ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

PHILIPPE RAMBOUR, JEAN-MARC RINKEL

Un théorème de Spitzer-Stone fort pour une matrice de Toeplitz à symbole singulier défini par une classe de fonctions analytiques

Tome XVI, nº 2 (2007), p. 331-367.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_2_331_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 2, 2007
pp. 331–367

Un théorème de Spitzer-Stone fort pour une matrice de Toeplitz à symbole singulier défini par une classe de fonctions analytiques

Philippe Rambour[(1)], Jean-Marc Rinkel[(1)]

Résumé. — Dans cet article nous donnons une formule pour les coefficients de l'inverse des matrices de Toeplitz respectivement de symboles $f(e^{i\theta}) = (1-\cos\theta)|f_1(e^{i\theta})|^2$ (cas singulier) et $|f_1(e^{i\theta})|^2$ (cas régulier) où f_1 est une fonction appartenant à une classe de fonctions holomorphes sur un disque ouvert contenant le tore $\mathbb{T}$ et sans zéro sur $\mathbb{T}$. Un cas particulier défini par $f_1 = \frac{Q}{P}$ où P et Q sont des polynômes sans zéro sur $\mathbb{T}$ est traité. Dans le cas où le symbole est singulier, cette formule présente l'intérêt d'avoir un second ordre. Dans tous les cas elle est extrêmement précise puisque les restes sont de l'ordre $O(1/\rho^N)$, avec $1 < \rho$. Cette formule nous permet de calculer des asymptotiques de la trace et de la somme des termes pour la matrice inverse.

Abstract. — This paper presents a computation of the inverse of the Toeplitz matrice with respectively the symbols $f(e^{i\theta}) = (1-\cos\theta)|f_1(e^{i\theta})|^2$ (singular case) or $|f_1(e^{i\theta})|^2$ (regular case), where f_1 belongs to a class of holomorphic functions on a open disk containing the torus $\mathbb{T}$, and without zero on $\mathbb{T}$. A particular case is given by $f_1 = \frac{Q}{P}$, where P and Q are polynomials without zero on $\mathbb{T}$. For the singular case, this formula presents the interest to have a second order. In all the cases we have an extremely good precision since the order of the remaining term is $O(1/\rho^N)$, with $1 < \rho$. From this result we derive for the inverse matrix two precise asymptotic expansions of the sum of the entries and of the trace.

1. Introduction

Soit f une fonction définie sur le tore complexe $\mathbb{T}$ de dimension un et appartenant à $L^2(\mathbb{T})$. Si N désigne un entier naturel positif on appelle matrice

(*) Reçu le 18 juillet 2005, accepté le 4 juillet 2006

(1) Université de Paris Sud, Bât. 425, Campus d'Orsay, 91405 Orsay Cedex
philippe.rambour@math.u-psud.fr
jean-marc.rinkel@math.u-psud.fr

de Toeplitz d'ordre N associée au symbole f, et on note $T_N(f)$, la matrice définie par $(T_N(f))_{k+1,l+1} = \big(\hat{f}(k-l)\big)$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant l \leqslant N$, où $\hat{f}(s)$ est le s-ième coefficient de Fourier de f. Si f est une fonction n'ayant pas de pôle ni de zéro sur $\mathbb{T}$ nous dirons que f est un symbole régulier. Dans le cas contraire nous parlerons de symbole singulier.
De nombreux travaux ont été consacrés au comportement asymptotique de $T_N(f)^{-1}$ et de ses coefficients quand N tend vers l'infini. Le cas régulier a été étudié par G. Szegö [16]. Le cas singulier donne lieu à de nombreux développements. Un premier résultat important concernant le comportement asymptotique des coefficients de l'inverse est dû à Spitzer et Stone [28] et concerne le symbole $f = |1-\chi|^2 f_1$ où f_1 est une fonction positive suffisamment régulière et où $\chi = \chi(\theta) = e^{i\theta}$. Ce résultat a été étendu par un des deux auteurs (associé à Abdellatif Seghier) au cas $f = |1-\chi|^{2p} f_1$, $p \in \mathbb{N}$ où f_1 est une fonction positive suffisamment lisse. Nous avons pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$:

$$T_N(|1-\chi|^{2p} f_1)^{-1}_{[Nx]+1,[Ny]+1} = \frac{1}{f_1(1)} N^{2p-1} G_p(x,y) + o(N^{2p-1}), \qquad (1.1)$$

G_p étant le noyau de Green associé à l'opérateur différentiel de dérivation d'ordre $2p$ sur $[0,1]$, associé à certaines conditions limites. On trouvera cette formule dans [20], A. Böttcher ayant donné par la suite une expression élégante et compacte du noyau G_p dans [4], dans le cas où $f_1 = 1$. C'est cette expression qui est utilisée dans [22], où nous obtenons la formule (1.1), avec une partie régulière non nécessairement égale à 1. Si l'exposant de $|1-\chi|$ est réel ou complexe le problème n'est pas encore complètement résolu. Il en est de même si le symbole possède plusieurs zéros. On peut citer, entre autres références importantes les travaux de H. Kesten [18], H. Widom [31], P. M. Bleher [3], et [21] auquel a pris part un des deux auteurs. Une bonne référence est le livre de A. Böttcher et B. Silbermann [7].

Un autre problème célèbre est le comportement asymptotique du déterminant de $T_N(f)$ (voir [15]) et de la trace de $(T_N(f))^{-1}$. Là encore le cas régulier a été traité par G. Szegö [16]. On sait que :

$$\ln\det T_N(h) = (N+1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln h(e^{i\theta})d\theta + \sum_{k\geqslant 1} |k||\widehat{(\ln h)}(k)|^2 + o(1)$$

si h est un symbole régulier positif. Le cas singulier avec le symbole

$$F = \left(\prod_{i=1}^{n} |\chi-\chi_0|^{2\alpha_i}(\chi-\chi_0)^{\beta_i}\right) F_1 \qquad (1.2)$$

(F_1 régulière) a été conjecturé par R. E. Hartwig et M. E. Fisher en 1968 (voir [15]) et a été démontré au cours d'une longue série de travaux. Parmi ceux-là, citons [31], [2], [5], [6], [14], [12], [13], [9].
Notre article étudie un cas particulier de symboles du type (1.2), à savoir

$$f(\chi) = |1-\chi|^2 |f_1(\chi)|^2, \tag{1.3}$$

ainsi que des symboles du type

$$\tilde{f} = |f_1(\chi)|^2, \tag{1.4}$$

où f_1 est une fonction holomorphe sur un disque de rayon strictement plus grand que 1, sans zéros sur ce disque. Remarquons que les symboles du type (1.4) sont réguliers. Dans le cas singulier nous obtenons une formule intrinsèque (objet du théorème 2.1) qui est plus précise que celle du théorème de Stone-Spitzer, puisque nous obtenons un deuxième ordre (et même un troisième ordre), et aussi parce que pour les coefficients d'indice de ligne et de colonne (k,l) avec k et l d'ordre $[Nx]$, $0 \leqslant x < 1$ le reste est en $\frac{1}{\rho^N}$ où ρ est une constante supérieure à 1 qui sera précisée dans l'énoncé du théorème 2.1. De plus ces formules sont aussi valables pour les petites valeurs des indices, ce qui n'est pas le cas dans le théorème de Stone-Spitzer : voir en particulier le théorème 2.11. En effet le théorème de Stone-Spitzer s'écrit, avec notre symbole :

$$\Big[T_N(f)\Big]^{-1}_{l+1,k+1} = \Big|\frac{1}{f_1(1)}\Big|^2 \Big(\min(k+1,l+1) - \frac{(k+1)(l+1)}{(N+2)}\Big) + o(N)$$

alors que nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\big(T_N(f)\big)^{-1}_{l+1,k+1} = \\
&\big|\tfrac{1}{f_1(1)}\big|^2 \Big(\min(k+1,l+1) - \tfrac{(k+1)(l+1)}{N+2+\mathcal{A}(f_1)} - \\
&- \tfrac{k+1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)}\Big(\tfrac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big) - \tfrac{l+1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)}\overline{\Big(\tfrac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big)} + \overline{\Big(\tfrac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big)} \\
&- \tfrac{1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)}\Big|\tfrac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big|^2\Big) + O(\tfrac{1}{\rho^N}).
\end{aligned}$$

pour $k=[Nx]$, $\ell=[Ny]$, $0<x<y<1$, $0<\rho<1$, $\mathcal{A}(f_1)$ étant une constante par rapport à k, l et N qui est donnée dans l'énoncé du théorème 2.1. Cela permet de plus d'avoir la formule asymptotique suivante lorsque pour N tendant vers $+\infty$, les fractions $\dfrac{k}{N}$ et $\dfrac{l}{N}$ ont pour limites respectives les réels x et y, avec $0<x<y<1$:

$$\frac{|f_1(1))|^2}{N}\Big[T_N(f)\Big]^{-1}_{[Ny],[Nx]} = \min(x,y) - xy + \frac{1}{N}\Big(\big(2+\mathcal{A}(f_1)\big)xy - x\mathcal{B}(f_1)$$
$$-y\mathcal{B}(\bar{f_1}) + \bar{\mathcal{B}}(f_1)\Big) + \frac{1}{N^2}\Big(-\big(2+\mathcal{A}(f_1)\big)^2 xy + \big(2+\mathcal{A}(f_1)\big)(x\bar{\mathcal{B}}(f_1)$$
$$+y\mathcal{B}(f_1)) - |\mathcal{B}(f_1)|^2\Big) + O(\frac{1}{\rho^N}).$$

La constante $\mathcal{B}(f_1)$ est égale à $\frac{f_1'(1)}{f_1(1)}$. En plus du noyau de Green $R(x,y) = \min(x,y) - xy$ de la formule de Stone-Spitzer, nous obtenons une vitesse et une accélération de la convergence terme à terme vers ce noyau.

Un cas particulier important est celui où $f_1 = \frac{Q}{P}$, Q et P étant des polynômes sans zéro sur le tore. Il permet de traiter toute une classe de marches aléatoires discrètes, symétriques sur un réseau de dimension 1 et d'obtenir pour celles-ci à partir du corollaire 2.3 des potentiels beaucoup plus précis que ceux obtenus avec le théorème de Stone-Spitzer (on pourra consulter [23]).

Dans le cas régulier, avec un symbole positif f, H. J. Landau a démontré dans [19] l'existence d'un unique polynôme P_N de degré N tel que $T_N(f) = T_N(1/|P_N|^2)$: le polynôme prédicteur de f de degré N. Les coefficients de ce polynôme sont les termes de la première colonne de $\big[T_N(f)\big]^{-1}$ à une normalisation près. Dans [17] I. Ibrahimov,Y. Rozanov montrent que si le symbole admet la décomposition $f = g\bar{g}$, alors $|P_N|^2$ tend uniformément vers $(\frac{1}{g})$ pour N tendant vers $+\infty$. Nous retrouvons la proximité entre le polynôme prédicteur et l'inverse du symbole, ce qui n'est pas une surprise, mais ce qui est intéressant, c'est la précision de l'approximation (d'ordre $\frac{1}{\rho^N}$) : c'est l'objet du théorème 2.6. Enfin pour revenir sur le symbole singulier, nous donnons pour ce cas des formules asymptotiques de la trace et de la somme des termes de cet inverse (corollaires 2.8 et 2.9) dont l'intérêt est largement signalé dans [1], [25] et [29]. Ces expressions dépendent seulement de $f_1(1)$, ainsi que des coefficients du développement en série entière de $1/f_1(z)$. Remarquons que le corollaire 2.8 est un développement asymptotique de la trace avec deux ordres, ce qu'on ne peut espérer atteindre à partir de la formule d'Hartwig-Fisher.

Tous les travaux évoqués ci-dessus utilisent diverses formules d'inversion qui proviennent toutes de la même idée géométrique. Nous utilisons ici une formule dûe à A. Seghier dans [27], que nous rappelons dans le théorème 3.2.

Parmi les applications de nos résultats, nous avons déjà mentionné les probabilités, avec les marches aléatoires, mais il faut encore citer les applications aux statistiques (problèmes de log vraisemblance). Un autre champ d'application est l'étude des matrices bandes [11], que l'on atteint avec des symboles du type de ceux définis par l'équation (1.4) lorsque $f_1 = Q$, Q étant le polynôme défini plus haut.

Évoquons pour terminer le champ d'investigation que permettent les résultats de ce travail. Ils permettent d'intervenir dans le domaine important des déterminants et des valeurs propres des matrices de Toeplitz. En effet il faut noter que les techniques de récursion utilisées en [22] appliquées aux formules du théorème 2.3 devraient nous permettre d'obtenir un second ordre du développement de $T_N(|1-\chi|^{2p}|f_1|^2)^{-1}_{[Nx]+1,[Ny]+1}$ où f_1 est la fonction régulière intervenant dans le symbole de l'égalité (1.3) et p entier naturel. Une conséquence est la possibilité d'obtenir un second ordre de *la plus petite valeur propre des matrices* $T_N(|1-\chi|^{2p}|f_1|^2)^{-1}$. Ce programme a pour base un article publié par Widom et Böttcher en 2004, qui établit l'estimation suivante de la plus petite valeur propre de la matrice de Toeplitz d'ordre N ayant pour symbole $f = |1-\chi|^{2p}|f_1|^2$:

$$\lambda_{\min}\left(T_N(f)\right) \sim \frac{c_p}{N^{2p}}|f_1(1)|^2$$

où

$$c_p = \sqrt{8\pi p}\left(\frac{4p}{e}\right)^{2p}\left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right). \tag{1.5}$$

Le travail de Widom et Böttcher est alors basé sur l'idée que

$$\frac{1}{\lambda_{\min}\left(T_N^{-1}(f)\right)} = \lambda_{\max}\left(T_N(f)\right)$$

et que

$$\lambda_{\min}\left(T_N(f)\right) = \frac{1}{\lambda_{\max}\left(\mathcal{G}_p\right)}\frac{1}{N^{2p}}|f_1(1)|^2$$

où $\mathcal{G}_p$ est l'opérateur intégral de noyau G_p dont l'expression est donnée dans [8] ainsi que dans [22]. On obtient alors la forme de l'équivalent de $\lambda_{\min}\left(T_N(f)\right)$ rappelée ci-dessus. Nous devrions être en mesure de préciser le terme $\left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right)$ dans l'équation (1.5). L'obtention d'un second ordre du développement asymptotique des termes $T_N(|1-\chi|^{2p}|f_1|^2)^{-1}_{[Nx]+1,[Ny]+1}$ où $f_1 = \frac{Q}{P}$ nous permettra alors d'obtenir un développement limité au second ordre de cette valeur propre, puisque qu'en fait nous aurons effectué un développement asymptotique du noyau G_p, et donc de l'opérateur intégral $\mathcal{G}_p$. D'autre part il est clair que ce même développement au second ordre précis du terme $T_N(|1-\chi|^{2p}|f_1|^2)^{-1}_{[Nx]+1,[Ny]+1}$ où $f_1 = \frac{Q}{P}$ permet également de calculer des développements asymptotiques au second ordre de la trace des inverses des matrices $T_N(|1-\chi|^{2p}|f_1|^2)^{-1}$. Or il est connu (cela a été fait dans le cas régulier, en particulier dans [10]) que la connaissance des traces des inverses de matrices de Toeplitz permet d'atteindre les déterminants de ces mêmes matrices, dont on devrait pouvoir finalement donner dans ce cas un second ordre, ce qui complèterait la conjecture d'Hartwig-Fisher.

2. Énoncés des principaux résultats

Théorème 2.1. — *Soit f_1 une fonction holomorphe sur un disque de rayon $R > 1$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

$$\frac{1}{f_1} \text{ est analytique sur un disque centré en } 0 \text{ de rayon } R > 1 \tag{2.1}$$

et

$$f_1(1) \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

On pose

$$\frac{1}{f_1}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u z^u, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{A}(f_1) = 2\Re\Big(\frac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big). \tag{2.4}$$

Soit $f = |1-\chi|^2|f_1|^2$. Alors $T_N(f)$ est inversible et il existe un nombre $\rho \in]1, R[$ tel que

$$\big(T_N(f)\big)^{-1}_{l+1,k+1} = a_{lk} - \frac{d(l)\bar{d}(k)}{N+2+\mathcal{A}(f_1)} + O\big(\frac{1}{\rho^N}\big) \tag{2.5}$$

$$\text{si } \lim_{N\to\infty} \frac{k}{N} = x \text{ et } \lim_{N\to\infty} \frac{l}{N} = y, 0 \leqslant x, y < 1$$

où a_{lk} et $d(s)$ sont définis par les équations suivantes *:*

$$a_{lk} = \sum_{s'=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1),$$

$$d(s) = -(s+1)\frac{1}{f_1(1)} + \Big(\frac{1}{f_1}\Big)'(1) \text{ si } x > 0, y > 0 \tag{2.6}$$

Si $x = 0$, l'équation (2.6) reste vraie lorsque k est une fonction de N qui tend vers l'infini avec N, même remarque pour y.

De plus la convergence des restes vers 0 est uniforme par rapport à k et l sur tout intervalle $\big[0, [Nx_0]\big] \times \big[0, [Ny_0]\big]$, $0 < x_0, y_0 < 1$.

Remarque 2.2. — La condition (2.1) n'est pas limitative. En effet, si une fonction h se décompose sous la forme $h = f_1\bar{f}_1$ où f_1 est analytique sur un voisinage ouvert du disque unité fermé et $h > 0$ sur le tore, on peut la décomposer sous la forme $h = \tilde{f}_1\bar{\tilde{f}}_1$ où $\tilde{f}_1$ vérifie la condition $(\mathcal{H})$. Justifions ceci. Supposons que f_1 admette $z_1, \cdots, z_p$ comme zéros non nuls, avec les multiplicités $n_1, \cdots, n_p$ sur le disque unité ouvert et $z_{p+1} = 0$ comme racine de multiplicité $n_{p+1} \geqslant 0$. De l'identité $f_1(z) = P(z)\dfrac{f_1(z)}{P(z)}$, où P est le polynôme défini par

$$P(z) = \prod_{i=1}^{p+1}(z - z_i)^{n_i},$$

on déduit l'égalité suivante sur le tore :

$$\forall\chi \in \mathbb{T} \ \ |f_1(\chi)| = |\tilde{f}_1(\chi)|,$$

où

$$\tilde{f}_1(z) = Q(z)\frac{f_1(z)}{P(z)} \ \text{ et } \ Q(z) = \prod_{i=1}^{p} z_i^{n_i} \prod_{i=1}^{p}(\frac{1}{\bar{z}_i} - z)^{n_i}.$$

Et il est clair que $\tilde{f}_1$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}$.

D'autre part, quitte à multiplier le symbole par une constante, la condition (2.2) est vérifiée.

Voici un corollaire utile de ce théorème.

Corollaire 2.3. — *Soient P et Q deux polynômes trigonométriques sans zéro sur $\mathbb{T}$ pour lesquels $\frac{Q(1)}{P(1)}$ est réel. Nous savons que nous pouvons nous ramener à P et Q ayant leurs zéros à l'extérieur du disque centré en 0 de rayon $R > 1$. On pose*

$$\frac{P}{Q}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u z^u, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{A}(P,Q) = 2\Re\Big(\frac{Q'(1)}{Q(1)} - \frac{P'(1)}{P(1)}\Big). \tag{2.8}$$

Soit $f = |1-\chi|^2\frac{|Q|^2}{|P|^2}$. Alors $T_N(f)$ est inversible et il existe un nombre $\rho \in]1, R[$ tel que

$$\big(T_N(f)\big)^{-1}_{l+1,k+1} = a_{lk} - \frac{d(l)\bar{d}(k)}{N + 2 + \mathcal{A}(P,Q)} + O\big(\frac{1}{\rho^N}\big) \tag{2.9}$$

$$\text{si } \lim_{N\to\infty}\frac{k}{N} = x \text{ et } \lim_{N\to\infty}\frac{l}{N} = y, 0 \leqslant x, y < 1$$

où a_{lk} et $d(s)$ sont définis par les équations suivantes :

$$a_{lk} = \sum_{s'=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1),$$

$$d(s) = -(s+1)\frac{P(1)}{Q(1)} + \frac{P(1)}{Q(1)}\Big(\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{Q'(1)}{Q(1)}\Big) \text{ si } x > 0 \text{ et } y > 0 \qquad (2.10)$$

Si $x = 0$, l'équation (2.10) reste vraie lorsque k est une fonction de N qui tend vers l'infini avec N, même remarque pour y.

De plus la convergence des restes vers 0 est uniforme par rapport à k et l pour $(k, l) \in \big[0, [Nx]\big] \times \big[0, [Ny]\big]$

Remarque 2.4. — La démonstration du théorème 2.1 nous fournit également l'énoncé suivant :

$$\big(T_N(f)\big)^{-1}_{l+1,k+1} = \begin{cases} O(1) & \text{si} \begin{cases} k \sim N \text{ et } l \sim N \\ k \sim N \text{ et } l = [Ny],\ 0 < y < 1 \\ l \sim N \text{ et } k = [Nx],\ 0 < x < 1 \end{cases} \\ \\ O(\frac{1}{N}) & \text{si} \begin{cases} k \sim N \text{ et } l = l_0 \\ k = k_0 \text{ et} l \sim N \end{cases} \end{cases}$$

On retrouve dans ces cas limites les ordres fournis par le théorème de Stone-Spitzer.

Remarque 2.5. — Pour $(k, l) \in \big]0, [Nx]\big] \times \big]0, [Ny]\big]$ on peut obtenir une expression plus intrinsèque. Par exemple, si l'on suppose $0 < x < y < 1$, alors :

$$a_{lk} = \Big|\frac{1}{f_1(1)}\Big|^2 \left(\min\big(k+1, l+1\big) + \overline{\Big(\frac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big)}\right).$$

Cette expression devient dans le cadre du corollaire 2.3 :

$$a_{lk} = \Big|\frac{P(1)}{Q(1)}\Big|^2 \left(\min\big(k+1, l+1\big) - \overline{\big(\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{Q'(1)}{Q(1)}\big)}\right)$$

On trouvera la démonstration de ce résultat à la fin de la preuve du théorème 2.3.

THÉORÈME 2.6. — *On reprend les hypothèses et notations du théorème 2.1. Considérons le symbole régulier f_1. Alors pour $0 < k \leqslant l < N$, il existe $\rho \in]1, R[$ tel que*

$$(T_N f_1))^{-1}_{l+1,k+1} = \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s} + \begin{cases} O(1) & \text{si } k \sim N \text{ et } l \sim N \\ O(\frac{1}{\rho^N}) & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.11}$$

Remarque 2.7. — Si $l > k$, la partie principale du terme de droite de l'égalité (2.11) s'écrit $\sum_{s=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s}$.

COROLLAIRE 2.8 (THÉORÈME DE TRACE). — *Avec toujours les hypothèses et notations du théorème 2.1 nous obtenons la formule*

$$\operatorname{Tr}\big(T_N(f)^{-1}\big) = \\ = \tfrac{N^2}{6}\big|\tfrac{1}{f_1}(1)\big|^2 + N\left(\big|\tfrac{1}{f_1}(1)\big|^2\big(\tfrac{2}{3} - \tfrac{\mathcal{A}(f_1)}{6}\big) - C(f_1)\right) + O(1).$$

où

$$C(f_1) = \sum_{u=0}^{+\infty}\sum_{u'=0}^{+\infty} \bar{\beta}_u\beta_{u'} \max(u, u'),$$

$\mathcal{A}(f_1)$ étant donné par (2.4).

COROLLAIRE 2.9 (SOMME DES TERMES). — *Avec les mêmes hypothèses que précédemment nous avons*

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{N} (T_N(f))^{-1}_{l,k} = \big|\frac{1}{f_1}(1)\big|^2 \left(\frac{1}{12}N^3 + N^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\mathcal{A}(f_1)}{4}\Big)\right) + O(N).$$

Remarque 2.10. — Dans le cadre du corollaire 2.3, si $\deg Q = 0$, c'est-à-dire si Q est un polynôme constant, on obtient une formule exacte, quitte à se restreindre un peu sur k et l. Cette formule a été établie dans [24] : nous la donnons ici pour la mettre en regard avec le corollaire 2.3.

THÉORÈME 2.11. — *Pour un symbole du type $f = \frac{|1-\chi|^2}{|P|^2}$, et si $n_1 \leqslant k \leqslant N - n_1$, le terme $d(k)$ du théorème 2.3 s'écrit :*

$$d(s) = -(s+1)P(1) + \frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)}$$

et on a :

$$T_N(f)^{-1}_{k+1,l+1} = a_{lk} - \frac{d(k)\bar{d}(l)}{N+2+\mathcal{A}(P,Q)} \tag{2.12}$$

La raison de cette absence de reste sous une condition liée au degré du polynôme est l'objet de la remarque 3.6. Cette remarque prend toute son importance si on interprète par exemple N comme la taille d'un réseau discret de dimension 1 et le terme de droite de l'équation (2.12) comme l'espérance d'un nombre de visites en l partant de k d'une particule animée d'un mouvement aléatoire sur le réseau. Le paradoxe est que l'on n'obtient pas facilement ce résultat comme corollaire immédiat du théorème 2.3 : sa démonstration est spécifiquement adaptée à ce symbole.

3. Démonstration des théorèmes 2.1 et 2.6.

3.1. Une formule d'inversion

Notations 3.1. — :

$$H^+ = \left\{ h \in L^2(\mathbb{T}); \quad \widehat{h}(s) = 0, \quad s < 0 \right\},$$

H^- désigne l'orthogonal de H^+dans $L^2(\mathbb{T})$

π_+, π_- sont les projections orthogonales de $L^2(\mathbb{T})$ sur $\mathbb{H}^+$ et $\mathbb{H}^-$.

Les hypothèses faites sur f proviennent du théorème suivant (Grenander et Szegö [16]):

> Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ une fonction strictement positive presque partout sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\operatorname{Log} f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors il existe $g \in H^+$ tel que $f = |g|^2$.

Nous pouvons alors définir les opérateurs de Hankel H_{Φ_N} et $H^*_{\Phi_N}$ associés à la décomposition de la manière suivante.

Pour cela, posons

$$\Phi_N = \frac{g}{\bar{g}} \chi^{N+1} \qquad (\chi = e^{i\theta}).$$

Les opérateurs de Hankel sont

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N} \quad &: \quad H^+ \to H^-, \quad H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-\left(\Phi_N \psi\right), \\ H^*_{\Phi_N} \quad &: \quad H^- \to H^+, \quad H^*_{\Phi_N}(\varphi) = \pi_+(\bar{\Phi}_N \varphi). \end{aligned}$$

Les hypothèses de la décomposition ci-dessus donnent : $\left\| H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} \right\| < 1$, une démonstration de ce résultat fondamental se trouve dans [26]. Enfin nous noterons $\mathcal{P}_N$ l'espace vect$\{1, \chi, \dots, \chi^N\}$.

Théorème 3.2 (Formule d'inversion). — *Soit f un symbole tel que*

$$f > 0,\ f = g\bar{g}, \quad g \in H^\infty = H^+ \cap L^\infty(\mathbb{T}),\ g^{-1} \in H^\infty.$$

Alors on a

(i) $T_N(f) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_N)$

(ii) Si $p \in \mathcal{P}_N$, nous pouvons écrire

$$T_N(f)^{-1}(p) = \frac{1}{g}\pi_+\left(\frac{p}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g}\pi_+\left(\Phi_N (I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \left[\bar{\Phi}_N\, \pi_+\left(\frac{p}{\bar{g}}\right)\right]\right).$$

Corollaire 3.3. — *Notons $T_N(f)^{-1}_{l,k} = \langle T_N(f)^{-1}(\chi^k), \chi^l\rangle$. Alors*

$$\begin{aligned} T_N(f)^{-1}_{l,k} &= \underbrace{\langle \pi_+\Big(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\Big), \pi_+\Big(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\Big)\rangle}_{\text{premier terme}} \\ &\quad \underbrace{- \langle \big(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\big)^{-1} \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\, \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right), \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\, \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right)\rangle}_{\text{deuxième terme}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans [30] Widom utilise cette formule pour étudier le comportement asymptotique d'un déterminant de Toeplitz correspondant à un symbole singulier. Elle peut aussi être écrite d'une manière purement algébrique en utilisant des inverses d'opérateurs, comme cela a été fait par Kozak [7].

Remarque 3.4. — Dans la suite nous ne pouvons évidemment pas utiliser la formule d'inversion citée plus haut directement, le symbole n'étant pas régulier. Dans un premier temps nous allons donc inverser un symbole régularisé $f_r = |1 - r\chi|^2 |\frac{P}{Q}|^2$ où r est un paramètre, $0 \leqslant r < 1$, puis un passage à la limite nous donnera l'inverse cherché.

3.2. Quelques lemmes

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.5. — *Soit a et b deux opérateurs et m un entier, $||.||$ une norme d'opérateurs. alors*

$$\|a^m - b^m\| \leqslant \|a-b\| \left(\|b\| + \|a-b\|\right)^{m-1} m.$$

Preuve. — $a^m - b^m = (b+a-b)^m - b^m = b^m + \cdots + (a-b)^m - b^m$; d'où :
$\|a^m - b^m\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} C_m^k \|a-b\|^k \|b\|^{m-k} = (\|b\| + \|a-b\|)^m - \|b\|^m.$

De plus nous pouvons écrire : $\|a^m - b^m\| \leqslant \|a-b\| \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \|b\|^j \|a-b\|)^{m-j} \right)$

Soit finalement :
$\|a^m - b^m\| \leqslant \|a-b\| m \left(\|b\| + \|a-b\|\right)^{m-1}.$ □

La clef de la matrise des restes dans le théorème 2.1 est la décroissance géométrique des coefficients γ_u définis par l'égalité :

$$\frac{f_1}{\bar{f}_1}(\chi) = \sum_{u\in\mathbb{Z}} \gamma_u \chi^u. \tag{3.2}$$

Remarque 3.6. — Si $f_1 = \dfrac{1}{P}$ où Pest le polynôme du corollaire 2.3, alors $\frac{\bar{P}}{P}(\chi) = u \geqslant -\deg P \sum \gamma_u \chi^u$. Cette troncature permet d'obtenir la formule exacte du théorème 2.11.

Lemme 3.7. — *Si f_1 vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}$ du théorème 2.1, alors*

$$\gamma_{|u|} = O\left(\frac{1}{\rho^{|u|}}\right) \textit{ pour tout } \rho \in]1, R[$$

Preuve. — Soit $\rho \in]1, R[$. On pose $f_1(\chi) = \sum_{u\geqslant 0} \alpha_u z^u$ et $\dfrac{1}{\bar{f}_1(\chi)} = \sum_{u\geqslant 0} \bar{\beta}_u \bar{\chi}^u$. Il existe deux constantes $K > 0$ et $L > 0$ telles que $|\alpha_u|\rho^u < K$ et $|\bar{\beta}_u|\rho^u < L$. Nous avons pour $i \geqslant 0$:

$$\gamma_i = \sum_{t\geqslant 0} \alpha_{i+t} \bar{\beta}_t,$$

d'où l'on déduit

$$|\gamma_i| \leqslant \frac{KL}{\rho^i} \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1}.$$

De même pour $i \leqslant 0$, on a

$$\gamma_i = \sum_{t \geqslant 0} \alpha_t \bar{\beta}_{t-i},$$

d'où

$$|\gamma_i| \leqslant \frac{KL}{\rho^{-i}} \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1}.$$

Et on conclut. $\square$

3.3. Plan de la preuve des théorèmes 2.1 et 2.6

Notre preuve est divisée en six étapes que nous allons résumer ici :

3.3.1 Étape 0

Calcul du premier terme de la formule d'inversion (3.1).

3.3.2 Étape 1

L'idée essentielle qui dirige notre démonstration est alors d'approcher l'opérateur de Hankel H_{Φ_N} par un opérateur de Hankel tronqué $H_{\tilde{\Phi}_N}$ où

$$\tilde{\Phi}_N(\chi) = \frac{1 - r\chi}{1 - r\bar{\chi}} \chi^{N+1} \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u \chi^u.$$

Le calcul du second terme de la formule (3.1) se base alors sur une décomposition de $x_k = \pi_+ \Big(\bar{\Phi}_N \pi_+ (\frac{\chi^k}{\bar{g}}) \Big)$ qui est de la forme $x_k = \frac{A_{N,k,r}}{1 - r\chi} + y_{N,k,r} + R_{N,k,r}$ où $B_{N,k,r} = \dfrac{A_{N,k,r}}{1 - r\chi}$ est un vecteur propre de $I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$, le vecteur $y_{N,k,r}$ étant orthogonal au précédent et appartenant de plus au noyau de $H_{\tilde{\Phi}_N}$. Dans cette étape, sous la forme de quatre lemmes (lemmes 3.8 ,3.9, 3.12 et 3.10), nous justifierons ces propriétés, et nous estimerons les normes des trois termes de la décomposition de x_k quand r tend vers 0 puis quand r tend vers 1.

3.3.3 Étape 2

La décomposition précédente de x_k permet d'écrire mécaniquement le produit scalaire intervenant dans le deuxième terme de la formule d'inversion de la manière suivante

$$\Big\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} \right)^{-1} (B_{N,k,r} + R_{N,k,r} + y_{N,k,r}) \,, B_{N,l,r} + R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \Big\rangle .$$

Ce qui donne la décomposition :

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}\ ,\ B_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad\qquad + \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}\ ,\ R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad\qquad + \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (R_{N,k,r} + y_{N,k,r})\ ,\ B_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad\qquad + \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (R_{N,k,r} + y_{N,k,r})\ ,\ R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Nous estimons dans cette étape le premier des quatre termes du produit scalaire. La méthode sera en partie reprise pour l'estimation des trois autres termes.

3.3.4 Étape 3

On évalue l'ordre des trois autres produits scalaires intervenant dans la décomposition ci-dessus.

3.3.5 Étape 4

On y estime les limites, quand r tend vers 1 et quand r tend vers 0 de la partie principale du second terme (c'est-à-dire la somme des produits scalaires de l'étape 2); puis en faisant le bilan des restes, estimés dans l'étape 3, on montre que $r \mapsto 1 \lim (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$ donne le terme de droite de l'équation (2.5) et que $r \mapsto 0 \lim (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$ donne les termes de droite de l' équation (2.11) suivant les hypothèses que l'on fait sur k et l.

3.3.6 Étape 5

On y montre que $\lim_{r\to 1} (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$ et que $\lim_{r\to 0} (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$ corespondent respectivement aux termes de gauche des équations (2.5) et (2.11). Détaillons maintenant le contenu des étapes.

3.4. Étape 0

Ce calcul a déjà été fait dans [22]. Il est formellement le même ici. On obtient comme expression du premier terme :

$$
T_1(l+1,k+1)(r) = \sum_{s'=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \beta_{l-s} \bar{\beta}_{k-s} r^{|s-s'|} \frac{1 - r^{2\min(s+1,s'+1)}}{1-r^2}.
$$

Nous en déduisons immédiatement les deux limites suivantes :

$$\lim_{r\to 1} T_1(l+1,k+1)(r) = \sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k} \beta_{l-s}\bar{\beta}_{k-s}\min(s'+1,s+1)$$

et

$$\lim_{r\to 0} T_1(l+1,k+1)(r) = \sum_{s=0}^{k} \beta_{l-s}\bar{\beta}_{k-s} \text{ si } k \leqslant l.$$

3.5. Étape 1

Évaluons $x_k = \pi_+\Big(\bar{\Phi}_N\pi_+(\frac{\chi^k}{\bar{g}})\Big)$. De l'égalité $g=(1-\chi)f_1$, on a immédiatement en utilisant la notation introduite dans (3.2) :

$$\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) = \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\bar{\chi}^{N+2}\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_u\bar{\chi}^u$$

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_u\pi_+\Big(\bar{\chi}^{N+2+u}(\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi})\Big)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\pi_+\left(\chi^{-p}\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p<0}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{\chi^{s+1-p}-r^{s+1}\chi^{-p}}{1-r\chi}\\
&+ \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p=0}^{s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{\chi^{s+1-p}-r^{s+1+p}}{1-r\chi}\\
&+ \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p>s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{r^{p-(s+1)}-r^{s+1+p}}{1-r\chi}.
\end{aligned}$$

Posons $x_k = B_{N,k,r}+R_{N,k,r}+y_{N,k,r}$ avec :

$$B_{N,k,r} = \frac{A_{k,N,r}}{1-r\chi};$$

$$R_{N,k,r} = a_{2,N}(\chi)\sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\frac{\chi^{(s+1)}-r^{s+1}}{1-r\chi};$$

$$y_{N,k,r} = \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \sum_{p=0}^{s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \frac{\chi^{s+1-p} - r^{s+1-p}}{1 - r\chi};$$

et où l'on a posé :

$$A_{N,k,r} = \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \Big(\sum_{p=0}^{s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} (r^{s+1-p} - r^{s+1+p})$$

$$+ \sum_{p>s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} (r^{p-(s+1)} - r^{s+1+p}) \Big) \tag{3.3}$$

$$a_{2,N}(\chi) = \sum_{p<0} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \chi^{-p}.$$

Lemme 3.8. — *Les vecteurs $y_{N,k,r}$ et $B_{N,k,r}$ sont orthogonaux dans $L^2(\mathbb{T})$.*

Preuve. — Par un calcul direct,

$$\langle \frac{1}{1 - r\chi}, y_{N,k,r} \rangle = y_{N,k,r}(r) = 0. \quad \square$$

Lemme 3.9. — *Le vecteur $y_{N,k,r}$ appartient au noyau de $H_{\tilde{\Phi}_N}$.*

Preuve. — On a immédiatement

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(y_{N,k,r}) =$$

$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{p=0}^{s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u \pi_- \Big(\frac{(1 - r\chi)(\chi^{s+1-p} - r^{s+1-p})\chi^{N+u+1}}{||1 - r\chi||^2} \Big) = 0. \quad \square$$

Lemme 3.10. — *Le vecteur $B_{N,k,r}$ est un vecteur propre de l'opérateur $H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$ associé à la valeur propre $r^{2(N+2)} \Big| \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r^u \Big|^2$.*

Preuve. — On trouvera la preuve de ce lemme dans [24] ou dans [22] $\square$

Lemme 3.11. — *On a pour tout $\rho \in]1, R[$:*

$$\Big| \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r^u \Big|^2 = \frac{f_1(r) \bar{f}_1(r)}{\bar{f}_1(\frac{1}{r}) f_1(\frac{1}{r})} + O(\frac{1}{\rho^N}).$$

Par ailleurs

$$\lim_{r\mapsto 1} \frac{d}{dr}\left(\frac{f_1(r)\bar f_1(r)}{\bar f_1(\frac{1}{r})f_1(\frac{1}{r})}\right) = 2\mathcal{A}(f_1),$$

$\mathcal{A}(f_1)$ *étant défini dans l'énoncé du théorème 2.1*

Preuve. — Cette preuve est directe à partir de l'équation $\sum_{u\in\mathbb{Z}} \gamma_u r^u = \frac{f_1(r)}{\bar f_1(\frac{1}{r})}$. On peut la trouver dans [24], pages 19 et 20. □

Lemme 3.12. — *Pour tout* $\rho \in]0,R[$,

(i) Quand r tend vers 0,

(a) $$||B_{N,k,r}||_2 = \begin{cases} O(\frac{1}{\rho^{N+2-[Nx]}}) & \text{si } k=[Nx], 0<x<1 \\ O(1) & \text{si } k\sim N \end{cases}$$

(b) $$||y_{N,k,r}||_2 = \begin{cases} O(\frac{1}{\rho^{N+2-[Nx]}}) & \text{si } k=[Nx], 0<x<1 \\ O(1) & \text{si } k\sim N. \end{cases}$$

(ii) Quand r tend vers 1

(a) $||B_{N,k,r}||_2 \leqslant C\sqrt{1-r^2}N$ *où C est une constante indépendante de N.*

(b) $$||y_{N,k,r}||_2 = \begin{cases} O(\frac{1}{\rho^{N+2-[Nx]}}) & \text{si } k=[Nx], 0<x<1 \\ O(1) & \text{si } k\sim N \end{cases}$$

(iii) $\forall r\in[0,1]\forall k\in[0,N]\bigcap\mathbb{N}\ \ ||R_{N,k,r}||_2 = O(\frac{1}{\rho^N})$.

Preuve. — Afin d'évaluer les produits scalaires qui interviennent dans le second terme nous devons estimer les normes de $B_{N,k,r}, R_{N,k,r}, y_{N,k,r}$. Notons que :

$$\lim_{r\to 1}\frac{A_{N,k,r}}{1-r^2} = \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\Big(\sum_{p=0}^{s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}p + (s+1)\sum_{p>s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}\Big).$$

Cette dernière quantité est au plus d'ordre k, et donc de N. Nous pouvons écrire, si r assez proche de 1, $\|B_{N,k,r}\|_2^2 = \left(\frac{A_{N,k,r}}{1-r^2}\right)^2(1-r^2) \leqslant C(1-r^2)N^2$ où C est une constante indépendante de N. D'autre part il est facile de vérifier en utilisant le lemme 3.7 que si r assez proche de 0, alors pour tout $\rho_1 \in]0,R[$ $\|B_{N,k,r}\|_2 = O(\frac{1}{\rho_1^{N+2-[Nx]}})$ si $k = [Nx]$, $0 < x < 1$, et $\|B_{N,k,r}\|_2 = O(1)$ si $k \sim N$. D'autre part :

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leqslant \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left\| \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \frac{\chi^{(s+1)} - r^{s+1}}{1 - r\chi} \right\|_2 ;$$

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leqslant \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left| \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\bar{\beta}_{k-s'} r^{|s-s'|} \frac{1 - r^{2\inf(s+1,s'+1)}}{1 - r^2} \right|^{1/2}$$

d'où, si r est assez proche de 1,

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leqslant \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left(\sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{k} |\beta_{k-s}\beta_{k-s'}| \inf(s+1, s'+1) \right)^{1/2},$$

ou

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leqslant \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty k^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{k} |\beta_{k-s}\beta_{k-s'}| \right)^{1/2}.$$

C'est-à-dire que quelque soit r dans [0,1] et quelque soit $\rho_2 \in]0,R[$: $\|R_{N,k,r}\|_2 = O(\frac{1}{\rho_2^N})$ et ceci pour tout $k \in [0,N]$.
Pour terminer cette démonstration, il nous reste à estimer $\|y_{N,k,r}\|_2$.
Dans le cas où r est proche de 1, alors $\|y_{N,k,r}\|_2 = O\big(\frac{1}{\rho_3^{N+2-[Nx]}}\big)$ pour tout $\rho_3 \in]0,R[$ si $k = [Nx]$. Lorsque $k \sim N$, $\|y_{N,k,r}\|_2 = O(1)$. En effet,

$$\|y_{N,k,r}\|_2 \leqslant \sum_{s=0}^{N} |\bar{\beta}_{N-s}| \sum_{p=0}^{N} |\gamma_{p-(N+2)}| \frac{1 - r^{2(s+2-p)}}{1 - r^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{r\mapsto 1} \|y_{N,k,r}\|_2 &\leqslant \sum_{s=0}^{N} |\bar{\beta}_{N-s}| \sum_{p=0}^{N} |\gamma_{p-(N+2)}||N+2-p| \\ &\leqslant \sum_{s=0}^{\infty} |\beta_s| \ \left|\big(\sum_{\mathbb{Z}} |\gamma_u|\chi u\big)'(1)\right| \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Dans le cas où r est proche de 0, alors $\|y_{N,k,r}\|_2 = O\big(\frac{1}{\rho_4^{N+2-[Nx]}}\big)$ pour tout $\rho_4 \in]0,R[$ si $k = [Nx]$, alors que $\|y_{N,k,r}\|_2 = O(1)$ si $k \sim N$. $\square$

3.6. Étape 2

Pour calculer le deuxième terme de la formule d'inversion il faut calculer le produit scalaire :

$$\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(B_{N,k,r} + R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), B_{N,l,r} + R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle .$$

Nous avons la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}\ ,\ B_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad + \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}\ ,\ R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad + \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), B_{N,l,r} \right\rangle \\
&\qquad + \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle
\end{aligned}$$

Nous devons évaluer ces quatre produits scalaires. Dans ce but on approche

$$\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r} \text{ par } \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} B_{N,k,r} \text{ où}$$

$$\tilde{\Phi}_N(\chi) = \frac{1 - r\chi}{1 - r\bar{\chi}} \chi^{N+1} \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u \chi^u .$$

Le but de cette étape est d'estimer le produit scalaire $\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, B_{N,l,r} \right\rangle$. Pour cela, nous allons évaluer la manière dont le produit scalaire

$$\left\langle \left[\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} - \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} \right] (B_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle$$

tend vers 0 quand N tend vers l'infini. La partie principale du deuxième terme sera alors $\left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} (B_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle$ qui est en fait, toujours en utilisant [24] ou [**?**],

$$\frac{A_{k,N,r} \bar{A}_{l,N,r}}{1 - r^2} \frac{1}{1 - r^{2(N+2)} \left| \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r^u \right|^2} . \tag{3.4}$$

L'information clef concerne le contrôle de la quantité $||(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} - (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}||_2$. Nous ferons désormais jusqu'à l'étape 5 l'hypothèse suivante :

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \gamma_u = 1 \tag{3.5}$$

Remarquons que si que si f_1 est réelle, alors l'hypothèse (3.5) est vérifiée car elle équivaut à $f_1(1) \in \mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on retrouve cette hypothèse quitte à multiplier f_1 par un nombre complexe. A la fin de l'étape 5, nous montrerons alors que l'on obtient le résultat annoncé par le théorème 2.3 même lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée.

PROPOSITION 3.13. — *Posons* $\varepsilon_1(N) = \sum_{u<-N} |\gamma_u|$ *et* $\mathcal{A} = ||(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} - (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}||$.
Alors, pour N *assez grand,*

1. *Quand* r *tend vers* 1, $\mathcal{A} \leqslant \frac{C}{N^2}$ *où* C *est une constante ne dépendant pas de* N.
2. *Quand* r *tend vers* 0, $\mathcal{A} \leqslant \dfrac{2\varepsilon_1}{(1-2\varepsilon_1)^2}$.

Preuve. — Pour cela évaluons les différences $||(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^m - (H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^m||$ (nous savons que les sommes de Von Neumann correspondantes sont convergentes en norme). D'après le lemme 3.5, nous devons évaluer $\|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\|$. Nous avons :

$$\|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H_{\Phi_N}(H^*_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N}) + H^*_{\tilde{\Phi}_N}(H_{\Phi_N} - H_{\tilde{\Phi}_N})\|,$$

cette dernière quantité étant inférieure à $2\varepsilon_1(N)$ puisque $\|H_{\Phi_N}\| < 1$ et $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N}\| < 1$. Nous avons donc finalement $\|H_{\Phi_N} - H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H^*_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N}\| \leqslant \varepsilon_1(N)$, après un calcul direct à partir de l'expression des $\tilde{\Phi}_N$, ce qui donne, d'après le lemme 3.7

$$\|H_{\Phi_N} - H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H^*_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N}\| = O(\frac{1}{\rho^N}),$$

pour tout $\rho \in]0, R[$. $\square$

Évaluons maintenant $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\|$.

LEMME 3.14. — *Soit* $a_e(N,r) = \sum_{u\geqslant -N} \gamma_u r^u$. *Alors* $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| \leqslant |a_e(N,r)| r^{N+2}$

Preuve. — Remarquons d'abord que $H_{\tilde{\Phi}_N}(\psi) = \pi_-(\pi_-\tilde{\Phi}_N\psi) + \pi_-(\pi_+\tilde{\Phi}_N\psi)$ et que :

$$\pi_-(\tilde{\Phi}_N) \quad = \quad \pi_-\left(\frac{1-r\chi}{1+r\bar{\chi}} \sum_{u\geqslant -N} \gamma_u \chi^{u+N+1}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{u \geqslant -N} \gamma_u \pi_- \left(\left(-r\chi + \frac{1-r^2}{1+r\bar{\chi}} \right) \chi^{u+N+1} \right) \\ &= \left(\sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r^u \right) (1-r^2) r^{N+2} \frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} \\ &= r^{N+2}(1-r^2) \frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} a_e(N,r). \end{aligned}$$

On peut encore écrire :

$$\pi_-(\tilde{\Phi}_N) = a_e(N,r) r^{N+2} \left(\frac{1-r^2}{1-r\bar{\chi}} - r\chi \right) \bar{\chi} + a_e(N,r) r^{N+3}$$

Comme $a_e(N,r)r^{N+2} \in H^{2+}$ nous avons : $H_{\pi_-(\tilde{\Phi}_N)} = H_{\theta_N}$ avec

$$\theta_N(\chi) = a_e(N,r) r^{N+2} \left(\frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}} \right).$$

Donc :

$$\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| \leqslant \|H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H_{\theta_N}\| \leqslant |a_e(N,r)| r^{N+2} \qquad \square$$

L'évaluation précise de $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\|$ donnée ci dessus implique une paramétrisation de r en fonction de N qui permettra de contrôler la décroissance de $\mathcal{A}$ vers 0 quand $N \to \infty$. on a en effet, d'après le lemme 3.5 :

$$\mathcal{A} \leqslant 2 \sum_{m=0}^{\infty} m(|a_e(N, r(N))| r^{N+2} + 2\varepsilon_1(N))^{m-1} \varepsilon_1(N) \tag{3.6}$$

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{2\varepsilon_1(N)}{(1 - |a_e(N,r)| r^{N+2} - 2\varepsilon_1(N))^2}.$$

posons

$$r(N) = 1 - 2\sqrt{\varepsilon_1(N)} \tag{3.7}$$

et remarquons que si $0 \leqslant m \leqslant N$ alors $r(N)^{-m} \sim 1 + 2m\sqrt{\varepsilon_1(N)}$. Considérons maintenant l'inégalité suivante :

$$\Big| |a_e(N, r(N))| - 1 \Big| \leqslant \Big| |\sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r(N)^u| - |\sum_{u \geqslant -N} \gamma_u| \Big| + \Big| |\sum_{u \geqslant -N} \gamma_u| - 1 \Big|. \tag{3.8}$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.5) et de la définition de $\varepsilon_1(N)$ donnée dans la proposition 3.13, le terme de droite de l'inégalité (3.8) est inférieur à

$$\sum_{u \geqslant -N} |\gamma_u| |r(N)^u - 1| + \varepsilon_1(N),$$

par l'inégalité triangulaire inverse. On peut encore écrire :

$$\Big| |a_e(N, r(N))| - 1 \Big| \leqslant \sum_{u \geqslant -N} u|\gamma_u||1 - r(N)| + \varepsilon_1(N),$$

d'après le théorème des accroissements finis. C'est-à-dire

$$\Big| |a_e(N, r(N))| - 1 \Big| \leqslant \bar{C}\sqrt{\varepsilon_1(N)}$$

où $\bar{C}$ est une constante indépendante de N. A partir de là montrons l'inégalité suivante :

$$|a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} + 2\varepsilon_1(N) < 1 \tag{3.9}$$

Celle-ci est une conséquence de l'inégalité

$$|a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} + 2\sqrt{\varepsilon_1(N)} < 1, \tag{3.10}$$

car $\varepsilon_1(N) < 1$ lorsque N est assez grand. Démontrons donc (3.10). La relation (3.10) est équivalente à $|a_e(N, r(N))| r(N)^{N+1} < 1$ ce qui donne encore, en prenant le logarithme $\operatorname{Log}|a_e(N, r(N))| + (N+1)\operatorname{Log}(r(N)) < 0$. Mais $(N+1)\operatorname{Log}(r(N)) \sim -2(N+1)\sqrt{\varepsilon_1(N)}$ et $\operatorname{Log}|a_e(N, r(N))| \leqslant \bar{C}\sqrt{\varepsilon_1(N)}$ et les calculs ci-dessus ont bien un sens, car $\operatorname{Log}|a_e(N, r(N))| + (N+1)\operatorname{Log}(r(N))$ est inférieur à $(\bar{C} - 2(N+1))\sqrt{\varepsilon_1(N)}$, qui est négatif pour N assez grand. Ceci achève la démonstration de l'inégalité (3.10) et par conséquent de (3.9).

D'autre part

$$\frac{2\varepsilon_1(N)}{(1 - |a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} - 2\varepsilon_1(N))^2.} \sim \frac{2\varepsilon_1(N)}{\varepsilon_1(N) N^2.} = \frac{2}{N^2},$$

On en déduit que $\mathcal{A} \leqslant \frac{C}{N^2}$, où C est une constante indépendante de N, si r se rapproche de 1 d'une manière bien choisie et ceci pour tout $\rho \in]0, R[$. Dans le cas où r tend vers 0, l'inégalité (3.6) montre que $\mathcal{A} < \frac{2\varepsilon_1}{(1-2\varepsilon_1)^2}$ □

Corollaire 3.15 (Estimation du premier reste). — *Posons* $\mathcal{R}_1(k, l) = \left\langle \left(\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} - \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right) \right)^{-1} B_{N,k,r}, B_{N,l,r} \right\rangle.$ *Alors, il existe* $\rho \in]0, R[$ *tel que pour* N *assez grand,*

$$\Big| \mathcal{R}_1(k, l) \Big| = O\left(\frac{1}{\rho^N}\right)$$

Cette estimation est valable quand r *tend vers* 0 *et quand* r *tend vers* 1.

Preuve. — C'est une conséquence directe du lemme 3.12 et de la proposition 3.13 □

Remarque 3.16. — L'estimation précédente montre que $\mathcal{R}_1(k,l)$ tend vers 0 comme $\frac{1}{\rho^N}$ et cela suffit pour notre propos même si en faisant des hypothèses sur k et l, on pourrait obtenir une estimation plus précise. Par exemple, si $k \sim N$ et $l = [Ny], 0 < y < 1$, on montre que $\mathcal{R}_1(k,l) = O(\frac{1}{\rho^{2(N+1)-[Ny]}})$ et ceci pour tout $\rho \in]0, R[$. Cette même remarque peut être faite pour l'estimation de tous les autres restes.

Corollaire 3.17 (Estimation du premier produit scalaire). — *On a*

$$\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, B_{N,l,r} \right\rangle = \frac{A_{k,N,r}A_{l,N,r}}{1-r^2} \frac{1}{1 - r^{2(N+2)} \left|\sum_{u \geqslant -N} \gamma_u r^u\right|^2} + \mathcal{R}_1(k,l)$$

où $\mathcal{R}_1(k,l)$ est estimé dans le précédent corollaire quand r tend respectivement vers 0 *et* 1.

3.7. Étape 3

Nous devons maintenant évaluer les trois produits scalaires intervenant dans le deuxième terme. Cette estimation est un corollaire des lemmes 3.8, 3.9, 3.10, 3.12 et proposition 3.13.

Corollaire 3.18 (Autres restes). — *Posons*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(k,l) &= \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \\
\mathcal{R}_3(k,l) &= \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), B_{N,l,r} \right\rangle \\
\mathcal{R}_4(k,l) &= \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle
\end{aligned}$$

Alors pour un certain $\rho \in]0, R[$, on a :

(i) Quand r tend vers 0

$$\begin{cases} \left|\mathcal{R}_2(k,l)\right| \leqslant O(1), \ \left|\mathcal{R}_3(k,l)\right| \leqslant O(1), \ \left|\mathcal{R}_4(k,l)\right| \leqslant O(1) \ \textit{si } k \sim N \textit{ et } l \sim N \\ \left|\mathcal{R}_2(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}), \ \left|\mathcal{R}_3(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}), \ \left|\mathcal{R}_4(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}) \ \textit{sinon} \end{cases}$$

(ii) Quand r tend vers 1

$$\begin{cases} \left|\mathcal{R}_2(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}),\ \left|\mathcal{R}_3(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}), & \textit{Pour tout } k,l \in [O,N]\bigcap \mathbb{N} \\ \left|\mathcal{R}_4(k,l)\right| \leqslant O(1), & \textit{si } k \sim N \textit{ et } l \sim N \\ \left|\mathcal{R}_4(k,l)\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N}), & \textit{si } k \not\sim N \text{ ou } l \not\sim N. \end{cases}$$

Preuve. —
Estimation de $\mathcal{R}_2$.
En décomposant l'opérateur $(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1}$ comme dans l'étape 2, par l'intermédiaire de l'opérateur tronqué, on obtient avec la notation de la proposition 3.13 la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}_2\right| \leqslant & \underbrace{\mathcal{A}||B_{N,k,r}||_2\big(||R_{N,l,r}||_2 + ||y_{N,l,r}||_2\big)}_{\tau_1} \\ & + \underbrace{\left|\langle (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1} B_{n,k,r}, R_{N,l,r} + y_{N,l,r}\rangle\right|}_{\tau_2} \end{aligned}$$

Supposons d'abord que r tende vers 1. Alors d'après le lemme 3.12, la proposition 3.13 et l'équation (3.7) on montre directement que τ_1 est majoré par $\frac{1}{N}O(\frac{1}{\rho^N})$. Quant à τ_2, il se réduit à $\left|\langle (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1} B_{n,k,r}, R_{N,l,r}\rangle\right|$ d'après les lemmes 3.8 et 3.10 ; il se majore alors par un terme $O(\frac{1}{\rho^N})$ pour un certain ρ. Donc il existe bien $\rho \in]0,R[$ tel que $\mathcal{R}_2$ soit majoré par $O(\frac{1}{\rho^N})$.
Supposons maintenant que r tende vers 0. D'après le lemme 3.12, lorsque $k \sim N$ et $l \sim N$, alors $||B_{N,k,r}||_2 = O(1)$ et $||y_{N,l,r}||_2 = O(1)$. On en déduit que $\tau_1 = O(\frac{1}{\rho^N})$ pour un certain ρ, compte tenu de la proposition 3.13) et du lemme 3.7. Sous les mêmes hypothèses sur k et l, on obtient une majoration de $|\tau_2|$ à partir de l'inégalité $||I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-|a_e(N,r)r^{N+2}}$ déduite du lemme 3.14. Ceci montre que $|\tau_2|$ est majoré par un terme en $O(1)$. En fin de compte quand r tend vers 0 et sous les hypothèses $k \sim N$, $l \sim N$ on a : $\mathcal{R}_2 \leqslant O(1)$.
Estimation de $\mathcal{R}_3$.
Compte tenu du fait que l'opérateur $H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$ est un endomorhisme autoadjoint de H^+, les majorations de $\mathcal{R}_3$ sont identiques à celles de $\mathcal{R}_2$
Estimation de $\mathcal{R}_4$.
On procède comme pour $\mathcal{R}_2$. A partir de la décomposition de $(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{R}_4\right| \quad \leqslant & \underbrace{\mathcal{A}\big(||R_{N,k,r}||_2 + ||y_{N,k,r}||_2\big)\big(||R_{N,l,r}||_2 + ||y_{N,l,r}||_2\big) + ||y_{N,l,r}||_2\big)}_{\zeta_1} \\ & + \underbrace{\left|\langle (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}\big(R_{n,k,r} + y_{N,k,r}\big), R_{N,l,r} + y_{N,l,r}\rangle\right|}_{\zeta_2} \end{aligned}$$

Supposons d'abord que r tende vers 1. Envisageons deux cas :

(i) $k \sim N,\ l \sim N$.
Le lemme 3.12 et la proposition 3.13 montrent que $|\zeta_1| \leqslant \frac{O(1)}{N^2}$. Le terme ζ_2 se décompose en quatre termes, décomposition que l'on peut écrire compte tenu du lemme 3.9 et du fait que $(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}$ soit auto-adjoint :

$$\begin{aligned}\zeta_2 \quad &= \langle y_{N,k,r}, y_{N,l,r} \rangle + \langle R_{N,k,r}, y_{N,l,r} \rangle \\ &\quad + \langle y_{N,k,r}, R_{N,l,r} \rangle + \langle \big(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\big)^{-1} R_{N,k,r}\ ,\ R_{N,l,r} \rangle.\end{aligned}$$

Le premier terme est dominant, en $O(1)$. On en déduit sous les hypothèses précédentes que $\left|\mathcal{R}_4\right| \leqslant O(1)$.

(ii) $k \not\sim N$ ou $l \not\sim N$
Dans ce cas, compte tenu du lemme 3.12 et de la proposition 3.13, on a $|\zeta_1| \leqslant \frac{1}{N^2} O(\frac{1}{\rho^N})$. Par ailleurs dans ζ_2 on a dans tous les cas un terme dominant en $O(\frac{1}{\rho^N})$. On conclut sous ces hypothèses que $\left|\mathcal{R}_4\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N})$.

Supposons maintenant que r tende vers 0.

(i) $k \sim N,\ l \sim N$.
On sait par la proposition 3.13 et le lemme 3.7 que $\mathcal{A} \leqslant O(\frac{1}{\rho^N})$. Ceci montre en utilisant le lemme 3.12) que pour un certain $\rho \in]1, R[$ que $|\zeta_1| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N})$. Dans ζ_2 le terme dominant est en $O(1)$. Dans ce cas on a bien $\left|\mathcal{R}_4\right| \leqslant O(1)$.

(ii) $k \not\sim N$ ou $l \not\sim N$
En procédant exactement comme dans le cas précédent on obtient l'existence de $\rho \in]1, R[$ tel que $\left|\mathcal{R}_4\right| \leqslant O(\frac{1}{\rho^N})$. $\square$

3.8. Étape 4

En faisant le bilan des étapes précédentes, nous pouvons obtenir une estimation des quantités $\lim\limits_{r \to 1} (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$ et $\lim\limits_{r \to 0} (T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1}$. Enonons ces résultats sous forme de deux propositions.

Proposition 3.19. —

$$\lim_{r\mapsto 1}(T_N f_r)^{-1}_{k+1,l+1} = a_{lk} - \frac{d(k)\bar{d}(l)}{N+2+\mathcal{A}(f_1)} + \begin{cases} O(1) & \textit{si } k\sim N \text{ ou } l\sim N \\ O\big(\frac{1}{\rho^N}\big) & \textit{sinon} \end{cases}$$

Les termes a_{lk}, $d(k)$ et $d(l)$ sont définis dans le théorème 2.1.

Preuve. — Les corollaires 3.15 et 3.18 permettent de faire le bilan des restes. On obtient :

$$\big|\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_3+\mathcal{R}_4\big| \leqslant \begin{cases} O(1) & \text{si } k\sim N \text{ ou } l\sim N \\ O(\frac{1}{\rho^N}) & \text{pour un certain } \rho\in]1,R[\text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Il est maintenant clair, à partir de l'équation (3.4), que la limite de la partie principale du deuxième terme quand r tend vers 1 est égale à

$$\lim_{r\mapsto 1}\frac{A_{k,n,r(N)}\bar{A}_{l,n,r(N)}}{(1-r(N)^2)^2}\,\frac{1-r(N)^2}{1-r(N)^{2(N+2)}|a_e(N,r(N))|^2}$$

Nous déduisons tout de suite du lemme 3.11 que

$$\lim_{r\mapsto 1}\frac{1-r(N)^2}{1-r(N)^{2(N+2)}|a_e(N,r(N))|^2} = \frac{1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)} + O(\frac{1}{\rho^N}).$$

Examinons maintenant la limite $\lim_{r\mapsto 1}\frac{A_{k,N,r}}{1-r(N)^2}$. Nous envisagerons pour cela deux cas.

i) $k=[Nx],\ 0\leqslant x<1$.
On peut écrire à partir de l'expression de $A_{k,N,r}$ donnée dans l'équation (3.3) : $\lim_{r\mapsto 1}\frac{A_{k,N,r}}{1-r(N)^2} = \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\Big(\sum_{p=0}^{s+1}p\bar{\gamma}_{p-(N+2)}+\sum_{p\geqslant s+2}(s+1)\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\Big)$

$$= \sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar{\beta}_{k-s}\Big(1-\sum_{p<s+2}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\Big) + \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\Big(\Big(\sum_{p=0}^{s+1}p\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\Big)$$

$$= \sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar{\beta}_{k-s} + O(\frac{1}{\rho^N}) \text{ compte tenu du lemme 3.7.}$$

ii) $k\sim N$.
On peut écrire, en repenant la première des égalités ci-dessus,

$$\lim_{r\mapsto 1}\frac{A_{k,N,r}}{1-r(N)^2}$$
$$=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\Big(\sum_{p=0}^{s+1}(p-(s+1))\bar\gamma_{p-(N+2)}+(s+1)\sum_{p=0}^{+\infty}\bar\gamma_{p-(N+2)}\Big)$$
$$=\sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar\beta_{k-s}+O(\frac{1}{\rho^N})+\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\underbrace{\Big(\sum_{p=0}^{s+1}(p-N)\bar\gamma_{p-(N+2)}\Big)}_{O(1)}$$
$$+\underbrace{\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{p=0}^{s+1}(N-(s+1))\bar\gamma_{p-(N+2)}}_{\xi_k}.$$

De plus

$$\xi_k=\sum_{s=0}^{k}(k-(s+1))\sum_{p=0}^{s+1}\bar\beta_{k-s}+(N-k)\sum_{s=0}^{k}(N-k)\sum_{p=0}^{s+1}\bar\beta_{k-s}\quad(3.11)$$

Le premier terme de la somme (3.11) est clairement en $O(1)$. Pour le second il faut encore distinguer deux cas :

1) $\frac{k}{N}-1=o(\frac{1}{N})$. Dans ce cas le second terme de (3.11) est en $o(1)$.
2) $N-k=O(N^\alpha)$ où $0<\alpha<1$. Dans ce cas, grce au lemme 3.7, le second terme est en $O(\frac{1}{\rho^N})$ pour un certain $\rho\in]1,R[$

On vérifie sans peine que le terme $\sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar\beta_{k-s}$ a l'expression intrinsèque donnée par l'équation (2.10) à un reste d'ordre $O(\frac{1}{\rho^N})$ près. La limite du premier terme étant déterminée dans l'étape 0, on conclut. □

Proposition 3.20. — *Supposons que* $0<k\leqslant l<N$. *Il existe* $\rho\in]1,R[$ *tel que*

$$\lim_{r\mapsto 0}(T_Nf_r)^{-1}_{k+1,l+1}=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\beta_{l-s}+\begin{cases}O(1) & si\ k\sim N\ et\ l\sim N,\\ O(\frac{1}{\rho^N}) & sinon.\end{cases}$$

Preuve. — Le seul point que l'on doit encore contrler est $\lim_{r\to 0}A_{k,N,r}$. On a immédiatement

i) Si $k=[Nx]$ avec $0<x<1$ cette limite est en $O(\frac{1}{\rho^N})$ pour un certain $\rho\in]1,R[$.

ii) Si $k\sim N$, alors cette limite et en $O(1)$.

On conclut, en tenant compte de l'étape 0. $\square$

3.9. Étape 5

Nous allons maintenant chercher la limite de $T_N f_r$ quand r tend vers 0 ou 1. Signalons tout d'abord que l'étape 4 permet d'énoncer le lemme suivant.

Corollaire 3.21. — *Il existe une constante C, ne dépendant pas de N, telle que*

$$\left| \left[T_N(f_{r(N)})^{-1} \right]_{k+1,l+1} \right| < CN, \quad 0 \leqslant k \leqslant l \leqslant N$$

Le calcul de la limite est évident quand r tend vers 0. La limite en 1 est moins évidente. Remarquons cependant que nous avons

$$T_N f_{r(N)} - T_N f = (r(N)-1) T_N(f) + (r(N)-1)^2 T_N f_1.$$

En effet :

$$\hat{f}_{r(N)}(k) - \hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} \left(|1 - r(N) e^{i\theta}|^2 - |1 - e^{i\theta}|^2 \right) f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \hat{f}_{r(N)}(k) - \hat{f}(k) &= (r(N)-1) \int_0^{2\pi} (r(N) + 1 - 2\cos\theta) f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta \\ &= (r(N)-1) \int_0^{2\pi} \left((2 - 2\cos\theta) f_1(\theta) e^{ik\theta} + (r(N)-1) f_1(\theta) e^{ik\theta} \right) d\theta \\ &= (r(N)-1) \int_0^{2\pi} |1 - e^{i\theta}|^2 f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta + (r(N)-1)^2 \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_N(f) = \frac{1}{r(N)} T_N\Big(f_{r(N)}\Big) - \frac{(r(N)-1)^2}{r(N)} T_N\Big(f_1\Big)$$

ou encore, avec l'équation (3.7)

$$T_N(f) = \frac{1}{r(N)} T_N\Big(f_{r(N)}\Big) \left(I - 4\varepsilon_1(N) \Big[T_N\Big(f_{r(N)}\Big) \Big]^{-1} T_N(f_1) \right)$$

D'où l'on déduit directement :

$$\left\|I - T_N\big(f_{r(N)}\big)\Big[T_N(f)\Big]^{-1}\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(N)^n,$$

où $\alpha(N) = \left\|4\varepsilon_1(N)T_N\Big[\big(f_{r(N)}\big)\Big]^{-1}T_N(f_1)\right\| \leqslant CN\varepsilon_1(N)0(1)$. Ainsi,

$$\left\|I - T_N\big(f_{r(N)}\big)T_N(f)^{-1}\right\| \leqslant \alpha(N)O(1) \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

Il reste à montrer que l'hypothèse auxiliaire $\sum_{u\in\mathbb{Z}} \gamma_u = 1$ ne restreint pas la généralité des démonstrations des théorèmes 2.1 et 2.6. Cette hypothèse signifie que $\lambda = f_1(1)$ est un réel. Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, alors $\bar{\lambda} f_1(1)$ est un réel. Dans ce cas, le symbole $\tilde{f} = |1-\chi|^2\left|\lambda f_1\right|^2$ vérifie l'hypothèse auxiliaire. Des égalités

$$\Big[T_N(\tilde{f})\Big]^{-1} = \left|\frac{1}{\lambda}\right|^2\Big[T_N(f)\Big]^{-1},$$

et

$$T_N(\tilde{f})^{-1}_{l+1,k+1} = \tilde{a}_{kl} - \frac{\tilde{d}(k)\bar{\tilde{d}}(l)}{N+2+\tilde{\mathcal{A}}(f_1)} + R_{kl}$$

(cette dernière constituant l'égalité du théorème 2.1), avec

$$\tilde{a}_{kl} = a_{lk},\ \tilde{d}(k) = \frac{d(k)}{\lambda},\ \tilde{\mathcal{A}}(f_1) = \mathcal{A}(f_1),$$

on déduit

$$\Big[T_N(f)\Big]^{-1}_{l+1,k+1} = a_{lk} - \frac{d(k)\bar{d}(l)}{N+2+\tilde{A}(f_1)} + R_{kl},$$

R_{kl} constituant le reste du théorème 2.3. même justification pour le théorème 2.6. Ceci achève l'étape 5.

3.10. Preuve de la remarque 2.5

Rappelons que

$$a_{k,l} = \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'}\min(s+1,s'+1)$$

$$b(k) = \sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar{\beta}_{k-s}$$

Posons, pour tout l , $0 \leqslant \ell \leqslant N$, $S_l = \sum_{s=0}^{l} \beta_{l-s}$. Si $k < l$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=s}^{l} (s+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &+ \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{s-1} (s'+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &= \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{l} (s+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &+ \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{s-1} (s'-s)\beta_{k-s}\beta_{l-s'} \end{aligned}$$

Posons $s = k - j$ and $s' = u$; on écrit :

$$a_{k,l} = S_l \sum_{j=0}^{k} (k+1-j)\bar{\beta}_j + \sum_{j=0}^{k} \sum_{u=0}^{k-1-j} (u-k+j)\bar{\beta}_j\beta_{l-u}$$

Le premier terme de la somme s'écrit

$$(k+1)\Big|\frac{1}{f_1(1)}\Big|^2 + \Big|\frac{1}{f_1(1)}\Big|^2 \overline{\Big(\frac{f_1'(1)}{f_1(1)}\Big)} + O(\frac{1}{\rho^N}).$$

Le deuxième terme se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \sum_{u=0}^{k-1-j} (u-k+j)\bar{\beta}_j\beta_{l-u} &= \sum_{j=0}^{[N\varepsilon]} \sum_{u=0}^{k-1-j} (u-k+j)\bar{\beta}_j\beta_{l-u} \\ &+ \sum_{j=[N\varepsilon]+1}^{k} \sum_{u=0}^{k-1-j} (u-k+j)\bar{\beta}_j\beta_{l-u} \end{aligned}$$

où $\varepsilon < x < y$. On voit que chacun des deux termes de la décomposition est en $O(\frac{1}{\rho^N})$ pour un réel $\rho \in]1, R[$.

4. Démonstration de la formule de trace

Les coefficients donnés par le théorème 2.1 se décomposent naturellement en une somme de deux termes. Le principe de cette démonstration et de la suivante est de calculer successivement la somme du premier terme et du second terme.

4.1. Contribution du premier terme

Avec k comme dans le principal théorème le premier terme est

$$\begin{aligned} a_{kk} &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{k} \bar\beta_{k-s}\beta_{k-s'} \min(s+1, s'+1) \\ &= \sum_{u=0}^{k}\sum_{u'=0}^{k} \bar\beta_{u}\beta_{u'} \min(k-u+1, k-u'+1) \\ &= \tau_1(k) - \tau_2(k), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tau_1(k) &= (k+1)\sum_{u=0}^{k}\sum_{u'=0}^{k} \bar\beta_{u}\beta_{u'}, \text{ et} \\ \tau_2(k) &= \sum_{u=0}^{k}\sum_{u'=0}^{k} \bar\beta_{u}\beta_{u'} \max(u, u'). \end{aligned}$$

Le terme $\tau_1(k)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1(k)}{k+1} &= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{u'=0}^{\infty} \bar\beta_{u}\beta_{u'} - \underbrace{\sum_{u=k+1}^{\infty}\sum_{u'=k+1}^{\infty} \bar\beta_{u}\beta_{u'}}_{\sigma_1(k)} \\ &- \underbrace{\sum_{u=0}^{k+1}\sum_{u'=k+1}^{\infty} \bar\beta_{u}\beta_{u'}}_{\mu_1(k)} - \underbrace{\sum_{u=k+1}^{\infty}\sum_{u'=0}^{k+1} \bar\beta_{u}\beta_{u'}}_{\nu_1(k)} \end{aligned}$$

Un calcul direct permet d'établir les estimations suivantes

$$\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{u'=0}^{\infty} \bar\beta_{u}\beta_{u'} = \left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2,$$

$$\left|\sigma_1(k)\right| \leqslant \frac{a^2}{R^{2(k+1)}}$$

où a est une constante. De même il existe deux constantes b and c telles que

$$\left|\mu_1(k)\right| \leqslant \frac{b}{R^{(k+1)}} \text{ and } \left|\nu_1(k)\right| \leqslant \frac{c}{R^{(k+1)}}.$$

De même on peut décomposer $\tau_2(k)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\tau_2(k) &= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{u'=0}^{\infty}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u') - \underbrace{\sum_{u=k+1}^{\infty}\sum_{u'=k+1}^{\infty}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u')}_{\sigma_2(k)}\\ &- \underbrace{\sum_{u=k+1}^{\infty}\sum_{u'=0}^{k+1}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u')}_{\mu_2(k)} - \underbrace{\sum_{u=0}^{k+1}\sum_{u'=k+1}^{\infty}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u')}_{\nu_2(k)}.\end{aligned}$$

Il est clair que le terme $C(f_1) = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{u'=0}^{\infty}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u')$ ne dépend que de f_1. Nous avons directement

$$\sigma_2(k) = \sum_{u=k+1}^{\infty} u\bar\beta_u \sum_{u'=k+1}^{u}\bar\beta_{u'} + \sum_{u=k+1}^{\infty}\bar\beta_u\sum_{u'=u+1}^{\infty}u'\beta_{u'}.$$

Nous pouvons donc directement déterminer une constante d, telle que $\left|\sigma_2(k)\right| \leqslant \frac{d}{R^{k+1}}$. Les termes $\mu_2(k)$ et $\nu_2(k)$ sont tous deux du même ordre et peuvent donc se traiter simultanément. Étudions maintenant $\nu_2(k)$. Il vient

$$\left|\nu_2(k)\right| = \sum_{u=0}^{k+1}\sum_{u'=k+1}^{\infty}\bar\beta_u\beta_{u'}\max(u,u') = \sum_{u=0}^{k+1}\bar\beta_u\sum_{u'=k+1}^{\infty}u'\beta_{u'}$$

et donc

$$\left|\nu_2(k)\right| \leqslant \sum_{u=0}^{k+1}|\bar\beta_u|\sum_{u=k+1}^{\infty}\frac{u'}{R^u}.$$

Un calcul rapide permet alors d'établir la majoration

$$\left|\nu_2(k)\right| \leqslant C_1\frac{k+1}{R^k} \text{ pour une constante } C_1.$$

De même :

$$\left|\mu_2(k)\right| \leqslant C_2\frac{k+1}{R^k} \text{ pour une constante } C_2.$$

Si T_1 désigne la contribution du premier terme à la trace on a

$$T_1 = \sum_{k=0}^{N}\tau_1(k) - \sum_{k=0}^{N}\tau_2(k).$$

Un bref calcul permet d'écrire

$$\sum_{k=0}^{N} \tau_1(k) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}\left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2 + R_1 \text{ où } R_1 = O(1)$$

et

$$\sum_{k=0}^{N} \tau_2(k) = (N+1)C(f_1) + R_2 \text{ où } R_2 = O(1).$$

Finalement nous avons $T_1 = \frac{N^2}{2}\left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2 + N\Big(\frac{3}{2}\left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2 - C(f_1)\Big) + O(1)$.

4.2. Contribution du second terme

Cette contribution, notée T_2, est donnée par

$$T_2 = -\frac{1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)} \sum_{k=0}^{N} |d(k)|^2 + o(N).$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} T_2(N) &= -\left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2 \Big(\frac{1}{N} - \frac{2+\mathcal{A}(f_1)}{N^2} + o(\frac{1}{N^2})\Big) \\ &\quad \cdot \Big(\frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} + \frac{(N+1)(N+2)}{2}\mathcal{A}(f_1) + O(N)\Big). \end{aligned}$$

ce qui donne tout calcul fait :

$$T_2(N) = -\left|\frac{1}{f_1}(1)\right|^2 \left(\frac{1}{3}N^2 + \frac{N}{6}(5 + \mathcal{A}(f_1)) + O(1)\right).$$

En conclusion nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\big(T_N(f)^{-1}\big) &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{N^2}{6}\left|\frac{1}{f_1}(1)\right|^2 + N\left(\left|\frac{1}{f_1}(1)\right|^2 (\frac{2}{3} - \frac{\mathcal{A}(f_1)}{6}) - C(f_1)\right) + O(1). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Démonstration du corollaire 2.9

5.1. Contribution du premier terme

Par symétrie nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} a_{k,l} = 2\Re\left(\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{l-1} a_{k,l}\right) + \sum_{k=0}^{N} a_{k,k}.$$

Si $k < l$ il vient

$$\begin{aligned}
a_{k,l} &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{l} \bar\beta_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{s'=0}^{s}\beta_{l-s'}(s'+1) + \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(s+1)\sum_{s'=s+1}^{l}\beta_{l-s'}\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{s'=0}^{s}\beta_{l-s'}(l+1) - \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{s'=0}^{s}\beta_{l-s'}(l-s')\\
&+ \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(k+1)\sum_{s'=s+1}^{l}\beta_{l-s'} - \sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(k-s)\sum_{s'=s+1}^{l}\beta_{l-s'}\\
&= (l+1)\sum_{u=0}^{k}\bar\beta_u\sum_{u'=l-k+u}^{l}\beta_{u'} - \sum_{u=0}^{k}\bar\beta_u\sum_{u'=l-k+u}^{l}u'\beta_{u'}\\
&+ (k+1)\sum_{u=0}^{k}\bar\beta_u\sum_{u'=0}^{l-k+1+u}\beta_{u'} - \sum_{u=0}^{k}u\bar\beta_u\sum_{u'=0}^{l-k+1+u}\beta_{u'}
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement avec $k = [Nx]$, $l = [Ny]$, $x < y$:

$$a_{k,l} = (k+1)\left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2 - \overline{\left(\frac{1}{f_1}\right)'(1)}\frac{1}{f_1(1)} + o(\frac{l}{R^{l-k}}).$$

nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
2\Re\left(\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{l-1} a_{k,l}\right) &= 2\Re(\sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{l-1}((k+1)C_1 + C_2) + o(\frac{l}{R^{l-k}})\\
&= \left(\frac{(2N+1)(N+1)N}{6} + \frac{N(N+1)}{2}\right)C_1\\
&\quad + N(N+1)\Re(C_2) + o(1)
\end{aligned}$$

avec

$$C_1 = \left|\frac{1}{f_1(1)}\right|^2$$

$$C_2 = \overline{\left(\frac{1}{f_1}\right)'(1)}\frac{1}{f_1(1)} + o(\frac{l}{R^{l-k}})$$

et

$$\Re(C_2) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(f_1)C_1.$$

D'autre part un calcul déjà fait dans la démonstration précédente permet d'affirmer que

$$\sum_{k=0}^{N} a_{k,k} = \frac{N^2}{2}\left|\frac{1}{f_1}(1)\right|^2 + N\Big(\frac{3}{2}\left|\frac{1}{f_1}(1)\right|^2 - C(f_1)\Big) + O(1).$$

Si S_1 désigne la contribution du premier terme à la somme nous avons donc

$$S_1 = \frac{N^3}{3}C_1 + \left(\frac{3}{2} + \Re(C_2)\right)N^2 + O(N).$$

Ce qui s'écrit aussi

$$S_1 = C_1\left(\frac{N^3}{3} + \frac{3+\mathcal{A}(f_1)}{2}N^2\right) + O(N).$$

5.2. Contribution du second terme

Nous devons calculer la somme

$$S_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} d(k)\right)\left(\sum_{l=0}^{N} \bar{d}(l)\right)\frac{1}{N+2+\mathcal{A}(f_1)}.$$

L'expression asymptotique de d_k permet d'écrire, en remarquant que les termes d'indice équivalents à N fournissent une contribution d'ordre $o(N)$.

$$\sum_{k=0}^{N} d(k) = \sum_{k=0}^{N}\left(-(k+1)\frac{1}{f_1(1)} + (\frac{1}{f_1})'(1)\right) + o(N)$$

Ce qui nous donne, tous calculs faits :

$$S_2 = C_1\left(\frac{N^3}{4} + N^2\left(1 + \frac{\mathcal{A}(f_1)}{4}\right)\right) + O(N).$$

5.3. Conclusion.

Un calcul rapide donne

$$S_1 - S_2 = C_1 \left(\frac{1}{12} N^3 + N^2 \Big(\frac{1}{2} + \frac{\mathcal{A}(f_1)}{4} \Big) \right) + O(N).$$

Ce qui est l'expression annoncée.

Bibliographie

[1] Adamyan (V.M.). — Asymptotic properties for positive and Toeplitz matrices. Operator theory : Adv. and Appl. 43, p. 17-38 (1990).

[2] Basor (E. L.). — Asymptotic formulas for Toeplitz determinants. Trans. Amer. Math. Soc., 239, p. 33-65 (1978).

[3] Bleher (P. M.). — Inversion of Toeplitz matrices. Trans. Moscow Math. Soc. 2, p. 201-224 (1981).

[4] Böttcher (A.). — The constants in the asymptotic formulas by Rambour and Seghier for the inverse of Toeplitz matrices. 99, p. 43-45 (2004).

[5] Böttcher (A.), Silbermann (B.). — Toeplitz matrices and determinants with Fisher-Hartwig symbols. J. Funct. Anal. 63, p. 178-214 (1985).

[6] Böttcher (A.), Silbermann (B.). — Toeplitz operators and determinants generated by symbols with one Fisher-Hartwig singularity. Math. Nachr. 127, p. 95-124 (1986).

[7] Böttcher (A.), Silbermann (B.). — Analysis of Toeplitz operators, Springer Verlag (1990).

[8] Böttcher (A.), Widom (H.). — From Toeplitz eigenvalues through Greens kernels to higherorder Wirtinger-Sobolev inequalities. arXiv, math.FA/0412269 v1 (2004).

[9] Böttcher (A.), Widom (H.). — Two elementary derivations of the pure Fisher-Hartwig determinant (2004) to appear.

[10] Coursol (J.), Dacunha-Castelle (D.). — Remarques sur l'approximation de la vraisemblance d'un processus gaussien stationnaire. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 27(1), p. 155-160 (1982).

[11] Dow (M.). — Explicit inverses of Toeplitz and associated matrices. Anziam J. 44, p. 185–215 (2003).

[12] Ehrhardt (T.). — Toeplitz determinants with several Fisher-Hartwig singularities. Dissertation, Technische Universitat Chemnitz, 1997.

[13] Ehrhardt (T.). — A status report on the asymptotic behaviour of Toeplitz determinants with Fisher-Hartwig singularities. Oper. Theory Adv. Appl., p. 217–241 (2001).

[14] Ehrhardt (T.), Silbermann (B.). — Toeplitz determinants with one Fisher-Hartwig singularity. Journal of Functional Analysis 148, p. 229–256 (1997).

[15] Fisher (M. E.), Hartwig (R. E.). — Toeplitz determinants ; some applications, theorems, and conjectures. Adv. Chem. Phys. 15, p. 333–353 (1968).

[16] Grenander (U.), Szego (G.). — Toeplitz forms and their applications. Chelsea, New York, 2nd ed. edition (1984).

[17] Ibrahimov (I.), Rozanov (Y.). — Processus aleatoires gaussiens. Editions Mir de Moscou, 1 edition (1974).

[18] Kesten (H.). — Random walk with absorbing barriers and Toeplitz forms. Illinois J. of Math. 5, p. 267–290 (1961).

[19] Landau (H.J.). — Maximum entropy and the moment problem. Bulletin (New Series) of the american mathematical society. 16(1), p. 47–77 (1987).

[20] Rambour (P.), Seghier (A.). — Exact and asymptotic inverse of the Toeplitz matrix with polynomial singular symbol. CRAS, 336, ser.1. p. 399–400 (2003).

[21] Rambour (P.), Seghier (A.). — Inversion asymptotique des matrices de Toeplitz à symboles singuliers. Extension d'un résultat de H. Kesten. Prépublications de l'Universite Paris–sud (2003).

[22] Rambour (P.), Seghier (A.). — Formulas for the inverses of Toeplitz matrices with polynomially singular symbols. Integr. equ. oper. theory. 50, p. 83–114 (2004).

[23] Rambour (P.), Rinkel (J-M.). — Application to random walks of the exact inverse of the Toeplitz matrix with singular rational symbol. Probablity and Mathematical Statistics. 25, p. 183–195 (2005).

[24] Rinkel (J-M.). — Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier, Thèse (2001).

[25] Sakhnovich (A.L.), Spitkovsky (I.M.). — Block-Toeplitz matrices and associated properties of a Gaussian model on the half axis. Teoret.Mat.Fiz.. 63, p. 154–160 (1985).

[26] Seghier (A.). — Inversion asymptotique des matrices de toeplitz en d-dimension. J. of funct. analysis. 67, p. 380–412 (1986).

[27] Seghier (A.). — Thèse de doctorat d'état. Université de Paris sud (1988).

[28] Spitzer (F. L.), Stone (C. J.). — A class of Toeplitz forms and their applications to probability theory. Illinois J. Math. 4, p. 253–277 (1960).

[29] Vladimirov (V.S.), Volovich (I.V.). — A model of statistical physics. Teoret. Mat.Fiz. 54, p. 8–22 (1983).

[30] Widom (H.). — Extreme eigenvalues of N-dimensional convolution operators. Trans. Amer. Math. Soc. 106, p. 391–414 (1963).

[31] Widom (H.). — Toeplitz determinant with singular generating function. Amer. J. Math. 95, (1973).