

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

NIVALDO DE GÓES GRULHA JÚNIOR

*L'obstruction d'Euler locale d'une application*

Tome XVII, n° 1 (2008), p. 53-71.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2008\\_6\\_17\\_1\\_53\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_1_53_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## L'obstruction d'Euler locale d'une application<sup>(\*)</sup>

NIVALDO DE GÓES GRULHA JÚNIOR<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — L'objectif dans ce travail est de présenter une généralisation pour l'obstruction d'Euler locale d'une fonction holomorphe singulière à l'origine dans le cas d'une application holomorphe  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , où  $(V, 0)$  est un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension  $n \geq k$ . Le résultat principal (Théorème 6.1) exprime l'obstruction d'Euler locale, définie pour un  $k$ -repère par Brasselet, Seade, Suwa, en fonction de l'obstruction d'Euler relative à  $f$ .

**ABSTRACT.** — Our objective is to present a generalization for the local Euler obstruction of a holomorphic function singular at the origin to the case of a holomorphic map  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , where  $(V, 0)$  is a germ of complex analytic variety, equidimensional of dimension  $n \geq k$ . The principal result (Theorem 6.1) is a formula which computes the local Euler obstruction, defined for  $k$ -frames by Brasselet, Seade, Suwa, in terms of the local Euler obstruction of  $f$ .

---

### Introduction

Étant donné un point  $p$  d'une variété analytique  $V$ , l'obstruction d'Euler locale  $Eu_V(p)$  a été définie par MacPherson [M] comme l'un des ingrédients de sa preuve de la conjecture de Deligne et Grothendieck concernant l'existence et l'unicité des classes caractéristiques des variétés algébriques complexes singulières. Elle a été ensuite définie par J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz [BS] pour montrer que les classes de Schwartz d'un variété singulière coïncident avec les classes de MacPherson. Par la suite, Gonzalez-Sprinberg et Verdier [GS] ont montré une formule pour l'obstruction d'Euler

---

(\*) Reçu le 22 septembre 2006, accepté le 2 mai 2007.

(1) Recherche soutenue par la CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) numéro 1198/05-0 et la FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) numéro 03/13929-6.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP. Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro. Caixa Postal : 668 - CEP : 13560-970 - São Carlos - SP - Brasil.  
Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206). Université de la Méditerranée - Campus de Luminy, Case 907. 13288 Marseille Cedex 9 - France.  
njunior@icmc.usp.br

locale en fonction des classes de Chern de fibrés vectoriels sur le transformé de Nash de la variété algébrique. Pour des singularités génériques, l'obstruction d'Euler s'exprime en termes d'invariants polaires, d'après un résultat de Lê et Teissier [LT].

Par la suite, ces invariants ont été généralisés de plusieurs façons :

D'une part, dans [BLS] J.-P. Brasselet, Lê D. T. et J. Seade donnent une formule du type de Lefschetz donc plus topologique, pour l'obstruction d'Euler locale, alors que le résultat de [LT] est de nature algébrique. La formule prouvée revient à dire que l'obstruction d'Euler locale, comme fonction constructible, satisfait la condition d'Euler (en théorie bivariante) en ce qui concerne les formes linéaires génériques. L'article [BMPS] dû à J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran et J. Seade est une suite naturelle de [BLS], le but est de comprendre ce qui empêche l'obstruction d'Euler locale de satisfaire la condition d'Euler en ce qui concerne les fonctions holomorphes  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  singulières à l'origine. Le défaut est appelé obstruction d'Euler locale de  $f$  et noté  $Eu_{f,V}(0)$ .

D'autre part, étant donné un germe  $(V, 0) \subset (M, 0)$  de variété analytique complexe équidimensionnel de dimension complexe  $n$  et  $(M, 0)$  un germe de variété complexe lisse de dimension complexe  $m$ , J.-P. Brasselet, J. Seade et T. Suwa ont donné une définition pour l'obstruction d'Euler locale, associée à un  $k$ -repère stratifié  $v^{(k)}$  sur la variété  $V$ . Celle-ci dépend de la cellule  $\sigma$  de dimension réelle  $2(m - k + 1)$  telle que le point 0 soit la seule singularité de  $v^{(k)}$  dans  $\sigma$ . Nous notons  $Eu(v^{(k)}, V, \sigma)$  cette obstruction, notée  $Eu(v^{(k)}, V, 0)$  dans [BSS].

Dans le cas où  $k = 1$ , et  $v^{(1)} = v$  est un champ radial, on a :  $Eu(v, V, \sigma) = Eu_V(0)$ . La formule du théorème 3.1 de [BMPS] peut alors se lire de la façon suivante :

$$Eu(v, V, \sigma) = \left( \sum_{\alpha} Eu_V(V_{\alpha}) \cdot \chi(V_{\alpha} \cap B_{\varepsilon} \cap f^{-1}(t_0)) \right) + Eu_{f,V}(0), \quad (0.1)$$

où  $\{V_{\alpha}\}$  décrit l'ensemble des strates de  $V$  telles que  $0 \in \overline{V_{\alpha}}$ ,  $t_0$  proche de 0 et  $\varepsilon$  suffisamment petit, et où  $\sigma$  est une cellule d'une décomposition cellulaire ( $D$ ) de  $M$  transverse à  $V$  à l'origine, c'est-à-dire transverse à toutes les strates  $V_{\alpha} \neq \{0\}$  de  $V$  telles que  $0 \in \overline{V_{\alpha}}$ .

Notre objectif, dans ce travail, est de généraliser cette formule dans le cas où  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  est une application holomorphe, avec  $1 \leq k \leq n$ .

Dans un premier temps, on généralise l'obstruction d'Euler locale  $Eu_{f,V}(0)$  de [BMPS] dans le cas d'une telle application. L'obstruction généralisée

dépend de la cellule  $\sigma$  de dimension (réelle)  $2(m - k + 1)$  et de centre 0 (cf ci-dessus), nous la notons  $Eu_{f,V}(\sigma)$  (définition 5.2). La définition nécessite que  $f$  satisfasse une condition naturelle, remplie dans le cas où l'ensemble singulier de  $V$  est de dimension inférieure ou égale à  $k - 1$  (ce qui inclut le cas où  $V$  est lisse) et  $f$  est générique. Cette condition notée  $(\delta)$  est explicitée en section 5.

Soit  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  comme ci-dessus et  $v^{(k)} = (v^{(k-1)}, v_k)$  un champ de  $k$ -repères stratifiés tel que 0 soit la seule singularité de  $v^{(k)}$  dans la cellule  $\sigma$  et que le dernier champ de vecteurs  $v_k$  soit un champ radial. Notre résultat principal est alors la formule suivante, généralisation de la formule (1) :

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = \left( \sum_{\alpha} Eu_V(V_{\alpha}) \cdot \chi(V_{\alpha} \cap B_{\varepsilon} \cap f^{-1}(z_0)) \right) + Eu_{f,V}(\sigma),$$

où  $\{V_{\alpha}\}$  décrit l'ensemble des strates de  $V$  telles que  $0 \in \overline{V_{\alpha}}$ , et le point  $z_0 \in \mathbb{C}^k \setminus \{f(\Sigma f)\}$  est une valeur régulière de  $f$  proche de l'origine.

### 1. Modification de Nash

Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe  $n$  et  $(M, 0)$  un germe de variété complexe lisse de dimension complexe  $m$ . La Grassmannienne des  $n$ -plans de  $\mathbb{C}^m$  est notée  $G(n, m)$ . Considérons le fibré en Grassmanniennes des  $n$ -plans (complexes) de  $TM$ , noté  $G$ . La fibre  $G_x$  au dessus de  $x \in M$  est l'ensemble des  $n$ -plans de  $T_x M$ , elle est isomorphe à  $G(n, m)$ . Un élément de  $G$  est noté  $(x, P)$  où  $x \in M$  et  $P \in G_x$ . Sur la partie lisse de  $V$ , on peut définir l'application de Gauss  $\phi : V_{reg} \rightarrow G$  de la façon suivante :

$$\phi(x) = (x, T_x V_{reg}).$$

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \phi & \downarrow \\ V_{reg} & \longrightarrow & M \end{array}$$

DÉFINITION 1.1. — *La modification de Nash  $\tilde{V}$  est définie comme l'adhérence de l'image de  $\phi$  dans  $G$ . Elle est munie d'une projection analytique naturelle  $\nu : \tilde{V} \rightarrow V$ .*

Le fibré tautologique  $T$  sur  $G$  est défini de la manière suivante : la fibre  $T_p$  de  $T$ , au dessus d'un point  $p = (x, P) \in G$  est l'ensemble des vecteurs  $v$  du  $n$ -plan  $P$ .

$$T_p = \{v \in T_x M : v \in P, x = \nu(x, P)\}$$

On définit le fibré  $\tilde{T}$  de base  $\tilde{V}$  comme la restriction de  $T$  sur  $\tilde{V}$ , on a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{V} & \hookrightarrow & G \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ V & \hookrightarrow & M \end{array}$$

## 2. L'obstruction d'Euler locale

Notons  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $M$  compatible avec  $V$ . On suppose aussi que l'origine  $\{0\}$  est une strate. L'union des fibrés tangents à toutes les strates,  $\cup TV_\alpha$ , n'est pas un fibré, mais peut-être regardée comme sous-ensemble du fibré tangent  $TM|_V$ . Par définition, une section de  $\cup TV_\alpha$  est donc une section de  $TM|_V$  dont l'image est dans  $\cup TV_\alpha$ .

DÉFINITION 2.1. — *Soit  $v$  une section de  $TM$  au dessus d'une partie  $A$  de  $M$ , on dit que le champ  $v$  est stratifié si pour  $x \in V_\alpha \cap A$  on a  $v(x) \in T_x V_\alpha$ , où  $V_\alpha$  est la strate contenant  $x$ .*

LEMME 2.2 ([BS], PROPOSITION 9.1). — *Un champ de vecteurs stratifié  $v$  non nul défini sur un sous-ensemble  $A \subset V$  admet un relèvement canonique  $\tilde{v}$  comme section non nulle de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(A)$ .*

Si  $\tilde{x}$  est un point de  $\tilde{V}$  tel que  $\nu(\tilde{x}) = x$ , alors  $v(x) \in T_x(V_\alpha) \subset T_x M$ . On définit  $\nu_* : \tilde{T} \rightarrow TM|_V$  par  $\nu_*(\tilde{v}(\tilde{x})) = (x, v(x))$ .

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}|_A & \xrightarrow{\nu_*} & TM|_A \\ \tilde{v} \updownarrow & & v \updownarrow \\ \nu^{-1}(A) & \xrightarrow{\nu} & A \end{array}$$

Soit  $B_\varepsilon(a)$  la boule centrée en  $a$  et de rayon  $\varepsilon$  dans  $M$ , localement identifiée à  $\mathbb{C}^m$ .

THÉORÈME 2.3 (BERTINI-SARD VOIR [V]). — *Si  $\{V_\alpha\}$  est une stratification de Whitney de  $V$  et  $a \in V$ , pour  $\varepsilon$  suffisamment petit (et positif) la sphère  $\partial B_\varepsilon(a)$  est transverse aux strates  $V_\alpha$  telles que  $a \in \overline{V}_\alpha$ .*

DÉFINITION 2.4. — *On dit que le champ de vecteurs  $v$  est radial en  $a$  si  $v$  est un champ stratifié et s'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que le champ  $v$  est sortant de  $B_\varepsilon(a)$ , pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .*

La définition suivante est due à J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz ([BS], Proposition 10.1). La définition originale est due à R. MacPherson [M].

Dans toute la suite, nous noterons  $B_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$ .

DÉFINITION 2.5. — *Soit  $v$  un champ de vecteurs radial sur  $V \cap \partial B_\varepsilon$  et  $\tilde{v}$  le relèvement de  $v$  sur l'ensemble  $\nu^{-1}(V \cap \partial B_\varepsilon)$ . Le champ  $\tilde{v}$  définit un cocycle d'obstruction  $Obs(\tilde{v})$ , mesurant l'obstruction pour étendre  $\tilde{v}$  comme section non-nulle de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(V \cap B_\varepsilon)$  :*

$$Obs(\tilde{v}) \in Z^{2n}(\nu^{-1}(V \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\varepsilon)).$$

*L'obstruction d'Euler locale  $Eu_V(0)$  est l'évaluation du cocycle  $Obs(\tilde{v})$  sur la classe fondamentale  $[\nu^{-1}(V \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\varepsilon)]$ , autrement dit :*

$$Eu_V(0) := \langle Obs(\tilde{v}), [\nu^{-1}(V \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\varepsilon)] \rangle.$$

Lê et Teissier [LT] ont montré une formule exprimant l'obstruction d'Euler locale  $Eu_V(0)$  en fonction des multiplicités polaires, laquelle permet d'effectuer le calcul pour des exemples concrets.

THÉORÈME 2.6 (FORMULE DE LÊ-TEISSIER). —

$$Eu_V(0) = \sum (-1)^{n-k-1} m_{n-k-1}(V),$$

où  $m_i(V)$  est la multiplicité de la variété polaire de codimension  $i$  en 0.

Remarque 2.7. — Comme propriétés importantes de l'obstruction d'Euler locale on a les résultats suivants :

- L'obstruction d'Euler locale en un point lisse est égale à 1.
- L'obstruction d'Euler locale en un point d'une courbe est la multiplicité du point sur la courbe.
- Formule de produit : on a  $Eu_{V_1 \times V_2}((x_0, y_0)) = Eu_{V_1}(x_0) \cdot Eu_{V_2}(y_0)$ .

Remarque 2.8. — Un résultat très important, implicite chez MacPherson [M], et montré par J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz [BS], puis par plusieurs auteurs, est que l'obstruction d'Euler locale est une fonction constructible, en fait elle est constante le long de chaque strate d'une stratification de Whitney.

### 3. Résultats antérieurs

#### 3.1. Le résultat de [BLS]

La formule principale prouvée en [BLS] est une formule de type Lefschetz, pour l'obstruction d'Euler locale. Elle s'avère être équivalente à dire que l'obstruction locale d'Euler, comme fonction constructible, satisfait la condition locale d'Euler (en théorie bivariante) en ce qui concerne les formes linéaires génériques. Dans [BMPS] le but est de comprendre ce qui empêche l'obstruction locale d'Euler de satisfaire la condition locale d'Euler en ce qui concerne les fonctions qui sont singulières à l'origine. Ceci est mesuré par un invariant (ou « défaut ») de telles fonctions dont nous rappelons la définition ci-dessous.

**THÉORÈME 3.1** ([BLS], THÉORÈME 3.1). — *Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe comme ci-dessus et  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $V$ . Soit  $l : U \rightarrow \mathbb{C}$  un forme linéaire générique, où  $U$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $M$ . On a :*

$$Eu_V(0) = \sum_{\alpha} \chi(V_\alpha \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_\alpha),$$

où  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  est situé près de l'origine et  $Eu_V(V_\alpha)$  est l'obstruction d'Euler de  $V$  en n'importe quel point de la strate  $V_\alpha$ .

Donnons un exemple non trivial d'application de ce théorème.

**EXEMPLE 3.2.** — *Considérons la fonction  $f(x, y, t) = y^2 - x^3 - t^2x^2$  et notons  $V = f^{-1}(0)$ . Considérons la stratification de Whitney de  $V$  définie par  $V_0 = \{0\}$ ,  $V_1 = \{\text{axe des } t\} \setminus \{0\}$  et  $V_2 = V_{reg}$ . Il est possible de calculer les obstructions d'Euler en utilisant le Théorème 2.6 et le calcul des multiplicités polaires. Nous utilisons ici le Théorème 3.1.*

*Considérons la forme  $l(x, y, t) = t$ . La formule précédente dit que*

$$\begin{aligned} Eu_V(0) &= \chi(V_0 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_0) \\ &+ \chi(V_1 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_1) \\ &+ \chi(V_2 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_2). \end{aligned}$$

*Mais,  $V_0 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0) = \emptyset$  donc on a  $\chi(V_0 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) = 0$ .*

*D'autre part  $V_1 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0) = \{(0, 0, t_0)\}$  donc  $\chi(V_1 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) = 1$ . On a  $V_2 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0) = \{(x, y, t)/y^2 - x^3 - t_0^2x^2 = 0\} \setminus \{(0, 0, t_0)\}$ . Avec l'aide du théorème 2 de [GLM] on obtient  $\chi(V_2 \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(t_0)) = -1$ .*

A l'aide de la remarque 2.7, on a  $Eu_{V_1}(t_0, 0, 0) = Eu_{(V \cap l^{-1}(t_0))}(0, 0) \cdot Eu_{\mathbb{D}}(t_0)$ , où  $\mathbb{D}$  est un disque contenu dans  $V_1$  centré en  $t_0$ . Donc  $Eu_V(V_1) = 2$ . D'autre part, comme  $Eu_V(V_2) = Eu_V(V_{reg}) = 1$ , il vient :

$$Eu_V(0) = 0 \cdot Eu_V(0) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 1.$$

### 3.2. Le résultat de [BMPS]

Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe  $n$  et  $(M, 0)$  un germe de variété complexe lisse de dimension complexe  $m$ . Notons  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $M$  compatible avec  $V$ . On suppose aussi que l'origine  $\{0\}$  est une strate.

Soit maintenant  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ , fonction holomorphe avec singularité isolée à l'origine et restriction de  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $U$  est un sous-ensemble ouvert de  $M$  contenant  $V$ . En suivant la construction de [BMPS], on peut associer à  $f$  un champ stratifié noté  $\overline{\nabla}_V f(z)$ , de la façon suivante :

Notons  $\overline{\nabla} \tilde{f}(z)$  le champ de vecteurs gradient de  $\tilde{f}$  en un point  $z \in U$ , défini par  $\overline{\nabla} \tilde{f}(z) = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n})$ , où le surlignement désigne la conjugaison complexe. Le noyau  $ker(d\tilde{f}_z)$  est transverse à  $T_z(V_\alpha(z))$  pour tout  $z \in V \setminus \{0\}$ . On a donc, pour  $z \in V \setminus \{0\}$  :

$$Angle(\overline{\nabla} \tilde{f}(z), T_z(V_\alpha(z))) < \pi/2,$$

donc la projection de  $\overline{\nabla} \tilde{f}(z)$  sur  $T_z(V_\alpha(z))$ , notée  $\zeta_\alpha(z)$ , n'est pas nulle.

Soit  $V_\beta$  une strate telle que  $V_\alpha \subset \overline{V}_\beta$ , et soit  $\pi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  une voisinage tubulaire de  $V_\alpha$  dans  $U$ . En suivant la construction de M.-H. Schwartz [Sc2], on peut voir que la condition (a) de Whitney implique que pour tout point  $z \in V_\beta \cap U_\alpha$ , l'angle entre  $\zeta_\beta$  et l'extension parallèle de  $\zeta(\pi(z))$  est petit. Cette propriété implique que ces deux champs de vecteurs sont homotopes sur le bord de  $U_\alpha$ . On peut donc recoller les champs  $\zeta_\alpha$  pour obtenir un champ stratifié sur  $V$ , noté  $\overline{\nabla}_V f(z)$ . Ce champ est homotope à  $\overline{\nabla} \tilde{f}(z)|_V$  et on a  $\overline{\nabla}_V f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in V \setminus \{0\}$ .

En utilisant le relevé  $\tilde{\overline{\nabla}}_V f$  du champ  $\overline{\nabla}_V f$  dans le transformé de Nash, on peut définir :

**DÉFINITION 3.3.** — *L'obstruction locale d'Euler de  $f$  à l'origine, notée  $Eu_{f,V}(0)$  est l'entier obtenu par l'évaluation de  $Obs(\tilde{\overline{\nabla}}_V f)$  sur la classe fondamentale  $[\nu^{-1}(V \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\varepsilon)]$ .*



THÉORÈME 3.4 ([BMPS], Théorème 3.1). — Soit  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , fonction holomorphe, avec singularité isolée à l'origine et  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $V$ . On a :

$$Eu_V(0) = \left( \sum_{\alpha} \chi(V_\alpha \cap B_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_\alpha) \right) + Eu_{f,V}(0),$$

où  $\varepsilon$  est suffisamment petit,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  est situé près de l'origine, où  $\{V_\alpha\}$  décrit l'ensemble des strates de  $V$  telles que  $0 \in \bar{V}_\alpha$  et  $Eu_V(V_\alpha)$  est l'obstruction d'Euler de  $V$  en n'importe quel point de la strate  $V_\alpha$ .

Remarque 3.5 ([BMPS] Remarque 3.4). — Si  $V = \mathbb{C}^n$  et  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  est une fonction holomorphe avec singularité isolée à l'origine et nombre de Milnor  $\mu$ , on a :

$$Eu_{f,V}(0) = (-1)^n \mu.$$

En effet, par [Mi], la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre de Milnor de  $f$  est égale à  $1 + (-1)^{n-1} \mu$ .

#### 4. L'obstruction d'Euler d'un $k$ -champ

Un  $k$ -champ est une collection  $v^{(k)}$  de  $k$  champs de vecteurs. Un point singulier de  $v^{(k)}$  est un point où les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Un  $k$ -repère est un  $k$ -champ sans singularité. On dit que le  $k$ -champ  $v^{(k)}$  est stratifié si chaque vecteur  $v_i$  est un champ stratifié dans le sens précédent.

Soit  $(K)$  une triangulation de  $M$  subordonnée à la stratification  $\{V_\alpha\}$  de  $M$  et  $\sigma$  une cellule de dimension réelle  $2(m - k + 1)$  d'une décomposition cellulaire  $(D)$  contruite dans  $M$  par dualité à partir de la triangulation  $(K)$ ,  $\sigma$  est transverse à toutes les strates.

Soit  $v^{(k)}$  un  $k$ -champ stratifié dans  $\sigma \cap V$  avec une singularité isolée en le barycentre  $a$  de  $\sigma$ . Le champ  $v^{(k)}$  n'a pas de singularité sur  $\partial\sigma \cap V$ . Soit  $\nu : \tilde{V} \rightarrow V$  la modification de Nash de  $V$  et  $\tilde{T}$  le fibré de Nash. Chaque composante  $v_i$  de  $v^{(k)}$  admet un relèvement  $\tilde{v}_i$  comme section de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)$ . Le champ de  $k$ -repères  $v^{(k)}$ , se relève comme ensemble  $\tilde{v}^{(k)}$  de  $k$ -sections linéairement indépendantes de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)$  [BSS].

Notons  $Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V)$  la classe en  $H^{2(n-k+1)}(\nu^{-1}(\sigma \cap V), (\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)))$  du cocycle d'obstruction pour étendre  $\tilde{v}^{(k)}$  comme ensemble de  $k$  sections linéairement indépendantes de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(\sigma \cap V)$ .

DÉFINITION 4.1 (Définition originale, voir [BSS]). — *L'obstruction d'Euler locale  $Eu(v^{(k)}, V, \sigma)$  d'un  $k$ -champ stratifié  $v^{(k)}$  défini sur  $\sigma \cap V$  avec singularité isolée au barycentre  $a$  de  $\sigma$  est définie comme l'évaluation du cocycle d'obstruction  $Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V)$  sur la classe fondamentale de la paire  $[\nu^{-1}(\sigma \cap V), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)]$ . Autrement dit,*

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = \langle Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V, b), [\nu^{-1}(\sigma \cap V), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)] \rangle.$$

On se propose de donner une méthode de calcul (formule (4.3) ci-dessous) de cette obstruction d'Euler en fonction de l'obstruction d'Euler locale  $Eu_V(V_\alpha)$  des strates.

#### 4.1. Cas d'un $k$ -champ obtenu par prolongement radial.

Dans toute la suite, nous noterons  $p = m - k + 1$ .

Dans [BS], il est montré qu'on peut construire, sur le  $2p$ -squelette de  $D$ , noté  $(D)^{2p}$ , par le procédé d'extension radial de M.-H. Schwartz, une  $k$ -section de  $\cup TV_\alpha$ , appelée  $k$ -champ radial et notée  $v^{(k)} = (v^{(k-1)}, v_k)$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.  $v^{(k)}$  n'a que des points singuliers isolés, ceux-ci sont des zéros du dernier vecteur  $v_k$ . Sur  $(D)^{2p-1}$ ,  $v^{(k)}$  n'a pas de point singulier. Sur  $(D)^{2p}$ , le champ de  $(k-1)$ -repères  $v^{(k-1)}$  n'a pas de point singulier.
2. Les points singuliers de  $v^{(k)}$  sont les barycentres des cellules  $\sigma^{2p}$  de dimension  $2p$ , notés  $a = \sigma^{2p} \cap s$  où  $s$  est le  $2(k-1)$ -simplexe dont  $\sigma$  est la cellule duale,  $s$  est situé dans la strate de dimension la plus petite rencontrant  $\sigma$ .
3. Soit  $a \in V_\alpha \cap (D)^{2p}$  un point singulier de  $v^{(k)}$ . Si  $\dim_{\mathbb{C}} V_\alpha > k-1$ , l'indice de  $v^{(k)}$  en  $a$  est égal à l'indice de la restriction de  $v^{(k)}$  à  $V_\alpha \cap (D)^{2p}$ , considéré comme champ de  $k$ -repères tangent à  $V_\alpha$ .

Si  $\dim_{\mathbb{C}} V_\alpha = k-1$ , on a  $I(v^{(k)}, a) = +1$ .

De plus, le champ  $v_k$  est sortant de certains tubes, voisinages de  $V_i$  dans  $M$  (Voir [BS]).

*Remarque 4.2.* — Si le  $k$ -champ  $v^{(k)}$  est un  $k$ -champ radial construit par le procédé de prolongement radial de M.-H. Schwartz et  $a \in V_\alpha$  une singularité de  $v^{(k)}$ , barycentre de  $\sigma$ , alors l'obstruction d'Euler locale  $Eu(v^{(k)}, V, \sigma)$  ne dépend que de  $\sigma_\alpha = \sigma \cap V_\alpha$  et de la restriction  $v_\alpha^{(k)}$  de  $v^{(k)}$  à  $\sigma_\alpha$ . Elle ne dépend pas de la cellule  $\sigma$  telle que  $\sigma \cap V_\alpha = \sigma_\alpha$  et  $\sigma$  transverse aux strates de  $V$ .

En effet, si  $v^{(k)}$  est obtenu par la méthode de prolongement radial de M.-H. Schwartz à partir de  $v_\alpha^{(k)}$ , on a le théorème de proportionalité ([BS]) :

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = Eu_V(V_\alpha) \cdot I(v_\alpha^{(k)}, a). \quad (4.2)$$

Le second membre ne dépend que de  $\sigma_\alpha$  et  $v_\alpha^{(k)}$  d'où le résultat.

## 4.2. Cas d'un $k$ -champ quelconque.

Soit  $v^{(k)}$  un  $k$ -champ quelconque admettant une singularité isolée en  $a$ , barycentre de la  $2p$ -cellule  $\sigma$ . Nous nous proposons de donner une méthode de calcul de  $Eu(v^{(k)}, V, \sigma)$ .

Notons  $V_\alpha$  la strate contenant  $a$  et soit  $v_\alpha^{(k)}$  la restriction de  $v^{(k)}$  à  $V_\alpha$ . Notons  $\sigma'$  la cellule de dimension  $2(m - k + 1)$ , obtenue à partir de  $\sigma$  par homothétie de centre  $a$  et de rapport  $1/2$ . On étend le champ  $v_\alpha^{(k)}$ , restreint à  $\sigma' \cap V_\alpha$ , par prolongement radial sur  $\sigma'$ , on obtient un  $k$ -champ noté  $v_{rad}^{(k)}$  sur  $\sigma'$ .

Considérons maintenant la « couronne »  $C = \sigma \setminus Int(\sigma')$ . Sur le bord de  $C$ ,  $\partial\sigma' \cup \partial\sigma$  on peut définir un  $k$ -champ  $w^{(k)}$  par  $v_{rad}^{(k)}$  sur  $\partial\sigma'$  et par  $v^{(k)}$  sur  $\partial\sigma$ .

Par chaque strate  $V_\beta$  de dimension complexe  $n_\beta$  telle que  $a \in \overline{V_\beta}$  l'intersection  $V_\beta \cap C$  est de dimension  $2(n_\beta - k + 1)$ , ce qui est la dimension d'obstruction à la construction d'un champ de  $k$ -repère sur  $V_\beta$ . On peut donc étendre  $w^{(k)}$  en un  $k$ -champ stratifié dans  $C$  avec des points singuliers isolés  $a_i$ . Cependant, pour pouvoir exprimer  $Eu(v^{(k)}, V, \sigma)$  en fonction de l'indice en ces points singuliers, nous allons procéder par induction sur la dimension des strates  $V_\beta$  telles que  $a \in \overline{V_\beta}$ , et en utilisant le procédé d'extension de M.-H. Schwartz.

Soit  $V_{\beta_1}$  la strate de dimension la plus petite telle que  $a \in \overline{V_{\beta_1}}$  et  $V_{\beta_1} \neq V_\alpha$ . Nous pouvons étendre le  $k$ -champ  $w^{(k)}$ , défini sur  $\overline{V_{\beta_1}} \cap \partial C$ , à l'intérieur de  $\overline{V_{\beta_1}} \cap C$  en un  $k$ -champ  $w_1^{(k)}$  égal à  $v_\alpha^{(k)}$  sur  $V_\alpha \cap C$ , avec singularités isolées  $a_1^i$ .

Autour des points  $a_1^i$  on étend  $w_1^{(k)}$  par la méthode de prolongement radial, dans une petite boule  $B_\varepsilon(a_1^i) \cap \sigma$ . Le champ obtenu, encore noté  $w_1^{(k)}$  a même indice au point  $a_1^i$  que sa restriction à  $V_{\beta_1}$ , on le note  $I(w_1^{(k)}, a_1^i)$ .

D'après [BS], on a :

$$Eu(w_1^{(k)}, V, a_1^i) = Eu_V(V_{\beta_1}) \cdot I(w_1^{(k)}, a_1^i).$$

Nous explicitons maintenant le passage de  $V_{\beta_1}$  à la strate suivante. Ce passage est identique à toutes les étapes de la démonstration par récurrence, laquelle porte sur la dimension des strates  $V_\beta$  telles que  $a \in \overline{V}_\beta$ .

Considérons donc la strate  $V_{\beta_2}$  de dimension immédiatement supérieure à celle de  $V_{\beta_1}$  et telle que  $a \in \overline{V}_{\beta_2}$ . Considérons le sous-espace

$$X_2 = (\overline{V}_{\beta_2} \cap C) \setminus \cup_i \text{Int}(B_\varepsilon(a_1^i))$$

dans  $\overline{V}_{\beta_2}$ .

Le bord de  $X_2$  est constitué de :  $V_{\beta_2} \cap \partial C$  sur lequel le  $k$ -champ  $w^{(k)}$  est défini, de  $(\overline{V}_{\beta_1} \cap C) \setminus \cup_i \text{Int}(B_\varepsilon(a_1^i))$  et de  $\cup_i (\overline{V}_{\beta_2} \cap \partial B_\varepsilon(a_1^i))$  sur lesquels le  $k$ -champ  $w_1^{(k)}$  est défini. Nous pouvons donc étendre le champ ainsi défini sur le bord de  $X_2$  à l'intérieur de  $X_2$  en un champ  $w_2^{(k)}$  égal à  $v_\alpha^{(k)}$  sur  $V_\alpha \cap C$ , avec singularités isolées  $a_2^i$ .

La démonstration par récurrence se continue ainsi de la même façon pour toutes les strates  $V_\beta$  telles que  $a \in \overline{V}_\beta$ .

Nous obtenons finalement sur  $V \cap C$  un  $k$ -champ, noté  $w^{(k)}$ , égal à  $v_\alpha^{(k)}$  sur  $V_\alpha \cap C$ , avec singularités isolées  $a_j^i$  d'indice  $I(w^{(k)}, a_j^i)$  et situées dans les strates  $V_{\beta_j}$  telles que  $V_\alpha \subset \overline{V}_{\beta_j}$ . On a :

$$Eu(w^{(k)}, V, \sigma_j^i) = Eu_V(V_{\beta_j}) I(w^{(k)}, a_j^i),$$

où  $\sigma_j^i = B_\varepsilon(a_j^i) \cap \sigma$ . Le champ défini par  $w^{(k)}$  dans  $C$  coïncide avec  $v^{(k)}$  sur  $\partial\sigma$ . Notons encore  $w^{(k)}$  le champ défini dans  $\sigma$  comme étant  $w^{(k)}$  dans  $C$  et  $v_{rad}^{(k)}$  dans  $\sigma'$ . On a :

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = Eu(v_{rad}^{(k)}, V, \sigma') + \sum_{\beta_j, i} Eu(w^{(k)}, V, a_j^i).$$

Dans cette égalité, tous les termes du membre de droite se calculent par le formule (4.2) . Il vient :

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = Eu_V(V_\alpha) I(v_\alpha^{(k)}, a) + \sum_{\beta_j} Eu_V(V_{\beta_j}) \left( \sum_i I(w^{(k)}, a_j^i) \right). \quad (4.3)$$

## 5. L'obstruction d'Euler d'une application

Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe  $n$  et  $(M, 0)$  un germe de variété complexe lisse de dimension complexe  $m$ . Notons  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $M$  compatible avec  $V$ . Soit  $(K)$  une triangulation de  $V$  subordonnée à la stratification  $\{V_\alpha\}$  et  $(D)$  une décomposition cellulaire duale de  $(K)$ . On suppose que  $\{0\}$  est barycentre d'un  $(k-1)$ -simplexe  $s$  de  $(K)$ . On notera  $\sigma$  la cellule de  $(D)$  de dimension réelle  $2(m-k+1)$  duale de  $s$ . Le point  $\{0\}$  est donc aussi barycentre de  $\sigma$ .

On note  $U$  un voisinage de  $0$  dans  $M$  et, avec  $k \leq n$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{C}^k$ ,

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$$

application holomorphe, restriction de  $F : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ , où

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z), \dots, F_k(z)).$$

En suivant la construction de [BMPS] rappelée en 3.2 on peut associer à chaque  $f_i$  un champ stratifié noté  $\overline{\nabla}_V f_i(z)$ .

Soit  $\Sigma f$  l'ensemble singulier de  $f$ . Le noyau  $\ker(dF_z)$  est transverse à l'espace tangent  $T_z V_\alpha(z)$  en tout point  $z \in V \setminus \{\Sigma f\}$ , où  $V_\alpha(z)$  désigne la strate  $V_\alpha$  de  $V$  qui contient le point  $z$ . Donc  $\ker(dF_z) + T_z V_\alpha(z) = T_z U$  s'identifie à  $\mathbb{C}^m$ , et comme  $\dim(\ker(dF_z)) = m - k$  nous obtenons  $\dim(T_z V_\alpha(z)) \geq k$ , autrement dit,  $V \setminus \{\Sigma f\}$  est contenu dans l'union des strates de  $V$  telles que  $\dim V_\alpha \geq k$ .

Soit  $p_\alpha : \mathbb{C}^m \simeq T_z U \rightarrow T_z V_\alpha(z)$  la projection canonique sur  $T_z V_\alpha(z)$ , où  $z \in V \setminus \{\Sigma f\}$ . On peut définir  $\overline{\nabla}_V f_1(z)$  comme  $p_\alpha(\overline{\nabla}_V f_1(z))$ , qui est un vecteur non nul (voir section 3.2). Pour  $i$  tel que  $1 < i \leq k$  nous faisons par récurrence la construction suivante : on associe à  $f_i(z)$  le champ  $\overline{\nabla}_V f_i(z) = p_\alpha(\overline{\nabla}_V f_i(z))$ , si l'ensemble  $\{\overline{\nabla}_V f_1(z), \overline{\nabla}_V f_2(z), \dots, \overline{\nabla}_V f_i(z)\}$  est linéairement indépendant. Dans le cas contraire, nous définissons  $f'_i(z) = f_i + \varepsilon_i l_i$ , où  $l_i : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  est une transformation linéaire générique, avec  $\varepsilon_i$  suffisamment petit de telle façon que l'ensemble

$$\{\overline{\nabla}_V f_1(z), \overline{\nabla}_V f_2(z), \dots, \overline{\nabla}_V f_{i-1}(z), p_\alpha(\overline{\nabla}_V f'_i(z))\}$$

soit linéairement indépendant. Nous définissons alors  $\overline{\nabla}_V f_i(z) = p_\alpha(\overline{\nabla}_V f'_i(z))$ . Notons que, pour  $\|(0, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)\|$  suffisamment petit,  $f$  est homotope à l'application :

$$g(z) = (f_1(z), f_2(z) + \varepsilon_2 l_2, \dots, f_k(z) + \varepsilon_k l_k).$$

On note  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  le  $k$ -champ  $(\overline{\nabla}_V f_1(z), \overline{\nabla}_V f_2(z), \dots, \overline{\nabla}_V f_k(z))$ , c'est un  $k$ -champ stratifié sans singularité sur  $(\partial B_\varepsilon \cap V \setminus \{\Sigma f\})$ , où  $B_\varepsilon$  est une boule dans  $M$  centrée en 0.

Dans le cas où  $V$  est une variété lisse et où  $\dim \Sigma f \leq k - 1$  on peut toujours choisir la cellule  $\sigma$  telle que :

$$\Sigma f \cap \partial \sigma = \emptyset. \quad (\delta)$$

Dans le cas où  $V$  est une variété singulière, soit  $\Sigma$  la partie singulière de  $V$  et  $V_{reg}$  la partie lisse. Si on a  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma \leq k - 1$ , et si  $f|_{V_{reg}}$  est tel que  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma f|_{V_{reg}} \leq k - 1$ , il existe  $\sigma$  telle que la relation  $(\delta)$  soit encore satisfaite.

Dans la suite de ce travail, nous considérons des applications  $f$  telles que la relation  $(\delta)$  soit satisfaite, ce qui au vu des cas particuliers précédents, n'est pas une condition très restrictive.

**DÉFINITION 5.1.** — *Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel, de dimension complexe  $n$ , situé dans  $(M, 0)$  germe de variété analytique complexe lisse de dimension complexe  $m$ . Soit  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , holomorphe,  $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$  et  $\Sigma f$  l'ensemble singulier de  $f$ . On dit que  $f$  satisfait à la condition  $(\delta)$  s'il existe une cellule  $\sigma$  de barycentre 0, de dimension réelle  $2(m - k + 1)$  d'une décomposition cellulaire  $(D)$  de  $M$ , telle que :*

$$\Sigma f \cap \partial \sigma = \emptyset. \quad (\delta)$$

La cellule  $\sigma$  de dimension réelle  $2(m - k + 1)$  ayant le point 0 comme barycentre, est transverse à  $V$  à l'origine, c'est-à-dire est transverse à toutes les strates  $V_\alpha \neq \{0\}$  de  $V$  telles que  $0 \in \overline{V}_\alpha$ , cela signifie que  $\text{codim}(\sigma \cap V_\alpha) = \text{codim} \sigma + \text{codim} V_\alpha$  pour toute strate  $V_\alpha$ . On note  $V^\sigma$  l'ensemble  $\sigma \cap V$ . Si  $f$  satisfait la condition  $(\delta)$  pour la cellule  $\sigma$ , le champ  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  se relève en un ensemble de  $k$  sections linéairement indépendantes  $\widetilde{\nabla}_V^{(k)}$  de  $\widetilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(\partial V^\sigma)$ . Soit  $\xi \in H^{2(n-k+1)}(\nu^{-1}(V^\sigma), \nu^{-1}(\partial V^\sigma))$  le cocycle d'obstruction pour l'extension de  $\widetilde{\nabla}_V^{(k)} f$  comme ensemble de  $k$  sections linéairement indépendantes de  $\widetilde{T}$  sur  $\nu^{-1}(V^\sigma)$ .

**DÉFINITION 5.2.** — *Dans les conditions précédentes, on définit l'obstruction d'Euler de  $f$  notée  $Eu_{f,V}(\sigma)$ , comme l'évaluation du cocycle  $\xi$  sur la classe fondamentale de la paire  $[\nu^{-1}(V^\sigma), \nu^{-1}(\partial V^\sigma)]$ . Autrement dit,*

$$Eu_{f,V}(\sigma) = \langle \xi, [\nu^{-1}(V^\sigma), \nu^{-1}(\partial V^\sigma)] \rangle.$$

Dans le cas  $k = 1$ , on retrouve, bien entendu, l'obstruction d'Euler locale  $Eu_{f,V}(0)$  définie dans [BMPS] (Définition 5).

## 6. Le Théorème

Rappelons que  $f = (f_1, \dots, f_k) : V \rightarrow \mathbb{C}^k$  est restriction d'une application holomorphe  $F = (F_1, \dots, F_k) : U \rightarrow \mathbb{C}^k$  où  $U$  est voisinage de 0 dans  $M$ . Nous notons encore  $B_\varepsilon$  une boule centrée en 0 et de rayon  $\varepsilon$ . A transformations linéaires près, on peut supposer que

$$\sigma_f = B_\varepsilon \cap F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0) \cap \dots \cap F_{k-1}^{-1}(0)$$

est transverse à  $V$ . En effet, si  $\sigma_f$  n'est pas transverse à  $V$  (c'est-à-dire n'est pas transverse à toutes les strates  $V_\alpha$  de  $V$ ), on peut prendre  $F'_i = F_i + \lambda_i l_i$ , où  $l_i : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  est une transformation linéaire générique, telle que  $\cap F'_i{}^{-1}(0)$  est transverse à  $V$ .

L'ensemble  $\sigma_f$  peut être identifié localement à une cellule de dimension  $2(m - k + 1)$  d'une décomposition cellulaire duale (D), construite à partir d'une triangulation (K) de  $M$  subordonnée à la stratification  $\{V_\alpha\}$ , où 0 est le barycentre de la cellule  $\sigma$ .

Notre résultat principal, généralisation du résultat de [BMPS] (voir la formule (1)) s'énonce comme suit :

**THÉORÈME 6.1.** — *Soit  $(V, 0) \subset (M, 0)$  un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe  $n$  situé dans  $(M, 0)$  germe de variété lisse complexe de dimension complexe  $m$ , et soit  $\{V_\alpha\}$  une stratification de Whitney de  $M$  compatible avec  $V$ . Pour un entier  $k \leq n$ , soit  $f : V \rightarrow \mathbb{C}^k$ , analytique, satisfaisant la condition  $(\delta)$  pour la cellule  $\sigma = \sigma_f$  de dimension réelle  $2(m - k + 1)$  d'une décomposition cellulaire (D) et telle que 0 soit barycentre de  $\sigma$ . Soit  $v^{(k)} = (v^{(k-1)}, v_k)$  un champ de  $k$ -repères sans singularité sur  $\partial V^\sigma$  tel que  $v_k$  soit un champ radial dans le sens usuel, on a :*

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = \left( \sum_{\alpha} Eu_V(V_\alpha) \cdot \chi(V_\alpha \cap B_\varepsilon \cap f^{-1}(z_0)) \right) + Eu_{f,V}(\sigma),$$

où  $\{V_\alpha\}$  décrit l'ensemble des strates de  $V$  telles que  $0 \in \overline{V}_\alpha$ .

*Démonstration.* — Soit  $\sigma = \sigma_f$  la  $2(m - k + 1)$  la cellule construite ci-dessus, et soit  $\sigma' \subset \sigma$  homothétique de  $\sigma$ , par une homothétie de centre 0, on note  $V^\sigma = \sigma \cap V$  et  $V^{\sigma'} = \sigma' \cap V$ .

Soit  $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ , holomorphe,

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z)) ;$$

nous montrons tout d'abord qu'on peut construire un champ de  $k$ -repères « adapté à  $f$  »,  $v_f^{(k)} = (v_f^{(k-1)}, v)$  sur  $V^\sigma \setminus \text{Int}(\sigma')$  tel que :

- (i)  $v_f^{(k)}$  coïncide avec  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  sur  $\partial V^{\sigma'}$  et avec  $v^{(k)}$  sur  $\partial V^\sigma$  ;
- (ii)  $v$  est tangent à  $f^{-1}(z_0) \cap V^\sigma$ , où  $z_0 \in \mathbb{C}^k \setminus \{f(\Sigma f)\}$  est une valeur régulière de  $f$  proche de l'origine ;
- (iii)  $v_f^{(k)}$  a seulement un nombre fini de singularités sur  $V^\sigma \setminus \{0\}$ , toutes situées dans  $f^{-1}(z_0)$  ;
- (iv) en chaque singularité  $a$  de  $v_f^{(k)}$  le champ  $v$  est transversalement radial à la strate contenant  $a$ .

Considérons la « couronne »  $C = \sigma \setminus \text{Int}(\sigma')$ . Sur le bord de  $C$ ,  $\partial\sigma' \cup \partial\sigma$  on peut définir le  $k$ -champ  $v_C^{(k)}$  comme étant  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  sur  $\partial\sigma'$  et  $v^{(k)}$  sur  $\partial\sigma$ . Comme dans le cas du  $k$ -champ  $v^{(k)}$  dans la construction 4.2, on peut prolonger  $v_C^{(k)}$  sur  $C$  en un  $k$ -champ par le procédé de prolongement radial de M.-H. Schwartz, on note encore  $v_C^{(k)}$  l'extension obtenue. Le  $k$ -champ  $v_C^{(k)}$  sur  $C \cap V$  coïncide avec  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  sur  $\partial\sigma' \cap V$ .

On appelle  $w_f^{(k)}$  le  $k$ -champ obtenu sur  $\sigma \cap V$ , égal à  $v_C^{(k)}$  sur  $C \cap V$  et à  $\overline{\nabla}_V^{(k)} f$  sur  $\sigma' \cap V$ .

Considérons la dernière fonction coordonnée  $f_k : V^\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , on sait par [BMPS] que, si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont suffisamment petites, il existe un champ de vecteurs stratifié  $v$  sur  $V^\sigma \setminus \text{Int}(\sigma')$  tel que :

- a)  $v$  coïncide avec  $\overline{\nabla}_V f_k(z)$  sur  $\partial V^{\sigma'}$  et est un champ radial sur  $\partial V^\sigma$  ;
- b)  $v$  est tangent à  $f_k^{-1}(t_0)$  pour  $t_0$  proche de 0 ;
- c)  $v$  a seulement un nombre fini de singularités, toutes situées dans  $f_k^{-1}(t_0)$  ;
- d) en chaque singularité  $a$ , le champ  $v$  est radial relativement à la strate contenant  $a$ .

En changeant la dernière coordonnée de  $w_f^{(k)}$  par le champ  $v$  ainsi construit on obtient un champ de  $k$ -repères satisfaisant les conditions désirées. On note  $v_f^{(k)}$  le  $k$ -champ obtenu.



Le  $k$ -champ  $v^{(k)}$ , resp. le  $k$ -champ  $v_f^{(k)}$ , admet un relèvement  $\tilde{v}^{(k)}$ , resp.  $\tilde{v}_f^{(k)}$ , comme ensemble de  $k$  sections linéairement indépendantes de  $\tilde{T}$  au dessus de  $\nu^{-1}(\partial V^\sigma)$ .

On note  $Obs(\tilde{v}^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^\sigma))$ , resp.  $Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^\sigma))$ , le cocycle d'obstruction pour étendre  $\tilde{v}^{(k)}$ , resp.  $\tilde{v}_f^{(k)}$ , sur  $\nu^{-1}(V^\sigma)$  à partir de  $\nu^{-1}(\partial V^\sigma)$ .

En remarquant que les  $k$ -champs  $v^{(k)}$  et  $v_f^{(k)}$  sont homotopes sur  $\partial V^\sigma$ , on a :

$$Obs(\tilde{v}^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^\sigma)) = Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^\sigma))$$

Il vient :

$$\begin{aligned} Obs(\tilde{v}^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^\sigma)) &= Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(\partial V^{\sigma'})) \\ &+ Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(V \cap \partial(\sigma \setminus Int(\sigma')))). \end{aligned}$$

Comme le  $k$ -champ  $v_f^{(k)}$  est adapté à  $f$ , par la condition (i) de la construction de  $v_f^{(k)}$  et par définition (Définition 5.2) on a (par abus de langage entre classe et évaluation) :

$$Eu(v^{(k)}, V, \sigma) = Eu_{f,V}(\sigma) + Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(V \cap \partial(\sigma \setminus Int(\sigma')))). \quad (6.1)$$

Par la condition (iii) de la construction de  $v_f^{(k)}$  ci-dessus, la contribution du cocycle d'obstruction  $Obs(\tilde{v}_f^{(k)}, \nu^{-1}(V \cap \partial(\sigma \setminus Int(\sigma'))))$  est concentrée dans  $\nu^{-1}(f^{-1}(z_0) \cap V^\sigma)$ . Par la condition (iv) et le théorème de proportionalité (voir formule (2)) [BS], la contribution de chaque singularité  $a_l$  de  $v_f^{(k)}$  est  $Eu_V(a_l)I(v_f^{(k)}, a_l)$ , où  $Eu_V(a_l)$  est constant et égal à  $Eu_V(V_\alpha)$  pour toutes les singularités  $a_l$  situées dans  $V_\alpha$  (Remarque 2.8). L'évaluation du dernier terme de (6.1) est donc égale à :

$$\sum_{a_l \in V^\sigma} Eu_V(a_l)I(v_f^{(k)}, V, a_l) = \sum_{\alpha} Eu_V(V_\alpha) \left( \sum_{a_l \in V_\alpha^\sigma} I(v_f^{(k)}, V_\alpha, a_l) \right).$$

Mais, les singularités de  $v_f^{(k)}$  sont en fait des singularités de  $v$ , qui sont toutes situées dans  $f^{-1}(z_0)$ , par la condition (ii) de la construction de  $v_f^{(k)}$ , on a donc :

$$\sum_{a_l \in V_\alpha \cap \sigma} I(v_f^{(k)}, V_\alpha, a_l) = \sum_{a_l \in V_\alpha \cap \sigma} I(v, V_\alpha \cap \sigma, a_l) = \chi(V_\alpha \cap \sigma \cap f^{-1}(z_0)).$$

L'obstruction d'Euler locale d'une application

Finalement, en remarquant que  $Eu_{f,V}(\sigma') = Eu_{f,V}(\sigma)$ , et comme

$$\sigma = B_\varepsilon \cap F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap F_{k-1}^{-1}(0),$$

on en déduit le théorème.

## 7. Cas des variétés lisses

Dans le cas où  $V$  est une variété lisse, on obtient la formule suivante :

**COROLLAIRE 7.1.** — *Soit  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$  holomorphe,  $n \geq k$ , telle que :*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, g(x)),$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Supposons que

$$g_0(x_k, \dots, x_n) = g(0, \dots, 0, x_k, \dots, x_n)$$

soit une fonction avec singularité isolée à l'origine, on a :

$$Eu_{f,\mathbb{C}^n}(\sigma) = (-1)^{n-k+1} \mu(g_0),$$

où  $\mu(g_0)$  est le nombre de Milnor de  $g_0$  à l'origine.

*Démonstration.* — L'ensemble singulier de  $f$  est donné par :

$$\Sigma f = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) : \partial_k g(x) = \partial_{k+1} g(x) = \cdots = \partial_n g(x) = 0\},$$

On peut prendre

$$\sigma = B_\varepsilon \cap (0, 0, \dots, 0) \times \mathbb{C}^{n-k+1},$$

on a  $f^{-1}(0, 0, \dots, 0, t_0) \cap \sigma = g_0^{-1}(t_0) \cap \sigma$ . Comme

$$g_0(x_k, \dots, x_n) = g(0, \dots, 0, x_k, \dots, x_n)$$

est une fonction avec singularité isolée à l'origine, la condition  $(\delta)$  est vérifiée donc, par la formule du théorème 6.1 on a :

$$Eu_{\mathbb{C}^n}(0) = \chi(\sigma \cap f^{-1}(0, \dots, t_0)) + Eu_{f,\mathbb{C}^n}(\sigma),$$

mais

$$\chi(\sigma \cap f^{-1}(0, \dots, 0, t_0)) = \chi(\sigma \cap g_0^{-1}(t_0)),$$

donc,

$$Eu_{f,\mathbb{C}^n}(\sigma) = (-1)^{n-k+1} \mu(g_0).$$

*Remarque 7.2.* — Notons qu'un germe  $f(x)$  de corang 1, du type ci-dessus, c'est-à-dire,

$$f(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, g(x)),$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , est  $\mathcal{K}$ -équivalent (cf [W]) au germe

$$h(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, g_0(x_k, \dots, x_n)),$$

parce que les idéaux engendrés par les fonctions coordonnées des deux germes sont égaux. Ainsi, le corollaire 7.1 s'applique, par exemple, à toutes les singularités du type  $A_l$ .

**EXEMPLE 7.3.** — Soit  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  où  $f(x, y, z) = (x, y^2 + z^{r+1})$ , l'ensemble singulier de  $f$  est  $\Sigma f = \mathbb{C} \times \{0, 0\}$ , par la formule du corollaire 7.1 on a :

$$Eu_{f, \mathbb{C}^3}(\sigma) = (-1)^2 \mu(y^2 + z^{r+1}) = \mu(y^2 + z^{r+1}) = r.$$

**EXEMPLE 7.4.** — Soit  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ ,  $n \geq k$ , un germe holomorphe de détermination finie (voir [W]). Alors  $f^{-1}(0)$  est une ICIS (intersection complète avec singularité isolée, voir [L] pour la définition et les propriétés des ICIS). En particulier, la dimension (complexe) est  $\dim_{\mathbb{C}}(f^{-1}(0)) = n - k$ .

En utilisant le théorème principal (Théorème 6.1) on a

$$Eu(v^{(k)}, \mathbb{C}^n, \sigma) = \chi(f^{-1}(z_0) \cap B_\varepsilon(0)) + Eu_{f, \mathbb{C}^n}(\sigma),$$

et, comme  $Eu(v^{(k)}, \mathbb{C}^n, \sigma) = 1$ , il vient :

$$Eu_{f, \mathbb{C}^n}(\sigma) = 1 - \chi(f^{-1}(z_0) \cap B_\varepsilon(0)).$$

Puisque  $f^{-1}(0)$  est une ICIS, on a

$$\chi(f^{-1}(z_0) \cap B_\varepsilon(0)) = 1 + (-1)^{n-k} \mu(f^{-1}(0))$$

où  $\mu(f^{-1}(0))$  est le nombre de Milnor de  $f^{-1}(0)$ . On obtient donc

$$Eu_{f, \mathbb{C}^n}(\sigma) = (-1)^{n-k+1} \mu(f^{-1}(0)).$$

**Remerciements.** — L'auteur voudrait remercier Jean-Paul Brasselet et Maria Aparecida Soares Ruas. Leurs remarques et leur patience l'ont beaucoup encouragé pour finaliser ce travail. L'auteur voudrait remercier aussi le rapporteur pour ses remarques et suggestions.

## Bibliographie

- [BLS] BRASSELET (J.-P.), LÊ (D. T.) et SEADE (J.). — Euler obstruction and indices of vector fields, *Topology*, no 6, p. 1193-1208 (2000).
- [BMPS] BRASSELET (J.-P.), MASSEY (D.), PARAMESWARAN (A. J.) et SEADE (J.). — Euler obstruction and defects of functions on singular varieties, *Journal London Math. Soc.* (2), 70, no 1, p. 59-76 (2004).
- [BS] BRASSELET (J.-P.) et SCHWARTZ (M.-H.). — Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, *Astérisque* 82-83, p. 93-147 (1981).
- [BSS] BRASSELET (J.-P.), SEADE (J.) et SUWA (T.). — A proof of the proportionality theorem, Preprint 2005.
- [GS] GONZALEZ-SPRINBERG (G.). — L'obstruction locale d'Euler et le Théorème de MacPherson, *Astérisque* 82-83, p. 7-32 (1981).
- [GLM] GUSEIN-ZADE (S.M.), LUENGO (I.) et MELLE-HERNÁNDEZ (A.). — On the topology of germs of meromorphic functions and its applications, (*Russian*) *Algebra i Analiz* 11 (1999), no. 5, p. 92-99; translation in *St. Petersburg Math. J.* 11, no. 5, p. 775-780 (2000).
- [JLS] JORGE PÉREZ (V. H.), LEVCOVITZ (D.) et SAIA (M. J.). — Invariants, equisingularity and Euler obstruction of map germs from  $\mathbb{C}^n$  to  $\mathbb{C}^n$ , *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* vol. 587, p. 145-167 (2005).
- [LT] LÊ (D. T.) et TEISSIER (B.). — Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Ann. of Math.* 114, p. 457-491 (1981).
- [L] LOOIJENGA (E.J.N.). — Isolated Singular Points on Complete Intersections, *London Mathematical Society - Lectures Notes Series* 77.
- [M] MACPHERSON (R. D.). — Chern classes for singular algebraic varieties, *Ann. of Math.* 100, p. 423-432 (1974).
- [Mi] MILNOR (J.). — Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press, 1968.
- [Sc1] SCHWARTZ (M.-H.). — Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, *CRAS* 260, p. 3262-3264 et p. 3535-3537 (1965).
- [Sc2] SCHWARTZ (M.-H.). — Champs radiaux sur une stratification analytique, *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 39 (1991).
- [Se] SEBASTIANI (M.). — Sur la formule de Gonzalez-Verdier, *Bull. Braz. Math. Soc.* 16 (1985), no. 1, p. 31-44.
- [S] STEENROD (N.). — The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.
- [T] TEISSIER (B.). — Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney, *Lecture Notes in Math.*, 961, Springer, Berlin, 1982.
- [V] VERDIER (J.-L. ). — Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Inventiones Math.*, p. 295-312, 36 (1976).
- [W] WALL (C. T. C. ). — Finite Determinacy of smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.*, p. 481-539, 13 (1981).
- [Wh] WHITNEY (H.). — Tangents to an analytic variety, *Ann. Math.* 81 (3), p. 496-549 (1965).