $B'(0;a)$ de l'espace $G^d_{R,\rho'}([0,r']\times\Omega)$ et sont deux points fixes de la contraction stricte T et par conséquent $u'=v'$ sur $[0,r']\times\Omega$, d'où $u=v$ sur $[0,r']\times\Omega$.

b. Posons

$$t_0=\max\{t\in[0,r]\,;\,u=v \text{ sur } [0,t]\times\Omega\}.$$

Il s'agit de montrer que $t_0=r$. Supposons $0<t_0<r$. Étant donné que $u=v$ sur $[0,t_0]\times\Omega$, on a $D_t^j u(t_0,x)=D_t^j v(t_0,x)$ pour $0\leqslant j<m$ et $x\in\Omega$. Ceci montre que les fonctions $u,v\in G^{m,d}([t_0,r]\times\Omega)$ sont solutions du même problème de Cauchy non caractéristique

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_t^m u(t,x) &=& g(t,x,D^\Lambda u(t,x)),\\ D_t^j u(t_0,x) &=& w_j(x),\ 0\leqslant j<m, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

où $w_j(x)=D_t^j u(t_0,x)$ et

$$g(t,x,y)=-t^{-(m+1)}\sum_{l=0}^{m-1}a_l(x)y_{l,0}+t^{-m}f(t,x,y).$$

Cette fonction g appartient à l'espace $G^{0,d}([t_0,r]\times\Omega\times\Omega')$.

Il en résulte que la fonction $U=v-u$ est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_t^m U(t,x) &=& g(t,x,D^\Lambda u(t,x)+D^\Lambda U(t,x))-g(t,x,D^\Lambda u(t,x)),\\ D_t^j U(t_0,x) &=& 0,\ 0\leqslant j<m. \end{array}\right.$$

Posons

$$h(t,x,y)=g(t,x,D^\Lambda u(t,x)+z)-g(t,x,D^\Lambda u(t,x)) \text{ où } z_{l,\alpha}=t^{l+1}y_{l,\alpha}.$$

D'après (4.5), il existe un voisinage ouvert Ω'' de l'origine de $\mathbb{R}^{n'}$ qu'on peut supposer convexe tel que la fonction h soit bien définie sur $[t_0,r]\times\Omega\times\Omega''$, $h\in G^{0,d}([t_0,r]\times\Omega\times\Omega'')$ et $h(t,x,0)=0$.

Posons

$$\mathcal{D}^\Lambda U=(D_t^l D^\alpha U)_{(l,\alpha)\in\Lambda},$$

la fonction U est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_t^m U(t,x) &=& h(t,x,\mathcal{D}^\Lambda U(t,x)),\\ D_t^j U(t_0,x) &=& 0,\ 0\leqslant j<m. \end{array}\right.$$

Introduisons les primitives de U s'annulant pour $t = t_0$

$$D_t^{-j} U(t,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} U(\tau,x)\, d\tau,\ j \geqslant 1,$$

et posons $U' = D_t^m U \in G^{0,d}([t_0,r] \times \Omega)$, donc $U = D_t^{-m} U'$. Cette fonction U' verifie

$$U'(t,x) = h(t,x,\mathcal{D}'^{\Lambda} U'(t,x)) \tag{4.7}$$

où

$$\mathcal{D}'^{\Lambda} U' = (D_t^{l-m} D^{\alpha} U')_{(l,\alpha)\in\Lambda}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $t_0 < t_1 \leqslant r$ tel que $U' = 0$ sur $[t_0,t_1] \times \Omega$, d'où une contradiction vu la définition de t_0 et ceci prouvera que $t_0 = r$.

Grâce à une translation, on peut supposer $t_0 = 0$.

Dans la définition de la série formelle $\Phi_{R,\rho}$, prenons $m = 1$; on obtient ainsi la série

$$\Phi'^{d}_{R,\rho}(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho t)^k \frac{(D^k \varphi_R)^d(\xi)}{k!}$$

et, pour $0 < t_1 \leqslant r - t_0$ tel que $\rho t_1 < R$, l'espace $G'^{d}_{R,\rho}([0,t_1] \times \Omega)$. D'après le lemme 2.6, il existe $R > 0$ tel que $U' \in G'^{d}_{R,\rho}([0,t_1] \times \Omega)$. On a alors

$$D_t^{l-m} D^{\alpha} U' \ll \|U'\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \frac{t^{k+m-l}}{(k+m-l)!} D^{|\alpha|} (D^k \varphi_R)^d(\xi)$$

où

$$D^{|\alpha|} (D^k \varphi_R)^d(\xi) \ll c\, R^{m-l-|\alpha|} (D^{k+m-l} \varphi_R)^d(\xi)$$

d'après le lemme 2.9 car $d|\alpha| \leqslant m - l$,

d'où

$$D_t^{l-m} D^{\alpha} U' \ll \frac{c(R)}{\rho^{m-l}} \|U'\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} (\rho t)^{k+m-l} \frac{(D^{k+m-l} \varphi_R)^d(\xi)}{(k+m-l)!}.$$

En supposant $\rho \geqslant 1$, ceci prouve que $D_t^{l-m} D^{\alpha} U'$ appartient à l'espace $G'^{d}_{R,\rho}([0,t_1] \times \Omega)$ et que

$$\|D_t^{l-m} D^{\alpha} U'\|_{R,\rho} \leqslant \frac{c(R)}{\rho} \|U'\|_{R,\rho}.$$

On a d'autre part
$$h(t,x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}h_\lambda(t,x,y)y_\lambda$$
où $h_\lambda\in G^{0,d}([0,r-t_0]\times\Omega\times\Omega'')$. Grâce à un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus, on constate qu'on peut choisir $R>0$, $\rho\geqslant 1$ et $0<t_1\leqslant r-t_0$ tels que $\rho t_1<R$, $U'\in G'^{d}_{R,\rho}([0,t_1]\times\Omega)$ et
$$h(t,x,\mathcal{D}'^{\Lambda}U'(t,x))\ll\frac{c(R)}{\rho}\,\|U'\|_{R,\rho}.$$
En prenant R et ρ tels que $c(R)<\rho$, ceci prouve que $U'=0$ sur $[0,t_1]\times\Omega$ et ceci permet de conclure.

3. Vérifions (1.5) par récurrence sur h, le résultat étant acquis pour $h=0$. Supposons la propriété établie pour $h-1$ et soit $f\in G^{h,d}([0,r]\times\Omega\times\Omega')$. D'après (3.7), il s'agit de vérifier que $u'=Pu\in G^{h,d}_h(]0,r]\times\Omega)$. Étant donné que $u'\in G^{h-1,d}_{h-1}(]0,r]\times\Omega)$,
$$(tD_t)^lD^\alpha(P^{-1}u')\in G^{h,d}_h(]0,r]\times\Omega)\text{ pour }(l,\alpha)\in\Lambda.$$
Vu que $u'(t,x)=f(t,x,D^\Lambda(P^{-1}u')(t,x))$, ceci montre que $u'\in G^{h,d}(]0,r]\times\Omega)$.

On remarque ensuite que
$$(tD_t)^hu'(t,x)=f_h(t,x,D^{\Lambda_h}u'(t,x))$$
où $f_h\in G^{0,d}([0,r]\times\Omega\times\Omega')$ et
$$\Lambda_h=\{(l,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^n\,;\,l+|\alpha|\leqslant m+h\text{ et }0\leqslant l<m+h\}.$$
Vu que
$$(tD_t)^lD^\alpha(P^{-1}u')\in G^{0,d}([0,r]\times\Omega)\text{ pour }(l,\alpha)\in\Lambda_h$$
d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(tD_t)^hu'\in G^{0,d}([0,r]\times\Omega)$, ce qui permet de conclure.

4. On vérifie (1.6) par récurrence sur h. Le résultat étant acquis pour $h=0$, on le suppose établi pour $h-1$ et on écrit
$$f(t,x,y)=f(t,x,0)+\sum_{(l,\alpha)\in\Lambda}f_{l,\alpha}(t,x,y)y_{l,\alpha},$$
d'où
$$f(t,x,D^\Lambda u(t,x))=v(t,x)+tw(t,x)$$

où

$$v(t,x) = f(t,x,0) \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega)$$

et

$$w(t,x) = \sum_{(l,\alpha)\in\Lambda} f_{l,\alpha}(t,x,D^\Lambda u(t,x))(tD_t)^l D^\alpha u(t,x) \in G^{h-1,d}([0,r] \times \Omega)$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $u = P^{-1}v + P^{-1}(tw)$ et on conclut grâce à (3.8) et (3.9) pour $0 \leqslant j < m$; pour $j = m$, on utilise l'équation (1.3). $\square$

5. Preuve du théorème 1.3

Le théorème étant acquis pour $k = 0$, on raisonne par récurrence sur k. Nous allons établir le théorème pour $k \geqslant 1$ et tout $h \geqslant k$ en le supposant démontré pour $k-1$ et tout $h \geqslant k-1$.

Une fonction u vérifiant (1.8) appartient à l'espace $G^{1,d}([0,r] \times \Omega)$ car $h \geqslant 1$ et peut donc s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$u(t,x) = u_0(x) + tu_1(t,x) \text{ où } u_0 \in G^d(\Omega),\ u_1 \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega); \tag{5.1}$$

en effet, il suffit de poser

$$u_0(x) = u(0,x) \text{ et } u_1(t,x) = \int_0^1 D_t u(\sigma t, x)\, d\sigma. \tag{5.2}$$

Ceci conduit à chercher la solution de la forme (5.1). Nous allons démontrer qu'il existe des fonctions u_0 et u_1, uniques, vérifiant

$$\begin{cases} u_0 \in G^d(\Omega),\ u_1 \in G^{m+h-1,d}_{m+h-k}(]0,r] \times \Omega) \\ (tD_t)^j u_1 \in G^{h-1,d}([0,r] \times \Omega),\ 0 \leqslant j \leqslant m, \end{cases} \tag{5.3}$$

telles que (5.1) soit solution.

1. On montre d'abord que la fonction u définie par (5.1) vérifie les propriétés suivantes

$$u \in G^{m+h-1,d}_{m+h-k}(]0,r] \times \Omega) \text{ et } (tD_t)^j u \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{5.4}$$

Il est clair que u appartient à l'espace $G^{m+h-1,d}(]0,r] \times \Omega)$.

La fonction u_1 appartient à l'espace $G^{0,d}([0,r] \times \Omega)$, il en est donc de même de la fonction tu_1. Pour $j \geqslant 1$, on a d'autre part

$$t^j D_t^j (tu_1) = t^{j+1} D_t^j u_1 + j t^j D_t^{j-1} u_1. \tag{5.5}$$

Ceci montre que $(tD_t)^j (tu_1) \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega)$ pour $0 \leqslant j \leqslant m+h-k$ et, par conséquent, $u \in G^{m+h-1,d}_{m+h-k}(]0,r] \times \Omega)$.

La formule (5.5) montre en outre que

$$(tD_t)^j u \in G^{h-1,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m.$$

En dérivant cette formule, on obtient

$$D_t\big(t^j D_t^j (tu_1)\big) = t^{j+1} D_t^{j+1} u_1 + (2j+1) t^j D_t^j u_1 + j^2 t^{j-1} D_t^{j-1} u_1$$

et ceci montre que

$$D_t (tD_t)^j u \in G^{h-1,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1,$$

d'où

$$(tD_t)^j u \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega) \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

2. L'équation (1.3) est alors équivalente à

$$P(x,0) u_0(x) + t P_1(x, tD_t) u_1(t,x) = f(t,x,D^\Lambda u(t,x)) \tag{5.6}$$

où

$$P_1(x,\lambda) = P(x,\lambda+1).$$

On constate que

$$P_1(x,tD_t) u_1 \in G^{0,d}([0,r] \times \Omega)$$

et que, d'après la seconde propriété (5.4),

$$D^\Lambda u(0,x) = 0.$$

Il en résulte que (5.6) est équivalente aux deux équations

$$P(x,0) u_0(x) = f(0,x,0)$$

et

$$t P_1(x,tD_t) u_1(t,x) = f(t,x,D^\Lambda u(t,x)) - f(0,x,0). \tag{5.7}$$

La première équation détermine u_0 vu que $0 \notin K$ et cette fonction appartient à l'espace $G^d(\Omega)$ d'après le lemme 3.2.

Quant à la seconde équation, posons $y^0 = (y^0_{l,\alpha})_{(l,\alpha)\in\Lambda}$ où

$$y^0_{l,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad l > 0, \\ D^\alpha u_0(x) & \text{si} \quad l = 0. \end{cases}$$

On a alors $D^\Lambda u_0(x) = t\, y^0(x)$.

De même, posons

$$y = (y_{l,\alpha})_{(l,\alpha)\in\Lambda} \text{ où } y_{l,\alpha}(t,x) = t^{l+1} D_t^l D^\alpha u_1(t,x).$$

On remarque que

$$t^{l+1} D_t^l D^\alpha (tu_1) = t\Big(t^{l+1} D_t^l D^\alpha u_1 + l t^l D_t^{l-1} D^\alpha u_1\Big)$$

et, en posant

$$z = (z_{l,\alpha})_{(l,\alpha)\in\Lambda} \text{ où } z_{l,\alpha} = y_{l,\alpha} + l y_{l-1,\alpha},\ y_{-1,\alpha} \equiv 0,$$

on constate que

$$D^\Lambda u(t,x) = ty^0(x) + tz(t,x).$$

Étant donné que

$$f(t,x,ty^0 + tz) - f(0,x,0) = tg(t,x,y)$$

où

$$g \in G^{h-1,d}([0,s] \times \Omega \times \mathbb{R}^{n'}),$$

ceci montre que l'équation (5.7) s'écrit

$$P_1(x,tD_t)u_1(t,x) = g(t,x,D^\Lambda u_1(t,x))$$

et, d'après l'hypothèse de récurrence (car $h-1 \geqslant k-1$), cette équation admet une unique solution u_1 vérifiant (5.3).

3. Quant à (1.8), vu (5.4), il reste à vérifier que

$$u \in G^{m+h,d}(]0,r] \times \Omega) \text{ et } (tD_t)^m u \in G^{h,d}([0,r] \times \Omega).$$

Ceci résulte de (5.4) et de l'équation (1.3) que vérifie u.

Ceci achève la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] Baouendi (M.S.), Goulaouic (C). — Cauchy problems with caracteristic initial hypersurface, Comm. on Pure and Appl. Math., 26, p. 455-475 (1973).

[2] Baouendi (M.S.), Goulaouic (C.). — Singular Nonlinear Cauchy Problems, J. of Diff. Eq., 22, p. 268-291 (1976).

[3] Derrab (F.), Nabaji (A.), Pongérard (P.), Wagschal (C.). — Problème de Cauchy Fuchsien dans les espaces de Gevrey, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 11, p. 401-424 (2004).

[4] Koike (M.). — Volevič systems of singular nonlinear partial differential equations, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Appl., 24, p. 999-1009 (1995).

[5] Komatsu (H.). — Linear hyperbolic equations with Gevrey coefficients, J. Math. Pures Appl., 59, p. 145-185 (1980).

[6] Pongérard (P.). — Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 7, p. 423-448 (2000).

[7] Pongérard (P.). — Problème de Cauchy caractéristique à solution entière, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 8, p. 89-105 (2001).

[8] Pongérard (P.), Wagschal (C.). — Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières, J. Math. Pures Appl., 75, p. 409-418 (1996).

[9] Tahara (H.). — Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic equations in spaces of functions of Gevrey classes, Proc. Japan Acad., 61, p. 63-65 (1985).

[10] Tahara (H.). — Singular hyperbolic systems, VI. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes, J. Math. Soc. Japan, 39 No. 4, p. 551-580 (1987).

[11] Tahara (H.). — Singular hyperbolic systems, VII. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2), Japan. J. Math. New Ser., 15, p. 275-307 (1989).

[12] Tahara (H.). — Singular hyperbolic systems, VIII. On the well-posedness in Gevrey classes for Fuchsian hyperbolic equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 39, p. 555-582 (1992).

[13] Wagschal(C.). — Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pures Appl., 58, p. 309-337 (1979).

[14] Yamane (H.). — Global fuchsian Cauchy problem, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 7, p. 147-162 (2000).