

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

M. HILLAIRET

*Chute stationnaire d'un solide dans un fluide visqueux incompressible  
au-dessus d'un plan incliné. Partie 2*

Tome XVI, n° 4 (2007), p. 867-903.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2007\\_6\\_16\\_4\\_867\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_4_867_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Chute stationnaire d'un solide dans un fluide visqueux incompressible au-dessus d'un plan incliné.

## Partie 2(\*)

M. HILLAIRET<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous montrons dans cette étude l'existence de configurations stationnaires où une bille tombe le long d'un plan incliné sans le toucher. Nous donnons également des propriétés qualitatives de ces configurations. En particulier, nous nous intéressons à l'orientation du plan par rapport à la verticale quand la masse de la bille est proche de celle d'un volume équivalent de liquide *i.e.*, quand l'écoulement autour de la bille est lent.

**ABSTRACT** — Nous montrons dans cette étude l'existence de configurations stationnaires où une bille tombe le long d'un plan incliné sans le toucher. Nous donnons également des propriétés qualitatives de ces configurations. En particulier, nous nous intéressons à l'orientation du plan par rapport à la verticale quand la masse de la bille est proche de celle d'un volume équivalent de liquide *i.e.*, quand l'écoulement autour de la bille est lent.

---

## 1. Introduction et résultats

### 1.1. Motivation

L'étude du comportement de solides plongés dans un fluide a motivé de nombreuses recherches depuis la formulation même des équations de la mécanique des fluides. Un cadre particulier ressort de ces travaux. En effet, dans l'objectif de retrouver, à partir des équations de la mécanique des

---

(\*) Reçu le 9 novembre 2006, accepté le 31 janvier 2007

(1) Université de Caen, Département de Mathématiques et Mécanique, Laboratoire N.Oresme, Campus II, Boulevard du Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen Cedex, France. bezivin@math.unicaen.fr

fluides, des résultats expérimentaux sur la répartition de particules solides dans un fluide délimité par deux plans [18, 19], de nombreux articles se sont intéressés à la force exercée sur une particule de forme sphérique, ou autre, se trouvant dans un fluide visqueux incompressible au voisinage d'un plan (voir [14] pour une revue de la littérature).

Parallèlement, les problèmes d'évolutions décrivant le comportement de plusieurs solides dans un fluide au sein d'une cavité ont connu un regain d'intérêt ces dix dernières années [10, 2, 17, 3]. De ces études, il apparaît qu'une difficulté mathématique du modèle réside dans la possibilité que des collisions entre solides ou entre un solide et le bord de la cavité se produise. En particulier, deux problèmes sont soulevés. Tout d'abord, il s'agit de comprendre si le modèle de Navier-Stokes permet de prédire des collisions entre les solides. De premiers résultats sont connus à ce jour, impliquant que des collisions réalistes ne semblent possibles qu'en dimension 3 [4, 21, 22, 12]. Le deuxième problème soulevé par l'apparition possible de collisions réside en la sous-détermination du système au moment où se produit une collision. Il apparaît en effet qu'à l'instar des chocs pour les systèmes hyperboliques, il existe trop de solutions faibles des problèmes d'interaction fluide-solide(s) dans le cas où une collision se produit [4, 21]. Il s'agit donc de trouver, comme pour les chocs, des lois de collision déterminant quelles solutions faibles sont physiquement réalistes.

Ces deux familles de résultats antérieurs nous amènent à étudier la chute stationnaire d'un solide au-dessus d'un plan incliné. En effet, d'une part cela permet de donner un cadre de solution pour les calculs de forces répertoriés dans [14]. D'autre part, ce type d'écoulement fournit un exemple où il ne peut y avoir de collision entre la particule et la rampe.

## 1.2. Géométrie

Nous considérons un fluide dans un demi-espace infini contenant un solide indéformable. Nous appellerons ce solide « particule ». Nous considérons deux formes de particule : soit ce sera une boule de  $\mathbb{R}^3$ , et nous obtenons alors un système dans  $\mathbb{R}^3$ , soit ce sera un cylindre infini de  $\mathbb{R}^3$  à section circulaire, et nous obtenons un système dans  $\mathbb{R}^2$  en utilisant l'invariance par translation selon l'axe du cylindre. Le fluide occupe un volume noté  $\mathcal{F}$ , demi-espace privé de  $\mathcal{B}$ , une boule (de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) de rayon  $r$ , située à la distance  $h$  du bord du demi-espace, *i.e.*, la rampe  $\mathcal{P}$ . La masse de la particule est répartie de façon homogène à l'intérieur de  $\mathcal{B}$  (voir Figure 1). Le plan  $\mathcal{P}$  fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale où, ce qui est équivalent, l'orthogonal de  $\mathcal{P}$  fait un angle  $\theta$  avec la verticale.

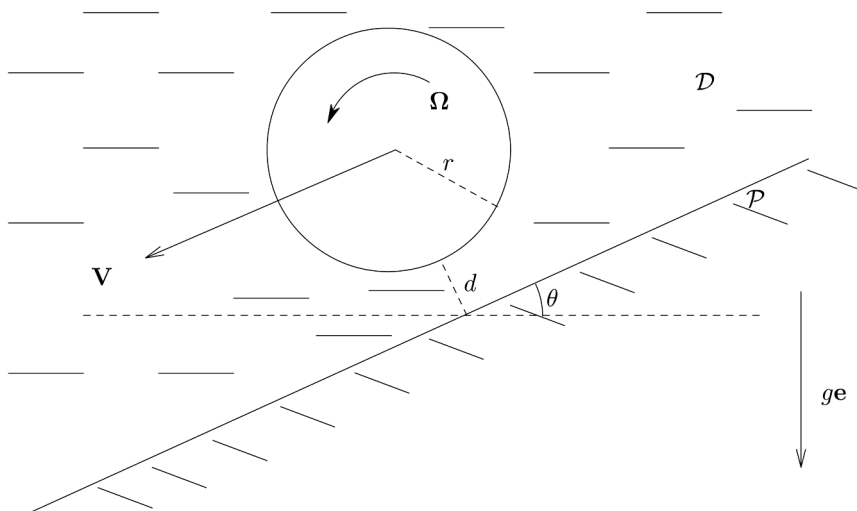


Figure 1. — Géométrie du problème.

Le demi-espace au-dessus de la rampe  $\mathcal{P}$  possède une invariance de translation dans la (ou les) direction(s) du plan  $\mathcal{P}$ . Ceci permet d'envisager des régimes stationnaires dans lesquels la particule tombe parallèlement au plan. Chacun sait comment une bille roule sur un plan incliné. Ici, notre particule «roule » sur le plan mais avec une couche de fluide entre les deux.

Nous formulerons notre problème dans le référentiel associé au centre de masse  $\mathbf{G}$  de  $\mathcal{B}$ . En particulier, nous utiliserons un système de coordonnées  $\mathbf{y}$  centré en  $\mathbf{G}$  et associé à une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Cette base est telle que le troisième vecteur  $\mathbf{e}_3$  est la normale au plan  $\mathcal{P}$  orientée vers la particule. Ainsi, la direction du plan  $\mathcal{P}$  est l'espace engendré par  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Pour une particule cylindrique, nous supposons que l'axe du cylindre est porté par  $\mathbf{e}_2$ . Dans le système réduit, la base de  $\mathbb{R}^2$  considérée est donc  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ .

### 1.3. Formulation mathématique du problème

Nous supposons le fluide visqueux, incompressible et de densité constante. Sans nuire à la généralité, nous considérons que sa densité et sa viscosité sont égales à 1. Son comportement est décrit par un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et un champ de pression  $p$  associé qui satisfont les équations de Navier-Stokes incompressible. Le fluide collant aux parois, il prend le mouvement du plan

sur le plan et le mouvement de la particule à son bord. Il est au repos à l'infini. La particule est un solide indéformable. Son champ de vitesse est un torseur caractérisé par une vitesse de translation  $\mathbf{V}$  et une vitesse de rotation  $\mathbf{\Omega}$ , calculé respectivement à  $\mathbf{G}$ , et soumis aux relations de la mécanique du solide.

La seule force extérieure prise en compte est la pesanteur  $g\mathbf{e}$ . Le réel  $g > 0$  représente l'amplitude de la gravité et  $\mathbf{e}$ , vecteur de la sphère unité  $\mathcal{S}^2$ , sa direction. La direction de la gravité est *a priori* la verticale. Cependant, dans notre base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , le système a subi une rotation de telle sorte que le plan  $\mathcal{P}$  est « horizontal ». Par conséquent, selon nos remarques précédentes sur la direction de  $\mathcal{P}$ , la direction de la gravité est un vecteur faisant un angle  $\theta$  avec la normale de  $\mathcal{P}$ , *i.e.*,  $\mathbf{e}_3$ . Dans le cas d'une particule cylindrique, la direction de  $\mathbf{e}$  est donc le vecteur du cercle  $\mathcal{S}_0$  de  $\mathcal{S}^2$  inclus dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{e}_3$ . Nous notons  $\mathbf{e}_0 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{S}_0$  le paramétrage de ce cercle  $\mathcal{S}_0$  par  $\theta$ . Dans le cas d'une particule sphérique, le système étant invariant par rotation autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ , nous pouvons également supposer que  $\mathbf{e}$  se trouve sur ce cercle  $\mathcal{S}_0$ .

Le système stationnaire s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla] \mathbf{u} - (\Delta \mathbf{u} - \nabla p) = g\mathbf{e}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}|_{\mathcal{P}} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\infty} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial \mathcal{B}} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{y}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0(\theta) \quad (1.2)$$

Nous notons  $\mathbf{n}$  la normale à  $\partial \mathcal{B}$  orientée vers l'intérieur de  $\mathcal{B}$  et  $d\sigma$  l'élément de surface (ou de longueur) de  $\partial \mathcal{B}$ . Les équations de la mécanique du solide donnent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} d\sigma + m g \mathbf{e} = 0, \\ - \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \times' \mathbf{y} d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

où  $m$  représente la masse de la particule supposée répartie de façon homogène et  $\mathbb{T}(\mathbf{u}, p)$ , le tenseur des contraintes appliquées par le fluide. Dans le cas newtonien, où nous nous plaçons, il s'écrit :

$$\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}_d,$$

avec  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  la partie symétrique (au sens des matrices) de la jacobienne de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité à  $d$  lignes et  $d$  colonnes. Les opérateurs  $\times$  et  $\times'$  sont

à préciser en fonction de la dimension. En dimension 3, ils correspondent tous deux au produit vectoriel. En dimension 2, le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$  est en réalité un scalaire  $\omega$ . Les opérateurs  $\times$  et  $\times'$  sont alors la trace sur l'orthogonal de  $\mathbf{e}_2$  de cet opérateur. Ainsi, notant  $\perp$  la rotation d'angle  $\pi/2$  (pour un vecteur  $\mathbf{y}$  de coordonnées  $(y_1, y_3)$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ , on note  $\mathbf{y}^\perp = (-y_3, y_1)$ ) :

- pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  :

$$\alpha \times \mathbf{y} = \alpha \mathbf{y}^\perp,$$

- pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{y} \times' \mathbf{z} = \mathbf{y}^\perp \cdot \mathbf{z}.$$

Pour que ce système prenne un sens, il faut respecter l'invariance de translation du demi-espace et que la particule se déplace bien parallèlement à  $\mathcal{P}$ . Ceci est possible si et seulement si  $\mathbf{V}$  satisfait la contrainte :

$$\mathbf{V} \text{ est parallèle à } \mathcal{P}. \tag{1.4}$$

Des résultats classiques (voir [6] pour une revue de la littérature) résolvent (1.1) pour une géométrie fixée ( $h$  et  $r$ ) et des conditions aux bords données ( $\mathbf{V}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$  fixés) en dimension 3. En dimension 2, il n'est même pas clair que ce problème connaisse une réponse satisfaisante (voir [5]). Quitte à supposer qu'il existe une unique solution  $(\mathbf{u}, p)$  de (1.1) à  $\mathbf{V}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$  fixés, les intégrales impliquées dans (1.3) peuvent être interprétées comme des fonctions de  $\mathbf{V}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$ . Ajoutant (1.2) et l'inconnue  $\theta$ , et prenant en compte la contrainte (1.4) qui nous fait perdre un degré de liberté en  $\mathbf{V}$ , (1.3) représente un système de 6 équations en dimension 3 (respectivement 3 équations en dimension 2) à 6 inconnues en dimension 3 (respectivement 3 inconnues en dimension 2). Ces inconnues sont

- la composante de  $\mathbf{V}$  parallèle à  $\mathcal{P}$ ,
- le vecteur de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ ,
- l'angle  $\theta$  entre le plan  $\mathcal{P}$  et la gravité.

Nous appelons la résolution de ce système **Problème A**. Résolvant ce problème nous montrons le

**THÉORÈME 1.1.** — *Etant donnée une particule sphérique ou cylindrique de masse distribuée de façon homogène, pour toute distance  $h > 0$ , il existe un angle  $\theta_h$ , une vitesse de translation  $\mathbf{V}_h$  parallèle à  $\mathcal{P}$ , une vitesse de rotation  $\mathbf{\Omega}_h$  et un écoulement du fluide environnant  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  tels que la particule tombe le long du plan sans jamais le toucher.*

Nous avons déjà abordé le problème de chute libre au-dessus d'un plan incliné tridimensionnel, dans [11], mais sous un angle différent. Dans cet article, nous fixons la vitesse de translation sur la boule. Ainsi, nous étions obligés de relaxer une des équations du système (1.3) ou de rajouter une nouvelle inconnue. Précisément, nous considérons la masse de la particule  $m$  comme nouvelle inconnue. Le résultat obtenu était le suivant :

**THÉORÈME 1.2.** — *Etant donné un rayon de solide  $r$ , une distance  $h$  et une vitesse de translation de la boule, il existe, pour certaines masses du solide  $m$ , un angle entre le plan et l'horizontale et un régime stationnaire où le solide se déplace parallèlement à  $\mathcal{P}$  avec la vitesse de translation  $\mathbf{V}$  à la hauteur  $h$ .*

Du point de vue des applications, ce résultat n'est pas suffisant car il ne permet pas de conclure à l'existence d'un régime stationnaire pour tout solide (dans l'énoncé, noter le « pour certaines masses »). Comme nous l'avons mentionné plus tôt, nous préférons échanger, dans ce théorème, le rôle de la vitesse de translation et de la masse du solide. C'est le sens de l'amélioration obtenue avec le **Théorème 1.1**.

Nous reprenons ici les techniques de formulation variationnelle de [11], elles-mêmes inspirées de [20], à la résolution du **Problème A**. Dans une première partie, nous réintroduisons la formulation variationnelle du problème. Du fait de l'existence du paradoxe de Stokes, les résultats connus en dimension 3, qui découlaient directement de l'étude sur tout l'espace de [20] ne s'adaptent pas innocemment en dimension 2. Nous prenons en particulier avantage de la présence du plan afin d'obtenir la condition à l'infini (**Lemme 2.3**).

Dans une deuxième section, nous présentons une résolution du **Problème A** sous sa forme variationnelle. Nous nous ramenons à une formulation fonctionnelle du problème variationnel via une méthode d'exhaustion déjà utilisée par J. Leray [16]. Puis nous résolvons cette équation fonctionnelle en utilisant la théorie du degré topologique de Leray-Schauder.

Notre méthode présente deux imperfections. La première est que nous obtenons l'existence d'une solution, mais qu'un résultat d'unicité semble inespéré par cette technique. Par essence, notre méthode permet de tra-

vailler aussi bien pour des écoulements lents que pour des écoulements rapides. L'unicité étant fort peu probable pour des écoulements rapides, il est raisonnable que cet inconvénient surgisse. La seconde imperfection est que notre méthode ne nous donne *a priori* aucun renseignement sur l'orientation  $\theta$ . Seulement deux informations sont immédiatement à portée de main. Tout d'abord, l'estimation d'énergie qui permet d'utiliser le degré topologique assure également que  $\theta \neq 0$ , *i.e.*, le plan  $\mathcal{P}$  n'est de toute manière pas horizontal, nous n'observons pas un phénomène de « lévitation ». D'autre part, dans le cas linéaire où les termes quadratiques en  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{V}$  disparaissent de (1.1), l'angle  $\theta$  est nécessairement  $\pi/2$  modulo  $\pi$  (voir la **Section 4.2**). Ceci, ne représente vraisemblablement pas des configurations physiquement réalistes. En effet, le régime stationnaire consiste alors en une chute verticale de la particule le long d'un plan vertical. Dans cette géométrie, un légère perturbation du régime stationnaire sous la forme d'un mouvement de rotation sur la boule créera une compression à l'avant de la particule et une décompression à l'arrière. Le plan étant fixe, le principe de réaction implique que le plan repoussera la particule qui partira à l'infini sans que la gravité n'ait de raison de la stopper. Ce genre de configuration ne semble donc intuitivement pas stable.

Dans la dernière section de cette étude, nous cherchons donc à obtenir plus d'information sur l'angle  $\theta$ . Ceci se résumera, pour nous, à regarder si la force appliquée par le fluide sur le solide peut avoir une composante selon  $\mathbf{e}_3$ , *i.e.*, si l'angle  $\theta$  peut décoller de  $\pi/2$ . Ceci est également l'enjeu de toute une partie de la bibliographie sur les solutions approchées du système répertoriées dans [14]. Nous obtenons en particulier des formules de représentation de la force appliquée par dualité, utilisant les solution du problème linéaire (voir **Section 5.1**) comme fonctions-test dans la formulation variationnelle. À partir de ces formules, nous calculons un développement limité à l'ordre 2 de la force appliquée au voisinage du régime linéaire *i.e.*, quand la vitesse de translation de la particule tend vers 0. Nous justifions en particulier la formule exploitée dans [13]. En dimension 2, les problèmes dus aux paradoxe de Stokes empêchent de répéter les techniques simples du tridimensionnel. Ceci rajoute des difficultés techniques pour justifier rigoureusement ce développement limité.

#### 1.4. Notations

Comme dans l'introduction, nous utilisons des caractères gras pour indiquer des quantités vectorielles. Ce sont donc des quantités de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou  $3$ . Nous gardons  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  comme base de  $\mathbb{R}^3$  et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  comme base de  $\mathbb{R}^2$ . Nous introduisons également le domaine  $\mathbb{R}_+^d$  correspondant à la réunion de  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{B}}$ .



Le  $\cdot$  correspond au produit scalaire pour les vecteurs et  $:$  est son équivalent pour les matrices. Nous notons  $\top$  la transposition des matrices et toujours  $\perp$  la rotation directe d'angle  $\pi/2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous utilisons également la notation  $\mathcal{B}_\rho$  pour la boule (ouverte) de centre l'origine et de rayon  $\rho$ . Ainsi, dans  $\mathbb{R}^d$ , cela représente la boule de centre  $\mathbf{G}$  et de rayon  $\rho$ . Nous utiliserons la même notation dans des espaces abstraits.

Nous notons  $\nabla\psi$  le gradient d'une fonction scalaire. Pour un champ de vecteur  $\mathbf{u}$  à  $d$  composantes, la même notation représentera la jacobienne. Sa partie symétrique est :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla^\top\mathbf{u}),$$

En dimension 2, nous introduisons  $\nabla^\perp\psi := (\nabla\psi)^\perp$ .

Nous utilisons les notations classiques  $\mathcal{C}_c^\infty$  pour les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, et  $L^p(\Omega)$  et  $H^m(\Omega)$  pour les espaces de Lebesgue et de Sobolev respectivement. Quand  $u \in L^p(\Omega)$  (respectivement  $H^m(\Omega)$ ) nous notons  $|u|_p$  sa norme (respectivement  $\|u\|_m$ ). Si nécessaire, nous ajoutons le domaine  $\Omega$  en indice.

## 2. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle se base sur la considération suivante. Supposons que  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega})$ , satisfait (1.1). Prenant  $\mathbf{w}$  une fonction lisse à support compact dans  $\mathbb{R}_+^d$  et à divergence nulle, telle que  $\mathbf{w}|_{\mathcal{B}}$  soit un mouvement rigide, nous multiplions formellement (1.1) par  $\mathbf{w}$  et nous obtenons, comme dans [11] :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w})) + b_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = m_a g \mathbf{e} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{w}}, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{V}_{\mathbf{w}}$  est la vitesse de translation de  $\mathbf{w}$  sur  $\mathcal{B}$  et :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w})) := 2 \int_{\mathcal{F}} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{w}), \quad b_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\mathcal{F}} ((\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \nabla\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}),$$

$$m_a := m - |\mathcal{B}|.$$

En particulier, si nous prenons formellement  $\mathbf{w} := \mathbf{u}$ , il vient :

$$2 \int_{\mathcal{F}} |D(\mathbf{u})|^2 \leq m_a g \mathbf{e} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{u}}. \quad (2.2)$$

Avant de pousser plus loin la formulation mathématique du problème, remarquons qu'en dimension 3, notre problème satisfait le principe d'invariance

par rotation suivant. Soit  $\mathcal{R}_\psi$  la rotation de  $\mathbb{R}^3$  d'axe dirigé par  $\mathbf{e}_3$  et d'angle  $\psi \in [0, 2\pi)$ . Pour tout  $\mathbf{u}$  à support dans  $\mathbb{R}_+^d$  et à divergence nulle qui soit un mouvement rigide sur  $\mathcal{B}$ , de vitesse de translation  $\mathbf{V}_\mathbf{u}$ , nous notons :

$$S_\psi \mathbf{u}(\mathbf{y}) := \mathcal{R}_\psi \mathbf{u}(\mathcal{R}_{-\psi} \mathbf{y}).$$

Ceci est également un champ de vecteur à support dans  $\mathbb{R}_+^d$  et à divergence nulle dont la valeur sur  $\mathcal{B}$  est un mouvement rigide de vitesse de translation  $\mathcal{R}_\psi \mathbf{V}_\mathbf{u}$ . Remarquons que, pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  :

$$((S_\psi \mathbf{u}, S_\psi \mathbf{v})) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad b(S_\psi \mathbf{u}, S_\psi \mathbf{v}, S_\psi \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (2.3)$$

Ainsi, si  $\mathbf{u}$  satisfait (2.1) pour  $\mathbf{e} \in \mathcal{S}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} ((S_\psi \mathbf{u}, \mathbf{w})) + b_{\mathcal{R}_\psi \mathbf{v}}(S_\psi \mathbf{u}, S_\psi \mathbf{u}, \mathbf{w}) &= ((\mathbf{u}, S_{-\psi} \mathbf{w})) + b_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, S_{-\psi} \mathbf{w}), \\ &= m_a g \mathbf{e} \cdot \mathcal{R}_{-\psi} \mathbf{V}_\mathbf{w}, \\ &= (m_a g \mathcal{R}_\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{V}_\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $S_\psi \mathbf{u}$  satisfait aussi (2.1) avec une autre direction  $\mathbf{e}$  faisant le même angle avec  $\mathbf{e}_3$ . Ceci justifie que nous ayons ajouté (1.2) dans le cas tridimensionnel.

## 2.1. Formulation variationnelle. Espaces

Au vu de l'identité (2.1), l'inconnue principale de (1.1,1.3) est  $\mathbf{u}$ . Dans cette section, nous introduisons l'espace où il est raisonnable de rechercher  $\mathbf{u}$ . À la suite de [20, 11], nous notons  $\mathcal{Y}$  l'ensemble des fonctions  $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^d, \\ \text{il existe } \mathbf{V}_\mathbf{w} \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{\Omega}_\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{d'} \text{ tels que } \mathbf{w}|_{\mathcal{B}} = \mathbf{V}_\mathbf{w} + \mathbf{\Omega}_\mathbf{w} \times' y. \end{cases}$$

En dimension 3, le vecteur de rotation appartient à un espace de dimension  $d' = 3$  alors qu'en dimension 2, la vitesse angulaire est dans un espace de dimension  $d' = 1$ . Sur cet espace  $|\nabla \cdot|_{2, \mathbb{R}_+^2}$  représente une norme. Nous introduisons  $Y$  le complété de  $\mathbf{Y}$  pour cette norme. Nous chercherons nos solutions  $\mathbf{u}$  dans  $Y$ .

Conformément à (2.2), la régularité la plus faible qu'il semble nécessaire de requérir pour une solution stationnaire de notre problème est que l'intégrale de Dirichlet  $|\mathbf{D}(\mathbf{u})|_{2, \mathcal{F}}$  est finie. La définition de  $Y$  et l'estimation d'énergie (2.2) ne coïncident donc pas tout à fait. Dans un cas nous avons le gradient symétrique et dans l'autre le gradient complet. Cependant, nous verrons que les conditions de divergence nulle et d'adhésion aux parois permettent de les mettre en correspondance.

Selon une inégalité de Korn, cet ensemble  $Y$  est, en dimension 3, un sous-espace de  $L^6(\mathbb{R}_+^3)$ . En particulier, tout élément de  $Y$  tend vers 0 à l'infini, au moins dans un sens faible. De plus, comme il a été montré dans [20], à tout élément  $\mathbf{u}$  de  $Y$ , on peut associer une vitesse de translation  $\mathbf{V}_\mathbf{u}$  et une vitesse de rotation  $\mathbf{\Omega}_\mathbf{u}$  telles que,

$$\mathbf{u}|_\mathcal{B} = \mathbf{V}_\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}_\mathbf{u} \times' \mathbf{y}, \text{ presque partout.}$$

Les applications  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{V}_\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{\Omega}_\mathbf{u}$  sont alors linéaires continues à valeur dans un espace de dimension finie.

En dimension 2, l'obtention des conditions aux bords est un problème nouveau. En effet, le problème avec le plan n'a, à notre connaissance été abordé que d'un point de vue perturbatif et sans succès [5]. De plus, dans le cas sans le plan, c'est à dire pour le problème de Navier Stokes extérieur bidimensionnel, il est connu que la contrainte seule que l'intégrale de Dirichlet est finie ne permet pas d'obtenir toutes les conditions aux différents bords simultanément [6]. Ainsi, pour obtenir des solutions G.P. Galdi recherche ses solutions dans un espace fonctionnel plus petit et n'arrive à ces fins, que pour des petites non-linéarités (voir [7] pour une revue du problème de Navier Stokes extérieur bidimensionnel) par une méthode perturbative. Dans notre cas, nous devons donc tirer partie de la présence du plan  $\mathcal{P}$ . Nous montrons, tout d'abord :

LEMME 2.1. — *Il existe deux applications linéaires  $\mathbf{V} : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que, pour tout  $\mathbf{u} \in Y$ , on a  $\mathbf{u}|_\mathcal{B} = \mathbf{V}_\mathbf{u} + \omega_\mathbf{u}\mathbf{y}^\perp$ .*

*Démonstration.* — Étant donné  $\mathbf{u} \in \mathcal{Y}$ , nous pouvons lui appliquer l'inégalité de Poincaré, puisque  $\mathbf{u}|_\mathcal{P} = 0$ , et il existe une constante  $K$  ne dépendant que de  $h$  telle que,

$$\int_0^{h+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}|^2 \leq K \int_0^{h+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \mathbf{u}|^2.$$

Mais, remplaçant  $\mathbf{u}$  par sa valeur dans  $\mathcal{B}$ , il vient :

$$\pi |\mathbf{V}_\mathbf{u}|^2 + \frac{\pi}{2} |\omega_\mathbf{u}|^2 \leq K \int_0^{h+2} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \mathbf{u}|^2.$$

Les applications  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{V}_\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} \mapsto \omega_\mathbf{u}$  sont donc continues de  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}$  respectivement. Le résultat s'obtient en prolongeant ces applications par densité à  $Y$ . On obtient alors l'égalité  $\mathbf{u}|_\mathcal{B} = \mathbf{V}_\mathbf{u} + \omega_\mathbf{u}\mathbf{y}^\perp$ , dans  $L^2(\mathcal{B})$  par exemple, par densité.  $\square$

En ce qui concerne le comportement à l'infini des éléments de  $Y$ , nous adoptons la stratégie de D. Gilbarg et H.F. Weinberger [9] et montrons que

les éléments de  $Y$  tendent vers 0 au sens où la norme  $L^2$  de leur restriction sur les traces des cercles de centre  $\mathbf{G}$  et rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}_+^2$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini. À cette fin, nous prouvons tout d'abord :

LEMME 2.2. — *Il existe une constante  $C < \infty$  telle que, pour tout  $\mathbf{u} \in Y$  :*

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{|\mathbf{u}|^2}{\rho} d\rho d\alpha \leq C |\nabla \mathbf{u}|_2^2. \quad (2.4)$$

où  $(\rho, \alpha)$  représentent les coordonnées polaires centrées en  $\mathbf{G}$  respectivement à  $\mathbf{e}_1$ .

*Démonstration.* — Prenons  $\mathbf{u} \in \mathcal{Y}$ . Comme ci-dessus, les résultats s'étendent à  $Y$  par un argument de densité. Pour  $\rho > r + d$  nous notons :

$$\begin{aligned} \alpha_m(\rho) &:= \min \{ \alpha > -\pi \text{ tel que } (\rho, \alpha) \in \mathcal{F} \}, \\ \alpha_M(\rho) &:= \max \{ \alpha < \pi \text{ tel que } (\rho, \alpha) \in \mathcal{F} \}. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{u}(\rho, \alpha_m(\rho)) = \mathbf{u}(\rho, \alpha_M(\rho)) = 0$ , nous pouvons appliquer l'inégalité de Poincaré et il existe une constante  $C < \infty$ , pour laquelle :

$$\int_{\alpha_m(\rho)}^{\alpha_M(\rho)} |\mathbf{u}|^2(\rho, \alpha) d\alpha \leq C^2 \int_{\alpha_m(\rho)}^{\alpha_M(\rho)} |\partial_\alpha \mathbf{u}|^2(\rho, \alpha) d\alpha.$$

Il est classique que la constante  $C$  optimale dans l'inégalité de Poincaré dépend linéairement de la longueur du segment considérée, ici  $|\alpha_m(\rho) - \alpha_M(\rho)| < 2\pi$ , elle est donc majorée par  $C_0 < \infty$  indépendante de  $\rho$ . D'autre part :

$$\int_{r+h}^{\infty} \left[ \int_{\alpha_m(\rho)}^{\alpha_M(\rho)} \frac{|\partial_\alpha \mathbf{u}|^2}{\rho^2} d\alpha \right] \rho d\rho \leq |\nabla \mathbf{u}|_{2, \mathcal{F}}^2.$$

Ainsi, il existe une constante absolue  $C < \infty$ , pour laquelle :

$$\int_{\mathcal{F} - \mathcal{B}_{r+h}} \frac{|\mathbf{u}|^2}{\rho} d\rho d\alpha \leq C |\nabla \mathbf{u}|_{2, \mathcal{F}}^2.$$

Il nous reste à dominer  $|\mathbf{u}|_{2, \mathcal{F} \cap \mathcal{B}_{r+h}}$ . A cet effet, nous introduisons :

$$\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} - (\mathbf{V}_\mathbf{u} + \omega_\mathbf{u} \mathbf{y}^\perp), \text{ par conséquent, } \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{V}_\mathbf{u} + \omega_\mathbf{u} \mathbf{y}^\perp).$$

Appliquant le **Lemme 2.1**, il existe  $C_V$  et  $C_\omega$  tels que :

$$|\mathbf{V}_\mathbf{u}| \leq C_V |\nabla \mathbf{u}|_2, \quad |\omega_\mathbf{u}| \leq C_\omega |\nabla \mathbf{u}|_2.$$

Comme  $\mathcal{F} \cap \mathcal{B}_{r+h}$  est bornée,  $|\mathbf{V}_u + \omega_u \mathbf{y}^\perp|_{2, \mathcal{F} \cap \mathcal{B}_{r+h}}$  est en particulier majorée par  $C|\nabla \mathbf{u}|_2$ . De plus,

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial \mathcal{B}} = 0, \quad \nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathcal{B}_{r+h} \cap \mathcal{F}} = \nabla \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_u \\ \omega_u & 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent  $|\nabla \tilde{\mathbf{u}}|_{2, \mathcal{B}_{r+h} \cap \mathcal{F}} \leq C|\nabla \mathbf{u}|_2$ . Le résultat en découle, appliquant l'inégalité de Poincaré à  $\tilde{\mathbf{u}}$ .  $\square$

Du lemme technique précédent, nous déduisons :

LEMME 2.3. — *Etant donné  $\mathbf{v} \in Y$ , nous notons :*

$$N[\mathbf{v}](\rho) := \int_{\alpha_m(\rho)}^{\alpha_M(\rho)} |\mathbf{v}|^2 d\alpha.$$

Alors,  $N[\mathbf{v}] : ((r+h), \infty)$  est une fonction absolument continue qui tend vers 0 à l'infini. De plus, il existe une constante  $K$  ne dépendant que de  $(r, h)$  telle que :

$$|N[\mathbf{v}]|_{\infty, (r+h, \infty)} \leq K|\nabla \mathbf{v}|_2.$$

*Démonstration.* — Supposons  $\mathbf{v} \in \mathcal{Y}$ . Pour tous  $\sigma > \rho > (r+h)$ , remarquons que :

$$\begin{aligned} |N[\mathbf{v}](\sigma) - N[\mathbf{v}](\rho)| &= 2 \left| \int_{(\mathcal{F} \cap \mathcal{B}_\sigma) - \mathcal{B}_\rho} \partial_\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\rho \, d\alpha \right|, \\ &\leq 2 \left( \int_{(\mathcal{B}_\sigma - \mathcal{B}_\rho) \cap \mathcal{F}} |\partial_\rho \mathbf{v}|^2 \rho \, d\rho \, d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_{(\mathcal{B}_\sigma - \mathcal{B}_\rho) \cap \mathcal{F}} \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho} \, d\rho \, d\alpha \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme  $\nabla \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{F})$ , nous appliquons le **Lemme 2.2** et :

$$\int_{\mathcal{F}} |\partial_\rho \mathbf{v}|^2 \rho \, d\rho \, d\alpha < \infty, \quad \int_{\mathcal{F}} \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho} \, d\rho \, d\alpha \leq K \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla \mathbf{v}|^2 < \infty.$$

Il vient donc :

$$|N[\mathbf{v}](\sigma) - N[\mathbf{v}](\rho)| \leq K' \left( \int_{(\mathcal{B}_\sigma - \mathcal{B}_\rho) \cap \mathcal{F}} |\partial_\rho \mathbf{v}|^2 \rho \, d\rho \, d\alpha \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla \mathbf{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Par densité, l'inégalité obtenue s'étend à tout  $\mathbf{v} \in Y$ . Par conséquent, pour tout  $\mathbf{v} \in Y$ , la fonction  $N[\mathbf{v}]$  est absolument continue et tend vers une constante à l'infini. Mais, l'estimation (2.4) obtenue dans le lemme précédent assure également que  $N[\mathbf{v}](\rho)/\rho \in L^1((r+h), \infty)$ . Par conséquent, cette constante est nécessairement nulle. La dernière inégalité s'obtient en laissant  $\sigma$  tendre vers l'infini dans (2.5).  $\square$

## 2.2. Formulation variationnelle. Fonctionnelles

Rappelons qu'en dimension 2, comme en dimension 3, l'égalité (2.1) n'a pas de sens *a priori* pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  dans  $Y$  arbitraires. Un moyen de palier à cette déficience est d'imposer que les fonctions-test  $\mathbf{w}$  de (2.1) sont à support compact. Par exemple, que ces fonctions-test sont dans  $\mathcal{Y}$  :

DÉFINITION 2.4. — *Nous appelons solution variationnelle de (1.1,1.3) tout élément  $\mathbf{u} \in Y$  tel que :*

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = m_a g \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{Y}, \quad (2.6)$$

où  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := b_{\mathbf{V}_u}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

Il est à noter qu'un seul terme apparaît au membre de droite de (2.6). Nous appellerons  $m_a g \mathbf{e}$  le *terme source* de la formulation variationnelle. Il représente, pour un régime stationnaire, la *force appliquée* par le fluide sur le solide.

Avant de pousser plus en avant l'étude des solutions variationnelles, remarquons que les objets introduits dans (2.6) sont bien définis. En effet, tout d'abord, nous avons la correspondance suivante entre l'intégrale de Dirichlet et la norme  $|\nabla \cdot|_{2, \mathbb{R}_+^2}$

LEMME 2.5. — *L'application bilinéaire  $((\cdot, \cdot))$  définit un produit scalaire sur  $Y$  dont la norme associée, notée  $\|\cdot\|$  est équivalente à  $|\nabla \cdot|_2$ .*

*Démonstration.* — Ce lemme est une conséquence immédiate de l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} = ((\mathbf{v}, \mathbf{w})), \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in Y^2,$$

qui peut se démontrer par intégration par partie.  $\square$

Par la suite, nous voyons donc  $Y$  comme un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $((\cdot, \cdot))$ . D'autre part, appliquant l'inégalité de Hölder et intégrant par parties, il apparaît :

LEMME 2.6. — *Pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \in Y \times Y \times \mathcal{Y}$ , pour tous réels  $(p_1, q_1, r_1)$  et  $(p_2, q_2)$  tels que :*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 1,$$

on a :

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq |\mathbf{u}|_{p_1} |\nabla \mathbf{v}|_{q_1} |\mathbf{w}|_{r_1} + C_{\mathbf{V}} |\nabla \mathbf{u}|_2 |\mathbf{v}|_{p_2} |\mathbf{w}|_{q_2}.$$

*D'autre part :*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0.$$

Il a été démontré [11, Théorème 3.2] qu'en dimension 3, à une solution variationnelle  $\mathbf{u}$  de (1.1,1.3) on peut associer un triplet  $(p, \mathbf{V}, \Omega)$  tel que  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{V}, \Omega)$  est une solution classique de (1.1,1.3). Il est possible de montrer le même résultat en dimension 2 avec des arguments similaires. Cette propriété se base en effet sur des résultats locaux en espace où la dimension n'a pas d'influence significative. Rappelons juste que, dans la solution complète, nous avons :

$$(\mathbf{u}, p) \in C^\infty(\mathcal{F}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathbf{u}}, \quad \Omega = \Omega_{\mathbf{u}}.$$

En particulier, nous incorporons (1.2) et donnons la définition suivante d'une solution variationnelle du **Problème A** de la façon suivante :

**DÉFINITION 2.7.** — *Nous appelons solution variationnelle du **Problème A** tout couple  $(\mathbf{u}, \theta)$  où  $\theta \in [0, 2\pi)$  et  $\mathbf{u}$  est une solution variationnelle de (1.1,1.3), avec  $m_a g_{\mathbf{e}_0}(\theta)$  pour terme source, et telle que  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$  est parallèle à  $\mathcal{P}$ .*

Il découle immédiatement des observations précédentes sur les solutions variationnelles de (1.1,1.3), que nos solutions variationnelles sont en réalité des solutions classiques du **Problème A**.

### 2.3. La méthode d'exhaustion de Leray

Un moyen de montrer l'existence de solutions variationnelles est d'interpréter la formulation variationnelle du problème, ici (2.6), comme une équation fonctionnelle définie par dualité dans l'espace où l'on recherche notre solution. La faiblesse de notre définition de solution variationnelle apparaît ici, car l'ensemble des fonctions-test est topologiquement plus petit que l'espace dans lequel on recherche  $\mathbf{u}$ . Il nous manquera donc des équations pour définir ces fonctionnelles.

Pour compenser ce défaut, nous nous inspirons d'une méthode que nous qualifions d'exhaustion, utilisée en particulier par J.Leray dans [16]. Pour ce faire, nous introduisons  $\mathcal{D}_R$  une suite croissante d'ouvert bornée de  $\mathbb{R}_+^d$  telle que :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{D}_R \subset \mathbb{R}_+^d, \quad \forall R > r,$$

Par exemple, le domaine  $\mathcal{D}_R$  peut être choisi comme l'intersection de  $\mathbb{R}_+^d$  avec la boule ouverte de centre  $\mathbf{G}$  et de rayon  $R$ , ou, plus exactement, une version lisse de ce domaine. Ensuite, nous introduisons le concept de  $R$ -solution :

DÉFINITION 2.8. — *Etant donné  $R > r$ , nous appelons  $R$ -solution tout couple  $(\mathbf{u}_R, \theta_R) \in (Y \cap H_0^1(\mathcal{D}_R)) \times [0, 2\pi)$  tel que*

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\mathbf{u}_R} \text{ est parallèle à } \mathcal{P}, \\ ((\mathbf{u}_R, \mathbf{w})) + \mathfrak{b}(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{w}) = m_a \mathbf{e}_0(\theta_R) \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{w}}, \quad \forall \mathbf{w} \in (Y \cap H_0^1(\mathcal{D}_R)). \end{cases} \quad (2.7)$$

L'avantage de ce concept de  $R$ -solution est qu'il rentre dans le cadre d'une équation fonctionnelle. En effet, sur  $Y_R := (Y \cap H_0^1(\mathcal{D}_R))$ , l'application  $\mathfrak{b}$  est linéaire continue en ses trois variables. Suite au **Lemme 2.6** et utilisant injections de Sobolev et inégalités d'interpolation, il vient :

$$|\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq C_R \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|. \quad (2.8)$$

Nous avons également l'identité :

$$\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in Y_R^3. \quad (2.9)$$

Ainsi, par abus d'écriture, nous désignerons par  $\mathfrak{b}$  trois applications différentes.

DÉFINITION 2.9. —

1. Si  $\mathfrak{b}$  prend trois arguments  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in Y_R^3$  :

$$\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\mathcal{F}} (\mathbf{u} - \mathbf{V}_{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

2. Si  $\mathfrak{b}$  ne prend que deux arguments  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in Y_R$ , leur image  $\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est l'unique élément de  $Y_R$  tel que :

$$((\mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})) = \mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in Y_R.$$

3. Si  $\mathfrak{b}$  ne prend qu'un argument  $\mathbf{u}$ , nous posons  $\mathfrak{b}(\mathbf{u}) := \mathfrak{b}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in Y_R$ .

Nous aurions dû indexer nos définitions par  $R > r$ . Cependant, dans les sections suivantes, nous travaillerons soit à  $R$  fixé, soit avec la version à trois arguments de  $\mathfrak{b}$  où le paramètre  $R$  n'a pas d'influence significative sur la définition.

Avec ces conventions, nous avons le

LEMME 2.10. — *Pour tout  $R > r$ , un couple  $(\mathbf{u}_R, \theta_R) \in Y_R \times [0, 2\pi)$  est une  $R$ -solution pour  $m_a g$ , si et seulement si :*

$$(\mathbb{I} + \mathfrak{b})(\mathbf{u}_R) = \overline{m_a g \mathbf{e}_0(\theta_R)}, \quad (2.10)$$



où  $\overline{\mathbf{X}}$  désigne, pour tout  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ , l'unique élément de  $Y_R$  tel que :

$$((\overline{\mathbf{X}}, \mathbf{w})) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{w}}, \quad \forall \mathbf{w} \in Y_R.$$

*Démonstration.* — Si  $(\mathbf{u}_R, \theta_R)$  est une  $R$ -solution, alors, pour tout  $\mathbf{w} \in Y_R$ , il vient, par définition, que :

$$(((I + b)(\mathbf{u}_R), \mathbf{w})) = m_a g \mathbf{e}_0(\theta_R) \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{w}} = ((\overline{m_a g \mathbf{e}_0(\theta_R)}, \mathbf{w})).$$

Par conséquent  $(\mathbf{u}_R, \theta_R) \in Y_R \times [0, 2\pi)$  est une solution de l'équation fonctionnelle (2.10). Réciproquement, si  $(\mathbf{u}_R, \theta_R) \in Y_R \times [0, 2\pi)$  est une solution de l'équation fonctionnelle (2.10), alors prenant le produit scalaire de cette équation avec tous les éléments  $\mathbf{w} \in Y_R$ , il apparaît, par définition de  $b$  et  $\overline{m_a g \mathbf{e}_0(\theta_R)}$  que  $(\mathbf{u}_R, \theta_R)$  est une  $R$ -solution pour  $m_a g$ .  $\square$

Par la suite, deux propriétés de  $b$  (en tant que fonction d'une seule variable) seront primordiales. D'une part, utilisant l'inégalité (2.8) :

LEMME 2.11. — *Sur la boule de centre 0 et de rayon  $\frac{1}{2C_{R+1}}$  de  $Y_R$ , l'application  $b : Y_R \rightarrow Y_R$  est contractante.*

D'autre part, le **Lemme 2.6**, associé au théorème de Rellich-Kondrachov sur les injections compactes entre espaces de Sobolev [1] implique :

LEMME 2.12. — *Nous avons les deux assertions suivantes :*

1. *Soit  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $Y_R$  convergeant dans  $Y_R$  muni de sa topologie faible vers  $\mathbf{u} \in Y_R$  alors :*

$$b(\mathbf{u}_n) \text{ converge fortement vers } b(\mathbf{u}) \text{ dans } Y_R. \quad (2.11)$$

2. *Soit  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $Y$  convergeant dans  $Y$  muni de sa topologie faible vers  $\mathbf{u} \in Y$  alors :*

$$b(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}) \rightarrow_{n \in \infty} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in Y. \quad (2.12)$$

Pour plus de détail concernant ce lemme, nous laissons le lecteur se référer à [11]. L'application  $b : Y_R \rightarrow Y_R$  est donc complètement continue et rentre dans le cadre de la théorie du degré topologique de Leray-Schauder.

Bien que la méthode d'exhaustion nous ramène à un cadre fonctionnel agréable, grâce au **Lemme 2.10**, elle serait d'un intérêt fortement limité si nous n'avions le :

LEMME 2.13. — *Etant donné  $m_{ag} \in \mathbb{R}$ , supposons que, pour tout  $R > r$  il existe au moins une  $R$ -solution pour la masse  $m_{ag}$ . Alors, il existe au moins une solution variationnelle du **Problème A** pour la masse  $m_{ag}$ .*

*Démonstration.* — Pour tout  $R > r$ , notons  $\mathbf{u}_R$  une  $R$ -solution. Il en existe au moins une par hypothèse. Testant la formulation variationnelle du problème approché (2.7) avec  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_R$ , nous obtenons, grâce à (2.9) :

$$\|\mathbf{u}_R\|^2 = m_{ag}\mathbf{e}_0(\theta_R) \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{u}_R}, \quad \text{pour tout } R > 1, \quad (2.13)$$

et donc :

$$\|\mathbf{u}_R\| \leq C_V |m_{ag}|. \quad (2.14)$$

Prenant  $R = n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\mathbf{u}_n, \theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite est bornée et admet donc au moins un point d'accumulation  $(\mathbf{u}, \theta)$  dans  $Y \times [0, 2\pi]$ , pour la topologie faible. Le propriété (2.12) du **Lemme 2.12** permet alors de conclure que  $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_0(\theta))$  satisfait (2.6) comme dans le **Théorème 4.6** de [11].  $\square$

Nous remarquons que les solutions du **Problème A** ainsi construites satisfont l'estimation d'énergie (2.2). Une conséquence immédiate de ce lemme est qu'il ramène la preuve du **Théorème 1.1** à démontrer :

THÉORÈME 2.14. — *Pour tout  $m_{ag} \in \mathbb{R}$ , pour tout  $R > r$  il existe au moins une  $R$ -solution pour  $m_{ag}$ .*

Remarquons qu'il existe un degré de liberté quant au signe de  $m_{ag}$ . En effet, s'il existe une solution  $(\mathbf{u}, \theta)$  pour  $m_{ag}$ , alors  $(\mathbf{u}, \theta + \pi 2\pi)$  est aussi une solution pour  $-m_{ag}$ . Dans la section suivante, nous notons  $F := |m_{ag}|$  et nous nous intéressons à l'existence de  $R$ -solutions pour  $F > 0$ .

### 3. Preuve du Théorème 2.14

Tout au long de cette partie  $F$  et  $R$  sont des réels strictement positifs fixés. Etant donné  $\theta \in [0, 2\pi]$ , nous notons :

$$\mathcal{S}(\theta) := \{\mathbf{u} \in Y_R \text{ tel que } (I + \mathbf{b})(\mathbf{u}) = \overline{F\mathbf{e}_0(\theta)}\}.$$

Nous introduisons également  $\pi_3$  la projection sur la composante orthogonale à la direction de  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{aligned} \pi_3 : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Avec ces notations, nous montrons par un argument de degré que l'hypothèse

$$(H) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad 0 \notin \pi_3(\mathcal{S}(\theta)),$$

est absurde.

### 3.1. Étude de $\mathcal{S}(\theta)$

Nous étant restreints à  $Y_R$ , l'application  $b$  est complètement continue. La théorie du degré topologique de Leray-Schauder s'applique donc à l'opérateur  $I + b$  (pour quelques rappels, consulter [15], par exemple). Nous introduisons donc la notation  $\deg(I + b, \mathcal{O}, F\mathbf{e}_0(\theta))$  pour le degré de l'application  $I + b$  au point  $\overline{F\mathbf{e}_0(\theta)}$  sur l'ouvert  $\mathcal{O} \subset Y_R$ . Ceci est bien défini si et seulement si :

$$I + b(\mathbf{u}) \neq \overline{F\mathbf{e}_0(\theta)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \partial\mathcal{O}.$$

Notons  $\rho_F = FC_V + 1$ , et  $\mathcal{B}_\rho := \{\mathbf{u} \in Y_R \text{ tels que } \|\mathbf{u}\| \leq \rho\}$ . Utilisant l'estimation d'énergie (2.14), il vient notamment que

$$\mathcal{S}(\theta) \subset \mathcal{B}_{(\rho_F-1)} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \tag{3.1}$$

La fonction

$$\begin{aligned} \gamma_F : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{N}, \\ \theta &\mapsto \deg(I + b, \mathcal{B}_{\rho_F}, F\mathbf{e}_0(\theta)), \end{aligned}$$

est donc bien définie.

Appliquant le **Lemme 2.11**, il existe  $f^0$  suffisamment petit, tel que l'application  $b$  soit contractante sur  $\mathcal{B}_{\rho_{f^0}}$ . Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , l'équation

$$(I + b)(\mathbf{u}) = f^0\mathbf{e}_0(\theta), \tag{3.2}$$

a alors une unique solution dans cette boule. En terme de degré topologique, le résultat est même plus précis :  $\gamma_{f^0} \equiv 1$ . Etant donné (3.1), l'équation (3.2) a une unique solution dans  $Y_R$ , qui se trouve dans  $\mathcal{B}_{\rho_f}$ . Les propriétés d'additivité et d'homotopie du degré topologique nous assurent alors que, pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} \gamma_F(\theta) &= \deg(I + b, \mathcal{B}_{\rho_F}, F\mathbf{e}_0(\theta)), \\ &= \deg(I + b, \mathcal{B}_{\rho_F}, f^0\mathbf{e}_0(\theta)), \\ &= \deg(I + b, \mathcal{B}_{\rho_{f^0}}, f^0\mathbf{e}_0(\theta)) = 1. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer :

LEMME 3.1. — *Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$  :  $\gamma_F(\theta) = 1$ .*

Ceci implique notamment :

COROLLAIRE 3.2. — *Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , l'ensemble  $\mathcal{S}(\theta)$  est non vide.*

D'un point de vue topologique, les ensembles  $\mathcal{S}(\theta)$  présentent la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.3. — *Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , l'ensemble  $\mathcal{S}(\theta)$  est compact.*

*Démonstration.* — Soit  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{S}(\theta)$ . Comme nous l'avons déjà remarqué, la suite  $\mathbf{u}_n$  est bornée dans  $Y_R$  espace de Hilbert, donc reflexif séparable. Nous pouvons donc [1], quitte à extraire une sous-suite, supposer que  $\mathbf{u}_n$  converge vers  $\mathbf{u}$  dans  $Y_R$  muni de sa topologie faible. De la compacité de  $b$ , la suite  $b(\mathbf{u}_n)$  converge alors fortement vers  $b(\mathbf{u})$  dans  $Y_R$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{u}_n = \overline{F\mathbf{e}_0(\theta)} - b(\mathbf{u}_n).$$

Dans cette égalité, le terme de droite converge fortement vers  $\overline{F\mathbf{e}_0(\theta)} - b(\mathbf{u})$ . Le terme de gauche converge donc également fortement. Ainsi, la suite  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\mathbf{u}$  dans  $(Y_R, \|\cdot\|)$  et  $\mathbf{u}$  satisfait :

$$\mathbf{u} + b(\mathbf{u}) = F\mathbf{e}_0(\theta),$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 3.2. Absurdité de $(H)$

Supposons que, pour tout  $\theta \in [0, 2\pi)$ , pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\theta)$ , la projection  $\pi_3(\mathbf{u})$  soit non nulle. Nous avons :

LEMME 3.4. — *Notant  $\mathbb{R}_*^+ = (0, \infty)$  et  $\mathbb{R}_*^- = (-\infty, 0)$ , sous l'hypothèse  $(H)$ , les fonctions*

$$\begin{aligned} \gamma_F^\varepsilon : [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{N}, \\ \theta &\mapsto \deg(I + b, \mathcal{B}_{\rho_F} \cap \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^\varepsilon), F\mathbf{e}_0(\theta)), \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon \in \{+, -\}$ , sont bien définies et localement constantes.

*Démonstration.* — Montrons le résultat avec  $+$ . Soit  $\theta_0$  fixé. L'hypothèse  $(H)$  implique en particulier  $\pi_3^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{S}(\theta_0) = \emptyset$ . D'autre part, nous avons toujours  $\partial\mathcal{B}_{\rho_F} \cap \mathcal{S}(\theta_0) = \emptyset$ . Or,

$$\partial(\pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+) \cap \mathcal{B}_{\rho_F}) = \partial\mathcal{B}_{\rho_F} \cup (\pi_3^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{B}_{\rho_F}).$$

Par conséquent :

$$\partial(\pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+) \cap \mathcal{B}_{\rho_F}) \cap \mathcal{S}(\theta_0) = \emptyset,$$

et  $\gamma_F^+(\theta_0)$  est bien défini.

L'ensemble  $\mathcal{S}(\theta_0)$  étant compact et  $\pi_3^{-1}(\{0\})$  fermé, on peut les séparer. Il existe donc un ouvert  $\mathcal{V}$  tel que

$$\begin{cases} \mathcal{V} \cap \pi_3^{-1}(\{0\}) = \emptyset, \\ \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+) \cap \mathcal{S}(\theta_0) \subset \mathcal{V}. \end{cases}$$

Montrons par l'absurde que, pour  $\eta$  suffisamment petit :

$$|\theta - \theta_0| \leq \eta \implies \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+) \cap \mathcal{S}(\theta) \subset \mathcal{V}.$$

Supposons en effet que, pour  $\theta_n$  se rapprochant infiniment de  $\theta_0$ , on peut toujours trouver dans  $\mathcal{S}(\theta_n) \cap \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+)$  un élément  $\mathbf{u}_n$  hors de  $\mathcal{V}$ . Cette suite  $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet alors un point d'accumulation qui se trouve à la fois dans  $\mathcal{V}^c$  et, selon un raisonnement similaire à la démonstration de la **Propriété 3.3**, dans  $\pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+) \cap \mathcal{S}(\theta_0)$ . Or, ces deux ensembles sont disjoints. Nous aboutissons donc à une absurdité.

Les différentes propriétés du degré topologique (normalisation, additivité et homotopie) nous assurent alors que :

$$\begin{aligned} \gamma_F^+(\theta) &= \deg(\mathbf{I} + \mathbf{b}, \mathcal{B}_{\rho_F} \cap \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+), F\mathbf{e}(\theta)), \\ &= \deg(\mathbf{I} + \mathbf{b}, \mathcal{V}, F\mathbf{e}(\theta)), \\ &= \deg(\mathbf{I} + \mathbf{b}, \mathcal{V}, F\mathbf{e}(\theta_0)), \\ &= \deg(\mathbf{I} + \mathbf{b}, \mathcal{B}_{\rho_F} \cap \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+), F\mathbf{e}(\theta)) = \gamma_F^+(\theta_0), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Nous sommes désormais en mesure de montrer que (H) est absurde. En effet, l'estimation d'énergie (2.13) nous garantit, en particulier, que, pour tout élément  $\mathbf{u}$  de  $\mathcal{S}(\theta)$ , la vitesse de translation  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$  est dirigé dans le sens de  $\mathbf{e}_0(\theta)$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_0(\theta) \geq \|\mathbf{u}\|^2 > 0.$$

Ainsi, pour  $\theta = 0$ , comme  $\mathbf{e}_0(0) = -\mathbf{e}_3$ , il vient :

$$\mathcal{S}(0) \subset \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^-).$$

D'autre part, pour  $\theta = \pi$ , nous avons  $\mathbf{e}_0(\pi) = \mathbf{e}_3$  et, par conséquent :

$$\mathcal{S}(\pi) \subset \pi_3^{-1}(\mathbb{R}_*^+).$$

Or, en terme de degré topologique :  $\gamma_F = \gamma_F^+ + \gamma_F^-$ , et donc :

$$\gamma_F(0) = \gamma_F^+(0) \text{ et } \gamma_F^-(0) = 0, \quad \gamma_F(\pi) = \gamma_F^-(\pi) \text{ et } \gamma_F^+(\pi) = 0. \quad (3.3)$$

Les fonctions  $\gamma_F^+$  et  $\gamma_F^-$  étant localement constante sur  $[0, \pi]$ , connexe, elles sont constantes. Ainsi :

$$\gamma_F^-(\pi) = \gamma_F^-(0) = 0.$$

Finalement  $\gamma_F(\pi) = 0$ , ce qui contredit le résultat du **Lemme 3.1**. Il existe donc  $\theta_R \in [0, \pi]$  et  $\mathbf{u}_R \in \mathcal{S}(\theta_R)$  tels que  $\pi_3(\mathbf{u}_R) = 0$ . Ce couple  $(\mathbf{u}_R, \theta_R)$  est une  $R$ -solution pour  $F$ . Ceci achève la preuve du **Théorème 2.14**.

Notons qu'un raisonnement similaire nous aurait également donné une solution entre  $\pi$  et  $2\pi$  ce qui est réminiscent du degré de liberté sur le signe de  $m_a g$ .

#### 4. Quelques résultats sur l'approximation linéaire du problème de chute libre

Avant de nous intéresser au développement asymptotique des forces appliquées au solide au voisinage de l'approximation linéaire, nous rappelons différents résultats connus sur ce modèle linéaire, le modèle de Stokes.

##### 4.1. Problèmes d'intégrabilité

Dans le cadre de l'approximation de Stokes, le système (1.1,1.3) se réécrit en négligeant le terme quadratique en  $(\mathbf{u}, \mathbf{V})$ . De plus, dans l'idée de se servir des solutions de ce système comme fonctions-test pour notre formulation variationnelle, nous réécrivons (1.1,1.3) pour une vitesse de translation  $\mathbf{V}$  fixée, en nous affranchissant de la relation d'équilibre des forces en contrepartie.

Pour une vitesse de translation  $\mathbf{V}$  le système en les inconnues  $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\Omega})$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad \begin{cases} \mathbf{u}|_{\mathcal{P}} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\infty} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial \mathcal{B}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \times' \mathbf{y} d\sigma = 0. \quad (4.2)$$

Nous lui associons, comme dans le cas de Navier-Stokes, un concept de solution variationnelle. et un concept de  $R$ -solution :

**DÉFINITION 4.1.** — *Nous appelons solution variationnelle du Problème Stokes pour  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^d$  tout  $\mathbf{u} \in Y$  tel que*

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\mathbf{u}} = \mathbf{V} \\ ((\mathbf{u}, \mathbf{w})) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in Y \text{ tel que } \mathbf{V}_{\mathbf{w}} = 0. \end{cases}$$

DÉFINITION 4.2. — Nous appelons *R-solution de Stokes* pour  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^d$  tout  $\mathbf{u} \in Y_R$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\mathbf{u}} = \mathbf{V} \\ ((\mathbf{u}, \mathbf{w})) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in Y_R \text{ tel que } \mathbf{V}_{\mathbf{w}} = 0. \end{cases}$$

De la linéarité du problème, deux solutions vont particulièrement retenir notre attention. Nous notons :

- $\mathbf{u}_{\perp}$  la solution variationnelle du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_3$ ,
- $\mathbf{u}_{1,\parallel}$  la solution variationnelle du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_1$ ,

Ces notions ont, bien sûr, un sens en dimension 2, comme en dimension 3. En dimension 3, nous aurons également besoin de :

- $\mathbf{u}_{2,\parallel}$  la solution variationnelle du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V} = \mathbf{e}_2$ ,

De même que pour les équations de Navier Stokes, à toute solution variationnelle  $\mathbf{u}$  du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V}$ , il est possible d'associer un couple  $(p, \Omega)$  tel que  $(\mathbf{u}, p, \Omega)$  soit solution de (4.1,4.2). Nous avons, en particulier, la propriété de régularité suivante :

LEMME 4.3. — *Supposons que  $\mathbf{u}$  est solution variationnelle du Problème Stokes pour  $\mathbf{V}$ , alors :*

$$\nabla \mathbf{u} \in L^\gamma(\mathcal{F}) \quad \forall \gamma \in (1, 2].$$

*Démonstration.* — Soit  $(p, \Omega, m_a \mathbf{g})$  tel que  $(\mathbf{u}, p, \Omega, \mathbf{V}, \Omega)$  soit solution de (4.1,4.2), avec  $m_a \mathbf{g}$ . Rappelons qu'en particulier :

$$(\mathbf{u}, p) \in C^\infty(\mathcal{F}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathbf{u}}, \quad \Omega = \Omega_{\mathbf{u}}.$$

Prenons maintenant  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  satisfaisant :

$$\chi(\mathbf{y}) \begin{cases} = 0 & \text{pour tout } \mathbf{y} \text{ tel que } |\mathbf{y}| \leq r + \frac{h}{4}, \\ = 1 & \text{pour tout } \mathbf{y} \text{ tel que } |\mathbf{y}| \geq r + \frac{3h}{4}, \\ \in [0, 1] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posant  $\tilde{\mathbf{u}} := \chi \mathbf{u}$  et  $\tilde{p} := \chi p$ , il vient :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = p \nabla \chi - \Delta \chi \mathbf{u} - 2[(\nabla \chi) \cdot \nabla] \mathbf{u} =: \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \chi \cdot \mathbf{u} =: g. \end{cases} \quad \text{dans le demi-espace } \mathbb{R}_+^d,$$

avec la condition au bord  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\mathcal{P}} = 0$ . Utilisant les résultats locaux sur  $\mathbf{u}$  et  $p$  :

$$\mathbf{f} \in W^{-1,\gamma}(\mathbb{R}_+^d), \quad g \in L^\gamma(\mathbb{R}_+^d), \quad \forall \gamma \in (1, 2].$$

De l'ellipticité du problème de Stokes [8, Théorème 3.3, p. 200], il vient alors que  $\nabla \tilde{\mathbf{u}} \in L^\gamma(\mathbb{R}_+^d)$ , et donc :

$$\nabla \mathbf{u} \in L^\gamma(\mathcal{F} \cap \{|\mathbf{y}| > r + \frac{3h}{4}\}), \quad \forall \gamma \in (1, 2].$$

Cette propriété étant vraie localement, nous obtenons le résultat attendu.  $\square$

En dimension 2, la structure des champs de vecteur à divergence nulle implique une description encore plus précise de ces solutions variationnelles de Stokes. En particulier, elles ont toutes, indépendamment du choix de la donnée  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2$ , le comportement à l'infini [5] :

$$|\mathbf{u}(\mathbf{y})| \leq \frac{c_0}{|\mathbf{y}|}, \quad |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})| \leq \frac{c_1}{|\mathbf{y}|^2}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{F}, \quad (4.3)$$

avec  $c_0$  et  $c_1$ , ne dépendant que de la géométrie du domaine. En effet, comme dans la démonstration précédente, nos solutions du problème de Stokes peuvent être vues, à l'infini, comme des solutions d'un problème de Stokes sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  avec une donnée  $\mathbf{f}$  à support compact au second membre. Ce développement est alors obtenu en utilisant une représentation intégrale. Il est à noter que le type de décroissance est lié au fait que les termes source sont à support compact.

Pour  $\mathbf{u}_\perp$ , ce développement asymptotique implique en particulier :

LEMME 4.4. — *Il existe  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$  telle que  $(\mathbf{u}_\perp)|_{\mathcal{F}} = \nabla^\perp \psi$ . De plus,*

$$|\psi(\mathbf{y})| \leq c \ln(1 + |\mathbf{y}|), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{F}. \quad (4.4)$$

avec  $c$  une constante qui ne dépend que de  $(r, h)$ .

*Démonstration.* — Tout d'abord, rappelons que  $\mathbf{u}_\perp$  est régulière sur  $\overline{\mathcal{F}}$ , il existe donc une extension de  $\mathbf{u}_\perp$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  qui soit  $C^\infty$  et que nous notons toujours  $\mathbf{u}_\perp$ . Considérant  $\mathbf{v} = (-u_{\perp,3}, u_{\perp,1})^\top$ , comme  $\operatorname{div}(\mathbf{u}_\perp) = 0$ , il vient  $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0$ . Par conséquent,

$$\psi(\mathbf{y}) := \int_{\mathbf{G}}^{\mathbf{y}} \mathbf{v}, \quad \text{est bien définie et satisfait } \nabla^\perp \psi = \mathbf{u}_\perp.$$

La régularité de  $\psi$  est alors une conséquence de la régularité de  $\mathbf{u}_\perp$ . De plus, pour tout  $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$  il apparaît que :

$$\psi(\mathbf{y}) = \psi\left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) + \int_1^{|\mathbf{y}|} \frac{d}{dt} \left[ \psi\left(t \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) \right] dt.$$



Par conséquent, appliquant (4.3) :

$$|\psi(\mathbf{y})| \leq |\psi|_{\infty, \partial\mathcal{B}} + c_0 \ln(|\mathbf{y}|).$$

□

#### 4.2. Étude d'un point de vue variationnel.

L'existence d'une unique solution variationnelle pour le **Problème Stokes** pour un vecteur vitesse donné s'obtient par le théorème de Riesz ou le théorème de Lax-Milgram (voir [1]). En particulier, la recherche de solution peut se reformuler par un problème de minimisation :

PROPRIÉTÉ 4.5. — *Étant donné  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^d$ , la solution variationnelle du Problème Stokes pour le vecteur  $\mathbf{V}$  est l'unique  $\mathbf{u} \in Y$  réalisant le minimum :*

$$\inf \{ \|\mathbf{v}\|, \mathbf{v} \in Y, \text{ telle que } \mathbf{V}_{\mathbf{v}} = \mathbf{V} \}.$$

Une fois résolu ce problème, les solutions obtenues permettent de construire un endomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^d$  de la façon suivante. À tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^d$ , nous associons  $\mathbf{s}_{\mathbf{V}}$  la solution variationnelle du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V}$ . Du lemme des multiplicateurs de Lagrange, il existe alors un unique vecteur  $\Sigma_{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^d$  tel que :

$$((\mathbf{s}_{\mathbf{V}}, \mathbf{w})) = \Sigma_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{w}}, \quad \forall \mathbf{w} \in Y.$$

On pourra remarquer que, pour la solution  $\mathbf{s}_{\mathbf{V}}$ , notant  $p_{\mathbf{V}}$  la pression associée, telle que  $(\mathbf{s}_{\mathbf{V}}, p_{\mathbf{V}})$  est solution de (4.1), nous avons :

$$\Sigma_{\mathbf{V}} = \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbb{T}(\mathbf{s}_{\mathbf{V}}, p_{\mathbf{V}})\mathbf{n}) d\sigma,$$

la force appliquée par le fluide sur la particule. Cette nouvelle application  $\Sigma$  a les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 4.6. —  *$\Sigma$  est diagonalisable avec deux valeurs propres  $\alpha_{\perp}$  et  $\alpha_{\mathcal{P}}$ , les espaces propres associés étant respectivement  $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$  et son orthogonal dans  $\mathbb{R}^d$ , la direction de  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* — Tout d'abord, pour tout  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  dans  $\mathbb{R}^d$ , testant successivement la caractérisation de  $\Sigma_{\mathbf{V}}$  contre  $\mathbf{s}_{\mathbf{W}}$  et la caractérisation de  $\Sigma_{\mathbf{W}}$  contre  $\mathbf{s}_{\mathbf{V}}$ , il vient :

$$\Sigma_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{W} = \Sigma_{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{V}, \tag{4.5}$$

l'endomorphisme  $\Sigma$  est donc symétrique. De l'invariance par rotation (2.3), il commute avec toutes les rotations d'axe  $\mathbf{e}_3$ . Les espaces propres de  $\Sigma$  sont les espaces stables de ces rotations, *i.e.*  $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$  et son orthogonal dans  $\mathbb{R}^d$ . L'invariance par rotation implique de plus que, par restriction à l'orthogonal de  $\mathbf{e}_3$ , l'application  $\Sigma$  est une homothétie.  $\square$

Combinant les différentes définitions de  $\mathbf{s}_V$  et  $\Sigma$ , et la propriété précédente :

PROPRIÉTÉ 4.7. — Pour tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^d$ ,

1. si  $\mathbf{V}$  est parallèle à  $\mathbf{e}_3$ , alors, pour tout  $\mathbf{u} \in Y$  tel que  $\mathbf{V}_u = \mathbf{V}$  :

$$\|\mathbf{u}\| \geq \alpha_\perp |\mathbf{V}|,$$

avec égalité, si et seulement si  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_V$ .

2. si  $\mathbf{V}$  est orthogonal à  $\mathbf{e}_3$ , alors, pour tout  $\mathbf{u} \in Y$  tel que  $\mathbf{V}_u = \mathbf{V}$  :

$$\|\mathbf{u}\| \geq \alpha_P |\mathbf{V}|,$$

avec égalité, si et seulement si  $\mathbf{u} = \mathbf{s}_V$ .

Une autre application remarquable de l'invariance par rotation avec les solutions variationnelles du **Problème Stokes** est la

PROPRIÉTÉ 4.8. — Nous avons les identités remarquables suivantes,

1. en dimension 2 :

$$b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}) = 0, \quad (4.6)$$

2. en dimension 3 :

$$b(\mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{j,\parallel}, \mathbf{u}_{k,\parallel}) = 0, \quad \text{pour tout } i, j, k = 1, 2. \quad (4.7)$$

*Démonstration.* — Tout d'abord en dimension 2, du développement asymptotique (4.3) des solutions variationnelles du **Problème Stokes**, nous savons que :

$$|(\mathbf{u}_{1,\parallel} - \mathbf{e}_1) \cdot \nabla \mathbf{u}_{1,\parallel} \cdot \mathbf{u}_{1,\parallel}|(\mathbf{y}) \leq \frac{c}{|\mathbf{y}|^3}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{F}.$$

Or, le membre de droite de cette inégalité appartient à  $L^1(\mathcal{F})$ . Par conséquent, la quantité  $b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel})$  est bien définie.

En dimension 3, du fait que les solutions variationnelles du **Problème Stokes** sont dans  $Y$ , elles sont également dans  $L^6(\mathbb{R}_+^3)$ . Associé au résultat de régularité **Lemme 4.3**, il vient, via une inégalité de Hölder, que, pour tout  $i, j, k \in \{1, 2\}$ , la fonction

$$(\mathbf{u}_{i,\parallel} - \mathbf{e}_i) \cdot \nabla \mathbf{u}_{j,\parallel} \cdot \mathbf{u}_{k,\parallel} \in L^1(\mathcal{F}),$$

et que :

$$|\mathbf{b}(\mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{j,\parallel}, \mathbf{u}_{k,\parallel})| \leq \|\mathbf{u}_{i,\parallel}\|_6 \|\nabla \mathbf{u}_{j,\parallel}\|_{\frac{3}{2}, \mathcal{F}} \|\mathbf{u}_{k,\parallel}\|_6 + \|\nabla \mathbf{u}_{j,\parallel}\|_{\frac{6}{5}, \mathcal{F}} \|\mathbf{u}_{k,\parallel}\|_6.$$

Ensuite, pour  $i = 1, 2$ , de l'invariance par rotation (2.3) d'une part, et de la linéarité de la formulation variationnelle définissant la solution du **Problème Stokes** d'autre part, les deux éléments  $S_\pi \mathbf{u}_{i,\parallel}$  et  $-\mathbf{u}_{i,\parallel}$ , de  $Y$  sont solutions variationnelles du **Problème Stokes** pour  $\mathbf{V} = -\mathbf{e}_i$ . Par conséquent, ils sont égaux. Utilisant l'invariance par rotation (2.3), il vient, en dimension 3 par exemple, pour tout  $(i, j, k) \in \{1, 2\}$  :

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{j,\parallel}, \mathbf{u}_{k,\parallel}) = \mathbf{b}(S_\pi \mathbf{u}_{i,\parallel}, S_\pi \mathbf{u}_{j,\parallel}, S_\pi \mathbf{u}_{k,\parallel}) = -\mathbf{b}(\mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{j,\parallel}, \mathbf{u}_{k,\parallel}) = 0.$$

□

## 5. Orientation de la gravité dans le cas des régimes lents

Pour obtenir plus de précision sur la force appliquée par le fluide sur la particule dans le cas de nos configurations stationnaires, nous nous plaçons au voisinage de l'approximation linéaire, *i.e.*, dans le cas des régimes lents. Afin de mesurer la vitesse de l'écoulement, il nous faut une vitesse caractéristique. Nous choisissons la vitesse de translation de la particule  $\mathbf{V}$ . De ce fait, nous appliquons le **Théorème 1.2** qui stipule que, pour tout  $\mathbf{V} = \lambda \mathbf{e}_1$  avec  $\lambda > 0$  notre paramètre, il existe un solution de (1.1,1.3) pour un certain vecteur  $m_a g \mathbf{e}$ . Le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et le vecteur  $m_a g \mathbf{e}$  associés seront notés  $\mathbf{u}_\lambda$  et  $\mathbf{F}_\lambda$  respectivement. Par définition, nous avons alors, pour tout  $\lambda > 0$  :

$$\begin{cases} ((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w})) + \mathbf{b}(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}) = \mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{V}_\mathbf{w}, & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{Y}, \\ \mathbf{V}_{\mathbf{u}_\lambda} = \lambda \mathbf{e}_1. \end{cases}$$

Notons que, l'estimation d'énergie (2.2) associée à la **Propriété 4.7** et au **Lemme 2.1** impliquent que :

$$\alpha_P^2 \lambda^2 \leq \|\mathbf{u}_\lambda\|^2 \leq C_V |\mathbf{F}_\lambda| \lambda. \quad (5.1)$$

D'autre part, prenant des fonctions test adéquates dans la formulation variationnelle définissant  $\mathbf{u}$ , nous obtenons qu'il existe deux constantes  $(C_1, C_2)$  pour lesquelles :

$$|\mathbf{F}_\lambda| \leq C_1\lambda + C_2\lambda^2.$$

Ainsi, quand  $\lambda$  tend vers 0, la masse relative  $m_a$  de la particule dans la configuration stationnaire tend vers 0. Du point de vue de la particule, regarder des écoulements lents revient donc à s'intéresser à des particules dont la masse est proche d'un volume équivalent de fluide.

### 5.1. Formules de représentation

Rappelons qu'en dimension 3, l'espace  $Y$  s'injecte dans  $L^6(\mathbb{R}_+^3)$  alors qu'en dimension 2, il ne s'injecte *a priori* dans aucun espace  $L^p(\mathbb{R}_+^2)$ . Ceci va rejaillir dans le mode de calcul des composantes de la gravité. Nous ne pourrons en particulier obtenir de formule aussi précise en dimension 2 qu'en dimension 3. Des passages techniques vont devoir se rajouter.

En dimension 3, nous reconstruisons  $\mathbf{F}$  de la façon suivante :

LEMME 5.1. — *Étant donné  $\lambda > 0$ , nous avons :*

$$\mathbf{F}_\lambda = \sum_{i=1}^2 \left( ((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{i,\parallel}) - b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_\lambda)) \mathbf{e}_i + ((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\perp) - b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\perp, \mathbf{u}_\lambda)) \mathbf{e}_3 \right). \quad (5.2)$$

*Démonstration* Il est à noter que, dans cette formule, nous avons choisi un ordre bien précis pour les arguments de  $b$ . Nous voulons en effet nous servir au mieux des informations obtenues sur le gradient des solutions du **Problème Stokes** afin de donner un sens à ces termes.

Nous montrons que :

$$\mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_1 = ((\mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,\parallel}) - b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_\lambda)).$$

Nous obtenons les autres termes de façon analogue.

Rappelons que, via l'inégalité de Hölder (**Lemme 2.6**), vue l'intégrabilité de  $\nabla \mathbf{u}_{1,\parallel}$  (**Lemme 4.3**), le terme  $b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_\lambda)$  est bien défini et :

$$|b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_\lambda)| \leq |\mathbf{u}_\lambda|_{6,\mathcal{F}}^2 |\nabla \mathbf{u}_{1,\parallel}|_{\frac{3}{2},\mathcal{F}} + C_V \|\mathbf{u}_\lambda\| |\mathbf{u}_\lambda|_{6,\mathcal{F}} |\nabla \mathbf{u}_{1,\parallel}|_{\frac{6}{5},\mathcal{F}}. \quad (5.3)$$

De plus, nous construisons, par troncature et régularisation, une suite  $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant :

(a) pour tout  $n \in \mathbb{N} : \mathbf{V}_{\mathbf{w}_n} = \mathbf{e}_1$ , et  $\mathbf{w}_n$  est à support compact.

(b) pour tout  $\gamma \in (1, 2]$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla(\mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{1,||})|_{\gamma, \mathcal{F}} = 0.$$

Du fait que  $\mathbf{w}_n$  est à support compact, nous l'utilisons dans la formulation variationnelle et nous faisons l'intégration par partie dans b. Il vient donc :  $((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}_n)) - b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}_n, \mathbf{u}_\lambda) = \mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_1$ . Or, d'une part,

$$|((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{1,||}))| \leq C \|\mathbf{u}_\lambda\| |\nabla(\phi_n - \mathbf{u}_{1,||})|_{2, \mathcal{F}}$$

d'autre part, comme dans (5.3) :

$$|b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{1,||}, \mathbf{u}_\lambda)| \leq \|\mathbf{u}_\lambda\|_{6, \mathcal{F}}^2 |\nabla(\mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{1,||})|_{\frac{3}{2}, \mathcal{F}} + C_V \|\mathbf{u}_\lambda\| \|\mathbf{u}_\lambda\|_{6, \mathcal{F}} |\nabla(\mathbf{w}_n - \mathbf{u}_{1,||})|_{\frac{6}{5}, \mathcal{F}}. \quad (5.4)$$

Des résultats de convergence sur  $\mathbf{w}_n$ , le résultat apparaît en laissant  $n$  tendre vers l'infini.  $\square$

Comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, un tel résultat est inespérable en dimension 2. Il faut donc travailler avec ce que nous avons à notre disposition : les fonctions à support compact. Par exemple, nous pouvons prendre, pour tout  $R > r$ ,  $\mathbf{u}_{1,||}^R$  comme la  $R$ -solution de Stokes pour la vitesse de translation  $\mathbf{e}_1$ . Il vient alors, que, pour tout  $\lambda > 0$ , pour tout  $R > r$  :

$$\mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_1 = ((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{1,||}^R)) + b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_{1,||}^R), \quad (5.5)$$

Cependant, du fait que nous connaissons plus précisément  $\mathbf{u}_\perp$ , nous pouvons être plus précis concernant le choix dans cette autre direction. A cet effet, nous introduisons une fonction de troncature  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  satisfaisant :

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

et  $\phi^R(\mathbf{y}) := \chi\left(\frac{|\mathbf{y}| - R}{R}\right)$ . Pour tout  $R > r$ , nous définissons alors avec les notations du **Lemme 4.4** :

$$\mathbf{u}_\perp^{2R} := \nabla^\perp(\phi^R \psi). \quad (5.6)$$

Ainsi, pour tout  $R > r$ , la fonction  $\mathbf{u}_\perp^{2R}$  satisfait :  $\mathbf{u}_\perp^{2R} \in Y_{2R}$  avec  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}_\perp^{2R}} = \mathbf{e}_3$ , et, comme pour la première composante, nous avons :

$$\mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_3 = ((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\perp^{2R})) + b(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\lambda, \mathbf{u}_\perp^{2R}), \quad \text{pour tout } R > r. \quad (5.7)$$

Cette famille d'approximations satisfait :

PROPRIÉTÉ 5.2. — *Étant donné  $p > 1$ , il existe une constante  $c(p)$  et un rayon  $R_p > r$  tel que, pour tout  $R > R_p$ , nous avons :*

$$|\nabla(\mathbf{u}_\perp^{2R} - \mathbf{u}_\perp)|_p \leq \frac{c(p) \ln(R)}{R^{2(1-\frac{1}{p})}},$$

Il existe une constante  $k < \infty$  telle que, pour tout  $R > r$  :

$$\int_r^\infty \sup_\alpha \{|\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}|(\rho, \alpha)\} \rho \, d\rho \leq k \ln(R).$$

*Démonstration.* — Par définition :

$$\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R} - \nabla \mathbf{u}_\perp = (\phi^R - 1)\nabla \mathbf{u}_\perp + \nabla \phi^R \otimes \mathbf{u}_\perp + \nabla \psi \otimes (\nabla^\perp \phi^R) + \psi \nabla (\nabla^\perp \phi^R),$$

où, pour tous vecteurs  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (\mathbb{R}^2)^2$ , la matrice  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  représente la matrice tensorielle construite à partir de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Appliquant, les majorations connues sur  $\mathbf{u}_\perp$  (4.3), il vient :

$$|(\phi^R - 1)\nabla \mathbf{u}_\perp|_{p, \mathcal{F}} \leq c_1 \left[ \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{c_1}{R^{2(1-\frac{1}{p})}}.$$

et, pour tout couple  $(r, s)$  satisfaisant  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$  et  $s > 2$  :

$$|\nabla \phi^R \otimes \mathbf{u}_\perp|_{p, \mathcal{F}} \leq |\nabla \phi^R|_{r, \mathcal{F}} |\mathbf{u}_\perp|_{s, \mathcal{F} - \mathcal{F}_R}.$$

Avec,

$$\begin{aligned} |\nabla \phi^R|_{r, \mathcal{F}} &\leq (2\pi)^{\frac{1}{r}} \left[ \int_r^\infty \left| \frac{1}{R} \chi' \left( \frac{\rho - R}{R} \right) \right|^r \rho \, d\rho \right]^{\frac{1}{r}}, \\ &\leq \frac{(2\pi)^{\frac{1}{r}}}{R^{(1-\frac{2}{r})}} \left[ \int_0^\infty |\chi'(t)|^r (t+1) \, dt \right]^{\frac{1}{r}}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

et donc :

$$|\nabla \phi^R|_{r, \mathcal{F}} \leq \frac{k(r)}{R^{(1-\frac{2}{r})}} \text{ et } |\mathbf{u}_\perp|_{s, \mathcal{F} - \mathcal{F}_R} \leq \frac{c_0}{R^{(1-\frac{2}{s})}}.$$

Par conséquent, il existe  $k(p) < \infty$  tel que :

$$|\nabla \phi^R \otimes \mathbf{u}_\perp|_{p, \mathcal{F}} \leq \frac{k(p)}{R^{2(1-\frac{1}{p})}}.$$

De la même façon :

$$|\nabla \psi \otimes \nabla^\perp \phi^R|_p = |\nabla^\perp \psi \otimes \nabla \phi^R|_p \leq \frac{k(p)}{R^{2(1-\frac{1}{p})}}.$$

Et, finalement :

$$|\psi \nabla(\nabla^\perp \phi^R)|_p \leq |\psi|_{\infty, \mathcal{F}_{2R}} |\nabla(\nabla^\perp \phi^R)|_p,$$

où, selon la majoration (4.4) et de façon similaire à (5.8) :

$$|\nabla(\nabla^\perp \phi^R)|_p \leq \frac{k'(p)}{R^{2(1-\frac{1}{p})}} \text{ et } |\psi|_{\infty, \mathcal{F}_{2R}} \leq c \ln(1 + 2R).$$

En conséquence :

$$|\psi \nabla(\nabla^\perp \phi^R)|_p \leq \frac{k(p) \ln(1 + 2R)}{R^{2(1-\frac{1}{p})}}.$$

Nous obtenons ainsi la première partie du résultat. Pour la seconde partie, nous atteignons l'exposant critique  $p = 1$ , pour lequel le premier terme dans la somme précédente n'est *a priori* pas défini. Cependant, nous avons :

$$\int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}| \rho \, d\rho \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4,$$

avec, utilisant les mêmes résultats sur le comportement à l'infini de  $\mathbf{u}_\perp$  (4.3) :

$$J_1 := \int_r^\infty \sup_\alpha |\phi_R \nabla \mathbf{u}_\perp| \rho \, d\rho \leq c_0 \ln(1 + 2R),$$

$$J_2 := \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \phi^R \otimes \mathbf{u}_\perp| \rho \, d\rho \leq |\nabla \phi^R|_2 \left( \int_R^{2R} \left( \sup_\alpha |\mathbf{u}_\perp| \right)^2 \rho \, d\rho \right)^{\frac{1}{2}} \leq k.$$

Toujours avec la même technique :

$$J_3 := \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \psi \otimes (\nabla^\perp \phi^R)| \rho \, d\rho \leq k.$$

Et, finalement :

$$\begin{aligned} J_4 &:= \int_r^\infty \sup_\alpha |\psi \nabla(\nabla^\perp \phi^R)| \rho \, d\rho \\ &\leq c_1 \ln(1 + 2R) \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla(\nabla^\perp \phi^R)| \rho \, d\rho \leq k \ln(1 + 2R), \end{aligned}$$

ce qui conclut la deuxième partie de la preuve.  $\square$

Nous rappelons également que les solutions variationnelles  $\mathbf{u}_\lambda$  du **Problème A** sont obtenues comme limites faibles de  $R$ -solutions  $\mathbf{u}_\lambda^R$ . En particulier, nous notons  $\mathbf{F}_\lambda^R$  la force appliquée de la formulation faible pour  $\mathbf{u}_\lambda^R$ . Et, la force  $\mathbf{F}_\lambda$  est la limite de  $\mathbf{F}_\lambda^R$  quand  $R$  va à l'infini. De plus, pour tout  $R$  suffisamment grand, nous avons les formules de représentations :

$$\mathbf{F}_\lambda^R \cdot \mathbf{e}_1 = ((\mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_{1,\parallel}^R)) + b(\mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_{1,\parallel}^R), \quad \mathbf{F}_\lambda^R \cdot \mathbf{e}_3 = ((\mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_\perp^R)) + b(\mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_\lambda^R, \mathbf{u}_\perp^R). \quad (5.9)$$

### 6. Passage à la limite. Cas de la dimension 3

Nous obtenons le développement limité suivant de  $\mathbf{F}_\lambda$  au voisinage de 0.

THÉORÈME 6.1. — *Pour  $\lambda$  au voisinage de 0, nous avons :*

$$\mathbf{F}_\lambda = \lambda \alpha_{\mathcal{P}} \mathbf{e}_1 - \lambda^2 b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_\perp, \mathbf{u}_{1,\parallel}) \mathbf{e}_3 + o(\lambda^2). \quad (6.1)$$

Pour démontrer ce théorème, nous nous intéressons, dans un premier temps, au comportement des solutions variationnelles  $\mathbf{u}_\lambda$  quand  $\lambda$  tend vers 0 :

LEMME 6.2. — *Pour  $\lambda$  au voisinage de 0, nous avons :*

$$\mathbf{u}_\lambda = \lambda \mathbf{u}_{1,\parallel} + o(\lambda), \quad (6.2)$$

pour la norme  $\|\cdot\|$  sur  $Y$ .

*Démonstration.* — Tout d'abord, remarquons que, de l'estimation d'énergie (2.14), nous savons que :  $\|\mathbf{u}_\lambda\| \leq K\lambda$ . Par conséquent, nous introduisons  $\mathbf{z}_\lambda = \mathbf{u}_\lambda/\lambda$ . Cette suite est bornée dans  $Y$  et admet au moins un point d'accumulation pour la topologie faible. D'autre part, pour tout point d'accumulation  $\mathbf{z}_0$  de cette suite, passant à la limite dans la formulation variationnelle (2.6) pour  $\mathbf{w} \in \mathcal{Y}$  tel que  $\mathbf{V}_\mathbf{w} = 0$ , il vient que :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{z}_0} = \mathbf{e}_1 \text{ et } ((\mathbf{z}_0, \mathbf{w})) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in Y \text{ tel que } \mathbf{V}_\mathbf{w} = 0.$$

Or, ceci caractérise  $\mathbf{u}_{1,\parallel}$ . Par conséquent  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{u}_{1,\parallel}$ . Finalement, la fonction  $\mathbf{z}_\lambda$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}_{1,\parallel}$  dans  $Y$ . Pour conclure la preuve, il s'agit de montrer que cette convergence est forte ou de montrer que :

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} \|\mathbf{z}_\lambda\| \geq \|\mathbf{u}_{1,\parallel}\|,$$

puisque nous sommes dans un espace de Hilbert. Or, rappelons que, avec les notations de la **Propriété 4.7**, nous avons :

$$\lambda \|\mathbf{u}_{1,\parallel}\| = \|\mathbf{s}_{\lambda \mathbf{e}_1}\| \leq \|\mathbf{u}_\lambda\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Ceci conclut la preuve.  $\square$

*Démonstration du Théorème 6.1.* — Notons que les formules (5.2) sont continues en  $\mathbf{u}_\lambda$ . En effet, de la majoration (5.3), il vient que, si  $\mathbf{u}_n$  converge vers  $\mathbf{v}$  dans  $Y$ , alors :

$$b(\mathbf{u}_n, \mathbf{w}, \mathbf{u}_n) \rightarrow b(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{w} = \{\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{2,\parallel}, \mathbf{u}_\perp\}.$$



D'autre part, remarquons que, dans le développement limité obtenu de  $\mathbf{u}_\lambda$ , le terme de reste est un champ de vitesse de  $Y$  dont la vitesse de translation sur  $\mathcal{B}$  est nulle. En particulier,

$$((\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{w})) = \lambda((\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{w})), \quad \forall \lambda > 0, \forall \mathbf{w} = \{\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{2,\parallel}, \mathbf{u}_\perp\}.$$

En conséquence, il vient que, pour  $i = 1, 2$  :

$$\mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_i = \lambda \alpha_{\mathcal{P}} \delta_{i,1} - \lambda^2 \mathbf{b}(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}) + o(\lambda^2),$$

avec  $\delta$  le symbole de Kronecker. Or, de l'invariance par rotation de  $\mathbf{b}$  (**Propriété 4.8**) :

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{i,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Le terme de second ordre vient donc nécessairement de la troisième composante. Comme ci-dessus, il vient :

$$\mathbf{F}_\lambda \cdot \mathbf{e}_i = -\lambda^2 \mathbf{b}(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_\perp, \mathbf{u}_{1,\parallel}) + o(\lambda^2),$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 7. Passage à la limite. Cas de la dimension 2

Tout d'abord, un second regard à la preuve dans le cas de la dimension 3, nous permet de remarquer qu'au moins deux résultats peuvent être conservés en dimension 2, car ils ne font appels qu'au produit scalaire et non à la forme trilinéaire  $\mathbf{b}$  :

LEMME 7.1. — *Au voisinage de 0, nous avons les développements limités :*

$$\mathbf{u}_\lambda = \lambda \mathbf{u}_{1,\parallel} + o(\lambda), \quad \text{et } \mathbf{F}_\lambda = \lambda \alpha_{\mathcal{P}} \mathbf{e}_1 + o(\lambda).$$

Les difficultés n'apparaissent donc que quand il s'agit de déterminer le second terme du développement de  $\mathbf{F}_\lambda$ . Dans ce qui suit, nous notons  $\mathbf{R}_\lambda$  le reste dans le développement de  $\mathbf{F}_\lambda$  :

$$\mathbf{R}_\lambda := \frac{\mathbf{F}_\lambda - \lambda(\alpha_{\mathcal{P}}, 0)^\top}{\lambda},$$

et nous notons  $\mathbf{r}_\lambda$ , le reste de  $\mathbf{u}_\lambda$ . Nous avons alors les formules de représentation, avec les  $\mathbf{u}_{\parallel}^R$  et  $\mathbf{u}_{\perp}^{2R}$  de (5.5) et (5.7) :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\lambda \cdot \mathbf{e}_1 = ((\mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\parallel}^R)) + \lambda \mathbf{b}(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\parallel}^R), \\ \mathbf{R}_\lambda \cdot \mathbf{e}_3 = ((\mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\perp}^{2R})) + \lambda \mathbf{b}(\mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}), \end{cases} \quad \forall R > r. \quad (7.1)$$

Dans ces formules de représentation, les deux coordonnées de  $\mathbf{R}_\lambda$  sont composées

- d'un terme d'ordre zero  $((\mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}^R))$
- et d'un terme d'ordre un  $\lambda b(\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}_\parallel + \mathbf{r}_\lambda, \mathbf{u}^R)$ .

Pour deviner le comportement au voisinage de 0, remplaçons formellement  $\mathbf{u}_\perp^R$  par  $\mathbf{u}_\perp$ , comme en dimension 3, les termes d'ordre 0 disparaissent. Le reste  $\mathbf{R}_\lambda$  garde donc seulement, à l'ordre 1, une composante selon  $\mathbf{e}_3$  qui est  $\lambda b(\mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\perp)$ . Comme ce terme est bien défini, nous pouvons espérer qu'il représente bien le comportement de  $\mathbf{R}_\lambda$  au voisinage de 0.

Nous montrons

**THÉORÈME 7.2.** — *Étant donnée une suite  $(\lambda_n)_{n>0} \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$  qui tend vers 0 :*

**1.** *s'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n>0} \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$  telle que :*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} = 0,$$

(ii) *il existe une constante  $C$  pour laquelle  $|\mathbf{R}_{\lambda_n}| \leq C\alpha_n$ , pour tout  $n > 0$ ,*

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{R}_{\lambda_n}}{\alpha_n} = 0.$$

**2.** *S'il existe une constante  $C$  pour laquelle,  $|\mathbf{R}_n| \leq C\lambda_n$ , pour tout  $n > 0$ ,*

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{R}_{\lambda_n}}{\lambda_n} = (0, b(\mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\perp))^{\top}.$$

Il s'ensuit directement :

**COROLLAIRE 7.3.** — *La fonction  $\lambda \mapsto \frac{\mathbf{R}_\lambda}{\lambda}$  admet une limite en 0 qui est  $(0, b(\mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\parallel, \mathbf{u}_\perp))^{\top}$ .*

*Démonstration.* — Si l'on arrive à montrer qu'il existe une constante  $C$  pour laquelle  $|\mathbf{R}_\lambda| \leq C\lambda$  le résultat découle alors immédiatement du **2.** du théorème précédent. Par conséquent, supposons qu'il existe une suite  $\lambda_n$  tendant vers 0 telle que  $\mathbf{R}_n := \mathbf{R}(\lambda_n)$  satisfasse :  $|\mathbf{R}_n| > n\lambda_n$ , pour tout  $n > 0$  et notons  $\alpha_n := |\mathbf{R}_n|$ . A l'extraction d'une sous-suite près nous pouvons supposer que  $\mathbf{R}_n := \mathbf{R}_n/\alpha_n$  admet une limite  $\mathbf{R} \in \mathcal{S}^1$ . D'autre part, appliquant le **1.** du théorème précédent avec  $\alpha_n$ , il apparaît que  $\mathbf{R} = 0$ . Nous obtenons donc une contradiction, ce qui achève la preuve.  $\square$

*Démonstration du Théorème 7.2.* — Nous donnons les arguments pour  $\mathcal{L}_n := \mathbf{R}_{\lambda_n} \cdot \mathbf{e}_3$ . Supposons qu'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n>0} \in (0, \infty)^{\mathbb{N}}$  pour

laquelle, pour  $C > 0$ , nous avons :  $|\mathbf{R}_{\lambda_n}| < C\alpha_n$ , pour tout  $n > 0$ . Nous notons

$$\mathbf{r}_n := \frac{\mathbf{u}_{\lambda_n} - \lambda_n \mathbf{u}_{1,\parallel}}{\lambda_n}.$$

Rappelons que (2.14) et l'orthogonalité de  $\mathbf{u}_{1,\parallel}$  et  $\mathbf{r}_n$  impliquent :

$$\|\mathbf{r}_n\|^2 \leq |\mathbf{R}_{\lambda_n} \cdot \mathbf{e}_1| \leq \alpha_n. \quad (7.2)$$

Rappelons également la représentation de  $\mathcal{L}_n$  :

$$\mathcal{L}_n = ((\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R})) + \lambda_n b(\mathbf{u}_{1,\parallel} + \mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{1,\parallel} + \mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}), \quad \forall R > r.$$

Nous séparons le premier terme de cette formule en deux :

$$((\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R})) = 2 \left[ \int_{\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_R} D(\mathbf{r}_n) : D(\mathbf{u}_{\perp}) + \int_{\mathcal{F} - \mathcal{D}_R} D(\mathbf{r}_n) : D(\mathbf{u}_{\perp}^{2R}) \right],$$

avec  $\mathcal{D}_R$  l'intersection de  $\mathcal{F}$  avec la boule de centre  $\mathbf{G}$  et de rayon  $R$ . Comme  $\mathbf{V}_{\mathbf{r}_n} = 0$  :  $((\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp})) = 0$ . Par conséquent, nous pouvons réécrire :

$$((\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R})) = 2 \left[ \int_{\mathcal{F} - \mathcal{D}_R} D(\mathbf{r}_n) : (D(\mathbf{u}_{\perp}^{2R}) - D(\mathbf{u}_{\perp})) \right]$$

Finalement :

$$\frac{\mathcal{L}_n}{\alpha_n} = \frac{2}{\alpha_n} \int_{\mathcal{F} - \mathcal{D}_R} D(\mathbf{r}_n) : (D(\mathbf{u}_{\perp}^{2R}) - D(\mathbf{u}_{\perp})) - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} b(\mathbf{u}_{1,\parallel} + \mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}, \mathbf{u}_{1,\parallel} + \mathbf{r}_n).$$

Nous forçons l'apparition du terme principal :

$$\frac{\mathcal{L}_n}{\alpha_n} = -\frac{\lambda_n}{\alpha_n} b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{\perp}, \mathbf{u}_{1,\parallel}) + \mathbf{I}_1^n + \mathbf{I}_2^n + \mathbf{I}_3^n + \mathbf{I}_4^n,$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^n &= \frac{2}{\alpha_n} \int_{\mathcal{F} - \mathcal{D}_R} D(\mathbf{r}_n) : (D(\mathbf{u}_{\perp}^{2R}) - D(\mathbf{u}_{\perp})), & \mathbf{I}_2^n &= \frac{\lambda_n}{\alpha_n} b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{\perp}^{2R}, \mathbf{u}_{1,\parallel}), \\ \mathbf{I}_3^n &= -\frac{\lambda_n}{\alpha_n} (b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}, \mathbf{r}_n) + b(\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}, \mathbf{u}_{1,\parallel})), & \mathbf{I}_4^n &= -\frac{\lambda_n}{\alpha_n} b(\mathbf{r}_n, \mathbf{u}_{\perp}^{2R}, \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Et nous montrons le

LEMME 7.4. — *Il existe  $k_0, k_1$  et  $N_0, R_0$  tels que pour tout  $R > R_0$  et  $n > N_0$  :*

$$|\mathbf{I}_1^n + \mathbf{I}_2^n| \leq \frac{k_0 \lambda_n \|\mathbf{r}_n\| \ln(R)}{\alpha_n R^{\frac{2}{3}}}, \quad |\mathbf{I}_3^n + \mathbf{I}_4^n| \leq \frac{k_1 \lambda_n \|\mathbf{r}_n\| \ln(R)}{\alpha_n}.$$

*Démonstration.* — Appliquant l'inégalité de Hölder (**Lemme 2.6**) et rappelant la **Propriété 5.2** de  $\mathbf{u}_\perp^{2R}$  :

$$|I_1^n| \leq \frac{\|\mathbf{r}_n\| \|\nabla(\mathbf{u}_\perp^{2R} - \mathbf{u}_\perp)\|_2}{\alpha_n} \leq \frac{c(2)\|\mathbf{r}_n\| \ln(R)}{\alpha_n R}, \text{ pour } R > R_2.$$

Ensuite, pour  $R > R_3$ ,

$$|I_2^n| \leq \frac{c(3)\lambda_n \|\mathbf{u}_{1,\parallel} - \mathbf{e}_1\|_\infty \|\mathbf{u}_{1,\parallel}\|_{3,\mathcal{F}} \ln(R)}{\alpha_n R^{\frac{2}{3}}}.$$

Rappelons que, de leur décroissance en  $1/|\mathbf{y}|$  (cf (4.3)), les solutions variationnelle du **Problème Stokes** (et donc, notamment  $\mathbf{u}_{1,\parallel}$ ) sont des éléments de  $L^p(\mathcal{F})$  pour tout  $p > 2$ . D'autre part, pour  $R > r$ ,

$$\begin{aligned} |I_3^n| &\leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} (\|\mathbf{u}_{1,\parallel} - \mathbf{e}_1\|_\infty + \|\mathbf{u}_{1,\parallel}\|_\infty) \int_r^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}| |\mathbf{r}_n| d\alpha d\rho, \\ &\leq \sqrt{2\pi} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} (2\|\mathbf{u}_{1,\parallel}\|_\infty + 1) \sup_\rho \left[ \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}_n|^2 d\alpha \right]^{\frac{1}{2}} \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}| \rho d\rho, \end{aligned}$$

où, appliquant le **Lemme 2.3** et la **Propriété 5.2** :

$$\sup_\rho \left[ \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}_n|^2 d\alpha \right]^{\frac{1}{2}} \leq K \|\nabla \mathbf{r}_n\|_2, \quad \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}| \rho d\rho \leq k \ln(1 + R).$$

Par conséquent :

$$|I_3^n| \leq k \frac{\lambda_n}{\alpha_n} (2\|\mathbf{u}_{1,\parallel}\|_\infty + 1) \|\nabla \mathbf{r}_n\|_2 \ln(1 + R).$$

Avec la même technique :

$$|I_4^n| \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \sup_\rho \left[ \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}_n|^2 d\alpha \right] \int_r^\infty \sup_\alpha |\nabla \mathbf{u}_\perp^{2R}| \rho d\rho \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} k \|\nabla \mathbf{r}_n\|_2^2 \ln(1 + R).$$

Pour conclure, rappelons que  $\|\mathbf{r}_n\|$  tend vers 0 quand  $n$  va à l'infini. Par conséquent, pour  $n$  suffisamment grand, nous avons  $\|\mathbf{r}_n\|^2 \leq \|\mathbf{r}_n\|$ .  $\square$

Finalement, nous prenons :

$$R_n := \exp\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_n\|^{\frac{1}{2}}}\right), \text{ donc, en particulier } \ln(R_n) = \frac{1}{\|\mathbf{r}_n\|^{\frac{1}{2}}}.$$

Rappelons que  $\|\mathbf{r}_n\| \rightarrow 0$  ainsi  $R_n \rightarrow \infty$ . En particulier, pour  $n$  suffisamment grand, nous appliquons le lemme précédent et :

$$|I_3^n + I_4^n| \leq \frac{k_1 \lambda_n \|\mathbf{r}_n\|^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n}, \quad |I_1^n + I_2^n| \leq \frac{k_0 \lambda_n \|\mathbf{r}_n\|^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n R_n^{\frac{2}{3}}},$$

Ainsi :  $|\mathbb{I}_1^n + \mathbb{I}_2^n + \mathbb{I}_3^n + \mathbb{I}_4^n| \rightarrow 0$  dans les deux cas :

$$\alpha_n = \lambda_n \text{ and } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} = 0.$$

Le comportement quand  $n$  va à l'infini est donc fixé par le terme principal que nous avons introduit. Ceci achève la démonstration du **Théorème 7.2**.  
□

## 8. Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré que, pour toute particule, étant donnée une distance entre la rampe et la particule, il existe une orientation du corps telle que la particule peut tomber le long de la rampe sans jamais la toucher. La méthode employée utilise cependant des arguments abstraits. En particulier, elle ne donne aucune information sur l'orientation de la rampe par rapport à la gravité. Dans un second temps, nous avons donc également obtenus plus de renseignements sur cette orientation. Il est apparu dans notre analyse, que dans le modèle bidimensionnel, comme dans le modèle tridimensionnel, l'angle est non-nul au moins pour des nombre de Reynolds faibles (ce qui est équivalent à des masses de particules proches de la masse d'un volume équivalent de fluide) si la quantité  $b(\mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\parallel}, \mathbf{u}_{1,\perp})$  est non-nulle. Pour compléter l'étude, il faudrait maintenant calculer cette quantité avec des outils numériques par exemple.

## Bibliographie

- [1] BREZIS (H.). — Analyse fonctionnelle. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [2] DESJARDINS (B.) and ESTEBAN (M. J.). — On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) p. 1399-1413 (2000).
- [3] FEIREISL (E.). — On the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Appl. Math.*, 47(6) p. 463-484 (2002). *Mathematical theory in fluid mechanics* (Paseky, 2001).
- [4] FEIREISL (E.). — On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 167(4) p. 281-308 (2003).
- [5] FISCHER (T. M.), HSIAO (G. C.), and WENDLAND (W. L.). — On two-dimensional slow viscous flows past obstacles in a half-plane. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 104(3-4) p. 205-215 (1986).
- [6] GALDI (G. P.). — An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. II, volume 39 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. Nonlinear steady problems.

- [7] GALDI (G. P.). — Stationary Navier-Stokes problem in a two-dimensional exterior domain. In *Stationary partial differential equations*. Vol. I, *Handb. Differ. Equ.*, p. 71-155. North-Holland, Amsterdam, (2004).
- [8] GALDI (G. P.). — An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. Linearized steady problems.
- [9] GILBARG (D.) and WEINBERGER (H. F.). — Asymptotic properties of steady plane solutions of the Navier-Stokes equations with bounded Dirichlet integral. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 5(2) p. 381-404 (1978).
- [10] GRANDMONT (C.) and MADAY (Y.). — Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(4) p. 525-530 (1998).
- [11] HILLAIRET (M.) and SERRE (D.). — Chute stationnaire d'un solide dans un fluide visqueux incompressible le long d'un plan incliné. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 20(5) p. 779-803 (2003).
- [12] HILLAIRET (M.) and VAZQUEZ (J.L.). — A first no collision result, En préparation.
- [13] HO (B.P.) and LEAL (L.G.). — Inertial migration of rigid spheres in two-dimensional unidirectional flows. *J. Fluid Mech.*, 65, p. 365-400 (1974).
- [14] HOGG (A.J.). — The inertial migration of non-neutrally buoyant spherical particles in two dimensional shear flows. *J. Fluid Mech.*, 272, p. 285-318 (1994).
- [15] KAVIAN (O.). — Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, volume 13 of *Mathématiques & Applications* (Berlin) [Mathematics Applications]. Springer-Verlag, Paris (1993).
- [16] LERAY (J.). — Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes de l'hydrodynamique. *J. Maths Pures Appl.*, 12, p. 1-82 (1933).
- [17] SAN MARTÍN (J.A.), STAROVOITOV (V.), and TUCSNAK (M.). — Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2) p. 113-147 (2002).
- [18] SEGRÉ (G.) and SILGERBERG (A.). — Behavior of macroscopic rigid spheres in poiseuille flow. part 1. determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through cross light beams. *J. Fluid Mech.*, 14, p. 115-135 (1962).
- [19] SEGRÉ (G.) and SILGERBERG (A.). — Behavior of macroscopic rigid spheres in poiseuille flow. part 2. experimental results and interpretation. *J. Fluid Mech.*, 14 p. 136-157 (1962).
- [20] SERRE (D.). — Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. *Japan J. Appl. Math.*, 4(1) p. 99-110 (1987).
- [21] STAROVOITOV (V.N.). — Behavior of a rigid body in an incompressible viscous fluid near a boundary. In *Free boundary problems* (Trento, 2002), volume 147 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, p. 313-327. Birkhauser, Basel (2004).
- [22] VÁZQUEZ (J.L.) and ZUAZUA (E.). — Lack of collision in a simplified 1-d model for fluid-solid interaction. preprint, may 2004.