

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

THOMAS FORGET

*Solutions canards en des points tournants dégénérés*

Tome XVI, n° 4 (2007), p. 799-816.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2007\\_6\\_16\\_4\\_799\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_4_799_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Solutions canards en des points tournants dégénérés<sup>(\*)</sup>

THOMAS FORGET<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions un opérateur défini à partir d'une classe générale d'équations différentielles singulièrement perturbées dans le champ réel; son caractère contractant permet de conclure à l'existence de solutions canard dans le cas où l'on a un point tournant dégénéré.

**ABSTRACT** — The aim of this paper is the study of an operator defined from singularly perturbed real differential equations containing a degenerated turning point, we prove that this operator is a contraction. This result is applied to prove the existence of canard solutions in those equations.

---

Nous étudions une classe d'équations différentielles singulièrement perturbées dans le champ réel. Il s'agit d'équations de la forme

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, a, \varepsilon) \tag{0.1}$$

où la fonction  $\Phi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en ses variables,  $x$  est une variable réelle,  $y$  une fonction réelle de la variable  $x$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $a$  un paramètre réel, et  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif appelé *petit paramètre* de (0.1), ce qui signifie que nous nous intéressons au comportement asymptotique des solutions de (0.1) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

---

<sup>(\*)</sup> Reçu le 9 novembre 2006, accepté le 31 janvier 2007

<sup>(1)</sup> Laboratoire de Mathématiques et Applications, Pôle Sciences et Technologies – Université de La Rochelle, Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle – France  
thomas.forget@univ-lr.fr

On se place au voisinage d'un point que l'on appelle un *point tournant* ; la définition précise sera donnée dans le paragraphe suivant mais il suffit pour l'instant de savoir que cette propriété implique que l'existence d'une solution de (0.1) sur tout un voisinage de ce point, dans  $\mathbb{R}$ , est un phénomène exceptionnel.

C'est dans le but d'obtenir une telle solution, que l'on introduit un paramètre supplémentaire  $a$ , dit *paramètre de contrôle*, qui est unidimensionnel ( $a \in \mathbb{R}$ ) dans notre problème, alors que la résolution d'un problème de forme analogue dans le champ complexe [10], [1] demande génériquement de disposer d'un paramètre de contrôle  $p$ -dimensionnel, où l'entier  $p$  mesure, d'une certaine manière, le degré de dégénérescence du point tournant. Le cas où  $p = 1$  étant contenu dans les travaux accomplis dans le champ complexe, nous nous intéresserons, dans ces travaux, au cas où  $p > 1$ , qui est le cas où le point tournant est *dégénéré*.

Notre résultat principal énonce qu'un certain opérateur construit à partir de (0.1) est contractant.

De ce théorème, nous déduisons un résultat d'existence d'une solution canard [4], [11], [2] pour (0.1).

Il est à noter qu'un résultat similaire, pour une classe d'équations plus générales du même type a été présenté par Peter de Maesschalck dans sa thèse [3] en se basant sur une méthode d'éclatement [6] de la singularité, et qu'un résultat similaire a été démontré par Daniel Panazzolo [9] dans une classe d'équations prenant en compte plusieurs paramètres afin de pondérer des termes que nous mettons de côté dans le cadre de notre étude.

L'intérêt de cette démonstration réside dans l'approche originale du problème que nous faisons, qui nous permet d'aboutir, en plus du résultat d'existence, à des approximations asymptotiques des solutions canards dont ma thèse [7], actuellement en cours de correction, fait principalement l'objet.

Soulignons enfin que la démonstration présentée dans cet article a été rédigée dans le cadre de l'analyse nonstandard [8], [5], dans la version IST de Nelson, ceci pour des raisons de simplicité de formulation des questions posées, et de rédaction.

Néanmoins, le résultat principal est écrit de manière tout à fait standard.

Je remercie Eric Benoît pour l'encadrement apporté, Guy Wallet pour ses conseils de rédaction de ce papier, et la région Poitou-Charentes pour l'aide apportée au financement de ses travaux.

### 1. Mise sous forme préparée

Afin d'étudier et de préciser le problème que l'on se pose, nous allons mettre l'équation sous une forme plus appropriée dite *forme préparée*.

Quitte à effectuer une translation, nous supposons que le point tournant est 0.

Nous supposons l'existence d'une *courbe lente*, c'est-à-dire l'existence d'un couple  $(a_0, y_0)$  qui vérifie

$$a_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathcal{C}^\infty \text{ et } \forall x, \Phi(x, y_0(x), a_0, 0) = 0$$

En effectuant le changement

$$\begin{cases} u := y - y_0 \\ \alpha := a - a_0 \end{cases}$$

nous arrivons alors à une équation de la forme

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, \alpha, \varepsilon)$$

où la fonction  $\Psi$  vérifie

$$\forall x, \Psi(x, 0, 0, 0) = 0$$

Nous supposons que la fonction  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Pour étudier les régions où les solutions longent la courbe lente, il suffit alors de regarder l'attractivité de cette courbe et, pour se mettre dans les conditions d'apparition de canards, nous supposons donc que

$$\frac{\partial}{\partial u} \Psi(x, 0, 0, 0) \text{ est } \begin{cases} < 0 \text{ si } x < 0 \\ > 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Afin de nous placer dans des hypothèses d'existence d'un point tournant, nous supposons, de plus, que  $\frac{\partial}{\partial u} \Psi(x, 0, 0, 0)$  admet un zéro en  $x = 0$  d'ordre  $p$  qui, au vu de l'hypothèse précédente, est nécessairement un entier impair.

Cette fonction est donc de la forme  $x^p(C + T(x))$  avec  $C > 0$  et  $T(0) = 0$ .

Quitte à effectuer un changement de variable sur  $x$ , nous considérerons que ce terme est  $(p + 1)x^p$ , donc que  $\frac{\partial}{\partial u} \Psi(x, 0, 0, 0) = (p + 1)x^p$ .

L'application d'une formule de Taylor d'ordre 1 nous permet alors d'obtenir la décomposition :

$$\Psi(x, u, \alpha, \varepsilon) = \alpha T_1(x, \alpha) + u((p + 1)x^p + \alpha T_2(x, \alpha) + u T_3(x, u, \alpha)) + \varepsilon T_4(x, u, \alpha, \varepsilon)$$

Nous faisons maintenant 3 hypothèses moins naturelles mais imposées par les démonstrations qui vont suivre :

1. Le terme  $T_2$  est nul. (i.e. : il n'y a pas de terme admettant  $\alpha u$  en facteur sans un  $\varepsilon$ .)

Cette hypothèse est prise afin que le terme linéaire en  $u$  qui soit dominant soit  $x^p u$ .

2. Le terme  $T_3$  est nul. (i.e. : il n'y a pas de terme admettant  $u^2$  en facteur sans un  $\varepsilon$ .)

Cette hypothèse est prise afin que l'équation prise sans le terme  $\varepsilon T_4$  soit une équation en  $u$ , dans le cas contraire, il est alors possible qu'il n'y ai pas de solutions canard, comme l'illustre l'étude de l'équation  $\varepsilon u' = x^3 u + \alpha x^2 + u^2 + \varepsilon$ .

3.  $\alpha T_1(x, \alpha) = \alpha x^L (1 + x\gamma(x, \alpha))$

où  $\gamma$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $x$  et  $\alpha$ .

Afin que les approximations faites dans la suite se déroulent bien, il est nécessaire de prendre comme hypothèse de transversalité que l'entier  $L$  est pair.

*Dans la suite, les termes  $\alpha x^{L+1}\gamma(x, \alpha)$  et  $\varepsilon T_4(x, u, \alpha, \varepsilon)$  ont un rôle marginal, alors que  $x^p u$  et  $\alpha x^L$  sont les termes importants.*

Nous nous sommes ainsi ramenés à l'étude des équations de la forme

$$\varepsilon u' = (p+1)x^p u + \alpha x^L (1 + x\gamma(x, \alpha)) + \varepsilon P(x, u, \alpha, \varepsilon)$$

L'étude de ce type d'équation montre que la quantité infiniment petite pertinente est  $\varepsilon^{1/(p+1)}$ ; pour cette raison, et afin de gagner en généralité, nous considérerons  $P$  comme étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\eta := \varepsilon^{1/(p+1)}$  au lieu de  $\varepsilon$ , et étudierons donc les équations de la forme plus générale

$$\eta^{p+1} u' = (p+1)x^p u + \alpha x^L (1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1} P(x, u, \alpha, \eta) \quad (1.1)$$

Dans la suite, nous sommes intéressés à montrer l'existence de solutions  $(\alpha, u)$  longeant la courbe lente  $u_0(x) = 0$  sur tout un voisinage du point tournant 0.

Les figures qui suivent montrent quelques trajectoires, solutions de l'équation  $\varepsilon u' = x^5 u + \alpha x^4 + \varepsilon x^2$  avec  $\varepsilon = 0.1$ ,  $-5 < x < 5$ , et  $-1.5 < u < 1.5$  dans laquelle nous faisons varier le paramètre  $\alpha$ .

Ces figures permettant de conjecturer que les valeurs à canard du paramètre vivent dans l'intervalle  $] -0.186172, -0.186171[$ .

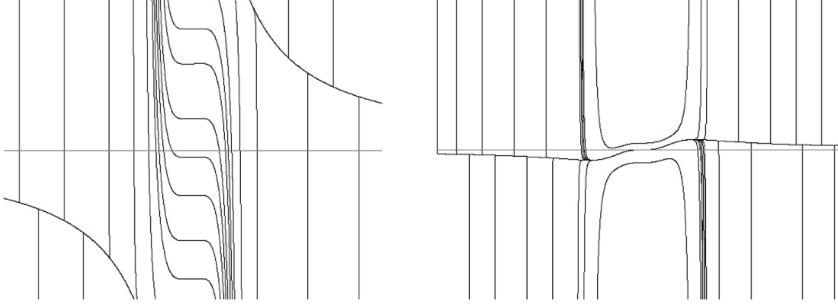


Figure 1. — Champ des solutions pour  $\alpha = -2$  et  $\alpha = -0.186172$ .

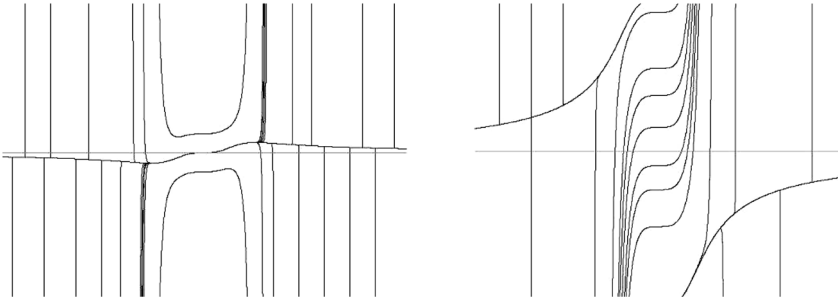


Figure 2. — Champ des solutions pour  $\alpha = -0.186171$  et  $\alpha = 1$ .

## 2. Énoncé général

### 2.1. Le théorème principal

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  contenant 0, et soient alors  $(x_0, A, B, \tilde{\eta})$ , tous strictement positifs, tels que  $[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}] \subset \Omega$ .

Dans la suite,  $E$  désignera l'ensemble des fonctions réelles continues sur  $[-x_0, x_0]$ , et nous le munissons de la norme  $\|v\|_\infty := \sup_{x \in [-x_0, x_0]} \{|v(x)|\}$ .

L'ensemble  $\mathbb{R} \times E$  sera, quant à lui, muni de la norme

$$|(\beta, v)|_\infty := \max\{|\beta|, \|v\|_\infty\}$$

Munis de ces normes, les espaces  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  et  $(\mathbb{R} \times E, |\cdot|_\infty)$  sont tous deux des espaces de Banach.

Conformément aux notations utilisées dans la section précédente,  $p$  est un entier impair, et  $L$  est un entier pair tel que  $L < p$ , et  $\gamma$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[-x_0, x_0] \times [-B, B]$ .

Nous supposons que  $P$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $M > 0$ , nous désignerons par  $\mathcal{B}_M$  l'ensemble  $\{v \in E; \|v\|_\infty \leq M\}$ .

*Notation.* — Pour  $\eta \in ]0, \tilde{\eta}[$ , nous notons  $\Xi_\eta$  la relation définie, pour  $(\beta, v)$  et  $(\alpha, u)$  éléments de  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ , par  $(\beta, v) \Xi_\eta (\alpha, u)$  si et seulement si  $u$  est dérivable sur  $[-x_0, x_0]$  et, pour tout  $x \in [-x_0, x_0]$  :

$$\begin{cases} \eta^{p+1} u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L (1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1} P(x, v(x), \beta, \eta) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{cases}$$

**THÉORÈME 2.1.** — *Pour tout  $\delta_1 \in ]0, B[$  et  $\delta_2 \in ]0, A[$ , il existe  $\eta_0 > 0$  tel que, pour tout  $\eta \in ]0, \eta_0[$ , la relation  $(\beta, v) \Xi_\eta (\alpha, u)$  induit une application  $\Xi_\eta : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$  de  $[-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$  dans lui-même.*

*De plus, cette application est contractante pour la distance associée à la norme  $|\cdot|_\infty$ .*

Soient  $\delta_1 \in ]0, B[$ ,  $\delta_2 \in ]0, A[$ , et  $\eta_0$  donné par le théorème, prenons  $\eta \in ]0, \eta_0[$ .

Puisque  $[-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$  est un fermé de l'espace de Banach  $(\mathbb{R} \times E, |\cdot|_\infty)$ , on en déduit que  $\Xi_\eta$  admet un point fixe  $(\alpha_\eta, u_\eta) \in [-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$ .

Ce qui permet alors d'écrire

$$\begin{cases} \eta^{p+1} u'_\eta(x) = (p+1)x^p u_\eta(x) + \alpha_\eta x^L (1 + x\gamma(x, \alpha_\eta)) + \eta^{p+1} P(x, u_\eta(x), \alpha_\eta, \eta) \\ u_\eta(x_0) = 0 = u_\eta(-x_0) \end{cases} \quad (2.1)$$

COROLLAIRE 2.2. — *Pour tout  $\delta_1 \in ]0, B[$  et  $\delta_2 \in ]0, A[$ , il existe  $\eta_0 > 0$  tel que, pour tout  $\eta \in ]0, \eta_0[$ , le système (2.1) admet une unique solution  $(\alpha_\eta, u_\eta) \in [-\delta_1, \delta_1] \times \mathcal{B}_{\delta_2}$ .*

*De plus,  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  étant fixé, la famille  $(u_\eta)_{\eta \in ]0, \eta_0[}$  converge uniformément vers 0 sur  $[-t_0, t_0]$  lorsque  $\eta$  tend vers 0.*

Pour tout  $\delta' \in ]0, \delta[$ , le théorème 1 montre l'existence d'un  $\eta'_0 > 0$  tel que, pour chaque  $\eta \in ]0, \eta'_0[$ , l'application  $\Xi_\eta$  admet un unique point fixe  $(\alpha'_\eta, u'_\eta)$  dans  $[-\delta', \delta'] \times \mathcal{B}_{\delta'}$ .

Comme, pour tout  $\eta \in ]0, \min\{\eta_0, \eta'_0\}[$ , on a  $(\alpha'_\eta, u'_\eta) = (\alpha_\eta, u_\eta)$ , on en tire que  $\|u_\eta\|_\infty \leq \delta'$ .

## 2.2. Approche nonstandard du problème

Nous nous proposons de prouver un théorème externe (résultat nonstandard) suffisant pour déduire le théorème 1.

L'intérêt principal de cette approche est de permettre une manipulation plus aisée des ordres de grandeur sans avoir à introduire de constantes artificielles.

Dans ce but, nous utilisons l'analyse nonstandard, dans la version IST (Internal Set Theory) due à Nelson (voir [8]).

Ce cadre permet d'utiliser les ordres de grandeur suivants :

- Le mot *standard* désigne tout objet usuel.
- Un nombre réel  $x$  est dit *infiniment grand* s'il est plus grand, en valeur absolue, que tout nombre réel standard.

On note  $x \simeq \infty$ .

- Un nombre réel  $x$  est dit *limité* s'il n'est pas infiniment grand.

On note  $x = \mathcal{L}$ .

- Un nombre réel  $x$  est dit *infiniment petit* s'il est plus petit, en valeur absolue, que tout nombre réel standard strictement positif.

On note  $x \simeq 0$  ou encore  $x = \mathcal{O}$ .

- Un nombre réel  $x$  est dit *appréciable* s'il n'est ni infiniment petit, ni infiniment grand.

On note  $x = \mathcal{@}$ .



Désormais, nous supposons que  $\eta$  est un nombre réel strictement positif infiniment petit fixé, que  $p, L, \gamma$  et  $P$  sont standard. Il en découle que l'on peut supposer que  $x_0, A, B$  sont trois éléments standard de  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le paramètre  $\eta$  étant fixé, nous notons  $\Xi$  la relation  $\Xi_\eta$ , définie par :

$$(\beta, v)\Xi(\alpha, u) \Leftrightarrow u \text{ est dérivable sur } [-x_0, x_0] \text{ et, pour tout } x \in [-x_0, x_0] :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L(1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1}P(x, v(x), \beta, \eta) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{array} \right.$$

THÉORÈME 2.3. — *Sous les hypothèses précédentes, on a les propriétés suivantes :*

- La relation  $(\beta, v)\Xi(\alpha, u)$  induit une application  $\Xi : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$  de  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$  dans lui-même qui est contractante de constante de contraction égale à  $\mathcal{L}\eta$ , pour la distance associée à la norme  $|\cdot|_\infty$ .
- L'image  $\Xi([-B, B] \times \mathcal{B}_A)$  est contenue dans l'ensemble externe

$$\{(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E : |(\alpha, u)|_\infty = \mathcal{L}\eta\}$$

COROLLAIRE 2.4. — *Il existe un unique  $\alpha \in [-B, B]$ , et un unique  $u \in \mathcal{B}_A$ , tels que pour tout  $x \in [-x_0, x_0]$  :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L(1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1}P(x, u(x), \alpha, \eta) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{array} \right.$$

$(\alpha, u)$  est une solution canard de (2.1).

Montrons que le théorème 2 implique le théorème 1 :

Soit  $\delta \in ]0, \min\{A, B\}[$ , standard, alors, pour tout  $\eta_0$  strictement positif infiniment petit, la conclusion du théorème 1 est vérifiée.

Par application du principe de transfert, on en déduit le théorème 1.

*Preuve du corollaire 2.4.* — En appliquant le théorème du point fixe à l'espace complet standard  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ , en tant que sous-espace fermé de l'espace de Banach  $\mathbb{R} \times E$ , on en déduit que  $\Xi$  admet un unique point fixe limité, qui est le canard recherché.

Et, réciproquement, le canard s'obtient par calcul du point fixe de cette application.

### 3. Démonstration du théorème 2

Afin de démontrer le théorème 2, nous introduisons dans un premier temps une application intermédiaire  $\Theta$  dont l'étude nous permettra d'en déduire les propriétés recherchées de la fonction  $\Xi$ .

#### 3.1. Etude préparatoire : L'application $\Theta$

*Résultat préparatoire :*

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , notons

$$J_k := \int_{-x_0}^{x_0} \xi^k e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

On remarque que, lorsque  $k$  est impair,  $J_k = 0$  et que, lorsque  $k$  est pair, on a

$$J_k = 2 \frac{\eta^{k+1}}{p+1} \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1}} s^{(k-p)/(p+1)} e^{-s} ds$$

Du fait que  $x_0/\eta \simeq \infty$ , on en déduit que

$$J_k = 2 \frac{\eta^{k+1}}{p+1} \left( \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right) + \circ \right) = @\eta^{k+1}$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction gamma  $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$J_k = \mathcal{L} \eta^{k+1}$$

Notons aussi que, si  $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$ , alors

$$\left| \int_{-x_0}^{x_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \leq \|Q\|_\infty J_0 = \mathcal{L} \eta$$

PROPOSITION 3.1. — *Soit  $Q \in \mathcal{C}^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$ , telle que  $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$ .*

*Alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} \eta^{p+1} u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L (1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1} Q(x) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{cases}$$

*admet une unique solution  $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E$  telle que  $\alpha$  soit limité.*

*De plus,  $\alpha = \mathcal{L} \eta^{p-L+1}$ .*

Pour chaque  $Q \in E$  tel que  $\|Q\|_\infty$  soit limité, on désignera désormais par  $\Theta(Q)$  le couple  $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E$  ainsi obtenu.

*Preuve de la proposition. — Montrons que  $\Theta$  est bien définie :*

La solution  $(\alpha, u)$  de l'équation (1.1) :

$$\eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L(1+x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1}Q(x)$$

admettant comme condition initiale  $u(-x_0) = 0$  est, par définition de  $x$ ,

$$u(x) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{-x_0}^x (\alpha \xi^L(1+\xi\gamma(\xi, \alpha)) + \eta^{p+1}Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Comme elle doit aussi vérifier que  $u(x_0) = 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \\ &+ \alpha \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{L+1} \gamma(\xi, \alpha) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \quad (3.1) \end{aligned}$$

Comme la fonction  $\gamma$  est de continue sur un compact, on en conclut que le terme  $\gamma(\xi, \alpha)$  est limité, et les estimations sur la fonction  $J_k$  précédentes nous permettent de mettre l'équation (3.1) sous la forme

$$\alpha \cdot \mathbb{Q}\eta^{L+1} + \alpha \cdot \mathcal{L}\eta^{L+2} \mathcal{L} + \eta^{p+1} \cdot \mathcal{L}\eta = 0$$

Que l'on réécrit

$$\alpha(1 + \mathcal{L}\eta) = \mathcal{L}\eta^{p-L+1}$$

Le second terme de la somme étant infinitésimal, on en déduit l'existence et l'unicité d'un paramètre limité  $\alpha$ , qui satisfait, de plus, à l'estimation asymptotique

$$\alpha = \mathcal{L}\eta^{p-L+1}$$

La formulation de la fonction  $u$  ne dépendant que du paramètre  $\alpha$ , nous concluons par suite à son existence et son unicité.  $\square$

*Nous montrons maintenant le caractère lipschitzien de  $\Theta$  :*

**PROPOSITION 3.2.** — *Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  deux éléments de  $\mathcal{C}^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$  tels que  $\|Q_1\|_\infty = \mathcal{L}$  et  $\|Q_2\|_\infty = \mathcal{L}$ , alors*

$$|\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty = \mathcal{L}\eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

*Preuve.* — Ecrivons  $(\alpha_j, u_j) := \Theta(Q_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , la proposition 1 affirme leur existence.

- *Étude de  $|\alpha_2 - \alpha_1|$  :*

En reprenant les calculs de la proposition 1 on a, pour  $j \in \{1, 2\}$  :

$$0 = \alpha_j \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{L+1} \alpha_j \gamma(\xi, \alpha_j) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \\ + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} Q_j(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Par différence,

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots \\ \dots + \int_{-x_0}^{x_0} \xi^{L+1} (\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \\ + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

En effectuant la réécriture

$$\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1) = \alpha_2 (\gamma(\xi, \alpha_2) - \gamma(\xi, \alpha_1)) + \gamma(\xi, \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Le théorème des accroissements finis, nous amène à l'écriture

$$\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_2 \partial_2 \gamma(\xi, \cdot) + \gamma(\xi, \alpha_1))$$

Et le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $\gamma$ , nous permet alors de réécrire ce terme sous la forme

$$\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) \delta(\xi, \alpha_2, \alpha_1)$$

où la fonction  $\delta$  est limitée. Et ainsi, selon le lemme 1 donné en annexe,

$$0 = (\alpha_2 - \alpha_1) (\mathbb{Q} \eta^{L+1} + \mathcal{L} \eta^{L+2}) + \eta^{p+1} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Ce que l'on réécrit, par division par  $\eta^{L+1}$ ,

$$\mathbb{Q} (\alpha_2 - \alpha_1) + \eta^{p-L} \int_{-x_0}^{x_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi = 0$$

Et, par suite,

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \mathcal{L} \eta^{p-L} \cdot 2 \int_0^{x_0} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \cdot \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Donc, et selon le lemme 1 donné en annexe,

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = \mathcal{L}\eta^{p-L+1} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

- *Étude de  $\|u_2 - u_1\|_\infty$  :*

Nous travaillerons sur  $[0, x_0]$  (*Le résultat sur  $[-x_0, 0]$  se montrant de même.*)

La solution de l'équation (1.1) admettant comme condition initiale  $u(x_0) = 0$  est

$$u(x) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{x_0}^x (\alpha \xi^L (1 + \xi \gamma(\xi, \alpha)) + \eta^{p+1} Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

ce qui permet de déduire que, pour tout  $x$  :

$$\begin{aligned} |u_2(x) - u_1(x)| &\leq \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \cdot \mathcal{L}\eta^{p-L+1} \|Q_2 - Q_1\|_\infty \left| \int_{x_0}^x \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_{x_0}^x \xi^{L+1} (\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \\ &\dots + e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_{x_0}^x e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \|Q_2 - Q_1\|_\infty \end{aligned}$$

- *Étude de  $T_1 := \mathcal{L} \frac{1}{\eta^{p+1}} \eta^{p-L+1} e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_x^{x_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \|Q_2 - Q_1\|_\infty$*

Selon le lemme 1 donné en annexe,

$$T_1 = \mathcal{L}\eta^{-L} e^{(x/\eta)^{p+1}} \cdot \mathcal{L}\eta^{L+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Et ainsi

$$T_1 = \mathcal{L}\eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

- *Étude de  $T_2 := \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_x^{x_0} \xi^{L+1} (\alpha_2 \gamma(\xi, \alpha_2) - \alpha_1 \gamma(\xi, \alpha_1)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right|$ .*

En effectuant de nouveau la décomposition vue précédemment, nous écrivons

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \mathcal{L}\eta^{p-L+1} \|Q_2 - Q_1\|_\infty \\ &\times \left| \int_x^{x_0} \xi^{L+1} (\alpha_2 \partial_2 \gamma(\xi, \cdot) + \gamma(\xi, \alpha_1)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \end{aligned}$$

Qui nous amène, de par le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la fonction  $\gamma$ , et par le lemme 1 donné en annexe, à

$$T_2 = \mathcal{L}\eta^2 \|Q_2 - Q_1\|_\infty^{k_i}$$

- *Étude de  $T_3 := e^{(x/\eta)^{p+1}} \left| \int_x^{x_0} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \|Q_2 - Q_1\|_\infty$ .*

Par le lemme 1 donné en annexe,

$$T_3 = \mathcal{L}\eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

On a donc montré que, pour tout  $x \in [-x_0, x_0]$ , on a

$$|u_2(x) - u_1(x)| = (\mathcal{L}\eta + \mathcal{L}\eta^2 + \mathcal{L}\eta) \cdot \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Comme  $\|Q_2 - Q_1\|_\infty$  reste limité, on en déduit que

$$\|u_2 - u_1\|_\infty = \mathcal{L}\eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Par suite,

$$\|(\alpha_2, u_2) - (\alpha_1, u_1)\|_\infty = \mathcal{L}\eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

□

*Dans le cas où  $\mathcal{C}^0([-x_0, x_0], \mathbb{R})$  est muni de la norme canonique  $\|\cdot\|_\infty$ , et que l'ensemble  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$  est muni de la norme sous-jacente  $|\cdot|_\infty$ , nous avons ainsi montré que  $\Theta$  est une application lipschitzienne, de constante de Lipschitz égale à  $\mathcal{L}\eta$ .*

### 3.2. Démonstration du premier point du théorème 2

Selon la proposition 1, la relation  $(\beta, v)\Xi(\alpha, u)$  induit une fonction  $\Xi : (\beta, v) \mapsto (\alpha, u)$ .

Soient  $(\beta_1, v_1)$  et  $(\beta_2, v_2)$  deux points de  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$ , on a

$$\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1) = \Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)$$

où, pour  $j \in \{1, 2\}$ ,  $Q_j$  est défini par  $Q_j(x) := P(x, v_j(x), \beta_j, \eta)$ .

On a donc, par définition

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = |\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty$$

Comme, pour tout  $j \in \{1, 2\}$ ,  $(\beta_j, v_j)$  appartient au compact  $[-B, B] \times \mathcal{B}_A$  alors, et par continuité,  $Q_j$  reste limité sur tout  $[-x_0, x_0]$ , la proposition 2 implique alors que

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = \mathcal{L}\eta \cdot \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a ainsi

$$\|Q_2 - Q_1\|_\infty \leq \sup_{\xi \in [-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]} \{ \|dP(\xi)\| \} \cdot |(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

Du fait que  $dP$  est standard continue et que  $[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]$  est compact, on a alors que

$$\sup_{\xi \in [-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]} \{ \|dP(\xi)\| \} = \mathcal{L}$$

Et, par suite,

$$\|Q_2 - Q_1\|_\infty \leq \mathcal{L} |(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

D'où l'on déduit que

$$|\Xi(\beta_2, v_2) - \Xi(\beta_1, v_1)|_\infty = \mathcal{L}\eta |(\beta_2, v_2) - (\beta_1, v_1)|_\infty$$

□

### 3.3. Démonstration du second point du théorème 2

Soit  $(\beta, v) \in [-B, B] \times \mathcal{B}_A$ , puisque  $\eta \simeq 0$  et que  $P$  est une fonction standard continue définie sur le compact standard

$$[-x_0, x_0] \times [-A, A] \times [-B, B] \times [0, \tilde{\eta}]$$

alors  $Q(x) := P(x, v(x), \beta, \eta)$  est limité pour tout  $x \in [-x_0, x_0]$ .

Nous cherchons à montrer que

$$\Xi([-B, B] \times \mathcal{B}_A) \subset \{(\alpha, u) : |(\alpha, u)|_\infty = \mathcal{L}\eta\}$$

*Preuve.* — Soit  $(\beta, v) \in [-B, B] \times \mathcal{B}_A$ , on a alors  $|(\beta, v)|_\infty = \mathcal{L}$ , considérons le système

$$\begin{cases} \eta^{p+1}u'(x) = (p+1)x^p u(x) + \alpha x^L(1 + x\gamma(x, \alpha)) + \eta^{p+1}Q(x) \\ u(x_0) = 0 = u(-x_0) \end{cases}$$

où  $Q(x) := P(x, v(x), \beta, \eta)$  est limitée sur tout l'intervalle  $[-x_0, x_0]$ .

Comme  $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$ , alors et par la proposition 1, nous avons  $\alpha = \mathcal{L}\eta^{p-L+1}$ .

Étudions l'ordre de grandeur de  $\|u\|_\infty$  sur  $[0, x_0]$  :

(l'étude sur  $[-x_0, 0]$  se faisant de même) :

Les calculs faits lors de la preuve de la proposition 1, nous ont amené à

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(x/\eta)^{p+1}} \int_{x_0}^x (\alpha \xi^L (1 + \xi \gamma(\xi, \alpha)) + \eta^{p+1} Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \\ &= e^{(x/\eta)^{p+1}} \cdot \left( \frac{1}{\eta^{p+1}} \alpha \int_{x_0}^x \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \frac{1}{\eta^{p+1}} \alpha \int_{x_0}^x \xi^{L+1} \gamma(\xi, \alpha) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1 donné en annexe, et en se rappelant que  $\gamma$  et  $Q$  restent limité sur les compacts sur lesquelles elles sont définies, on arrive alors à

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq e^{(x/\eta)^{p+1}} \cdot \left( \frac{1}{\eta^{p+1}} \cdot \mathcal{L} \eta^{p-L+1} \cdot @\eta^{L+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\eta^{p+1}} \cdot \mathcal{L} \eta^{p-L+1} \mathcal{L} \eta^{L+2} e^{-(x/\eta)^{p+1}} + \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \eta e^{-(x/\eta)^{p+1}} \right) \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $x \in [-x_0, x_0]$ ,  $|u(x)| = \mathcal{L}\eta$ , ce qui se traduit par

$$\|u\|_\infty = \mathcal{L}\eta$$

□

*Remarque.* — Notons que nous avons montré en fait que si  $\|(\beta, v)\|_\infty = \mathcal{L}$  alors  $\|(\alpha, u)\|_\infty = \mathcal{L}\eta$ .

#### 4. Annexe

LEMME 4.1. — Soit  $x_0 > 0$  un nombre réel standard,  $x \in [0, x_0]$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , et  $\eta > 0$  tel que  $\eta \simeq 0$ .

Soit  $I_q : x \mapsto \int_x^{x_0} \xi^q e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$ , alors :

$$I_q(x) = \begin{cases} @\eta^{q+1} = @\eta^{q+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \text{si } |x| = \mathcal{L}\eta \\ \mathcal{L}\eta^{q+1} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{q-p} e^{-(x/\eta)^{p+1}} & \text{si } x \neq \mathcal{L}\eta \end{cases}$$



En particulier, lorsque  $q \leq p$ , nous pouvons écrire

$$I_q(x) = \mathcal{L}\eta^{q+1} e^{-(x/\eta)^{p+1}}$$

On cherche une estimation de ce type d'intégrale en fonction des divers paramètres.

D'une certaine manière, il s'agit d'un problème d'asymptotique à plusieurs paramètres pour lequel les techniques nonstandard sont bien adaptées.

*Preuve du lemme 4.1.* — Le changement de variable  $t := \left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1}$  donne l'expression

$$I_q(x) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \int_{(x/\eta)^{p+1}}^{(x_0/\eta)^{p+1}} t^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-t} dt$$

qui présente l'avantage que les deux paramètres  $x$  et  $\eta$  n'apparaissent plus dans la fonction à intégrer.

– Cas où  $x$  est au plus de l'ordre de  $\eta$  :

Dans ce cas,  $\frac{x}{\eta}$  est limité, et il existe donc un unique nombre standard  $a \in [0, x_0]$  tel que  $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} \simeq a$ . Comme la fonction intégrée est elle-même standard et intégrable, on a

$$I_q(x) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \left( \int_a^{+\infty} t^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-t} dt + \mathcal{O} \right)$$

d'où l'on déduit l'estimation

$$I_q(x) = \mathcal{O}\eta^{q+1}$$

– Cas où  $x$  est d'ordre strictement plus grand que  $\eta$  :

Maintenant, on a  $\left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} \simeq +\infty$  et les deux bornes de l'intégrale sont infiniment grandes. On ramène la plus petite à 0 par le changement de variables  $t := \left(\frac{x}{\eta}\right)^{p+1} + v$ , ce qui conduit à la nouvelle expression

$$I_q(x) = \frac{\eta^{p+1}}{p+1} x^{q-p} e^{-(x/\eta)^{p+1}} \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1} - (x/\eta)^{p+1}} \left( 1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v \right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v} dv$$

On remarque que

$$0 \leq \int_0^{(x_0/\eta)^{p+1} - (x/\eta)^{p+1}} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v} dv \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v} dv$$

et que, la dernière fonction intégrée est dominée par la fonction  $v \mapsto (1+v)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v}$  qui est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Puisque  $\frac{\eta}{x} \simeq 0$ , et par continuité sous le signe somme, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{x}\right)^{p+1} v\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-v} dv \simeq \int_0^{+\infty} e^{-v} dv = 1$$

On en déduit

$$0 \leq I_q(x) \leq \frac{\eta^{p+1}}{p+1} x^{q-p} e^{-(x/\eta)^{p+1}} (1 + \mathcal{O})$$

ce qui mène à l'estimation finale

$$I_q(x) = \mathcal{L}\eta^{p+1} x^{q-p} e^{-(x/\eta)^{p+1}}$$

□

## Bibliographie

- [1] BENOÎT (E.), FRUCHARD (A.), SCHÄFKE (R.), and WALLET (G.). — Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 7(4), p. 627-658 (1998).
- [2] CARTIER (P.). — Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. In *Bourbaki Seminar*, Vol. 1981/1982, volume 92 of *Astérisque*, p. 21-44. Soc. Math. France, Paris (1982).
- [3] DE MAESSCHALCK (P.). — Geometry and Gevrey asymptotics of two dimensional turning points. PhD thesis. Faculteit Wetenschappen, Limburgs universitair centrum, 2003.
- [4] DIENER (F.) and DIENER (M.). — Chasse au canard. I Les canards. *Collect. Math.*, 32(1), p. 37-74 (1981).
- [5] DIENER (F.) and REEB (G.). — Analyse non standard, volume 40 of *Collection Enseignement des Sciences*. Hermann, Paris (1989).
- [6] DUMORTIER (F.) and ROUSSARIE (R.). — Canard cycles and center manifolds, volume 121(577). *Memoirs of the American Mathematical Society* (1996).
- [7] FORGET (T.). — Points tournants dégénérés. Thèse de doctorat. Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de La Rochelle, soutenance prévue début 2007.
- [8] NELSON (E.). — Internal set theory: a new approach to non standard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6), p. 1165-1198 (1977).

- [9] PANAZZOLO (D.). — On the existence of canard solutions. *Publ. Mat.*, 44(2), p. 503-592, 2000.
- [10] WALLET (G.). — Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France*, 122(2), p. 185-208 (1994).
- [11] ZVONKIN (A. K.) and SHUBIN (M. A.). — Non standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(2(236)), p. 77-127 (1984).