

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

LUDOVIC LANDURÉ

*Surfeuilletages de feuilletages singuliers
non dégénérés après un éclatement*

Tome XVII, n° 3 (2008), p. 577-595.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_3_577_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Surfeuillements de feuilletages singuliers non dégénérés après un éclatement^(*)

LUDOVIC LANDURÉ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Nous étudions des feuilletages Levi-plats dont la partie complexe est un feuilletage holomorphe ayant une singularité isolée en l’origine de \mathbb{C}^2 . Nous montrons que, si la partie complexe est non dégénérée après un éclatement, alors le feuilletage Levi-plat et sa partie complexe sont chacun décrits par une intégrale première submersive sauf en l’origine.

ABSTRACT. — We study Levi-flat foliations whose complex part is an holomorphic foliation with an isolated singularity at the origin of \mathbb{C}^2 . We show that, if the complex part is non degenerate after a blowing up, then the Levi-flat foliation and its complex part are both described by a first integral which is submersive on $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Table des matières

Notations	578
1 Introduction	578
2 Surfeuillement	580
3 Calcul de groupes d’invariance	582
4 Feuilletages singuliers non-dégénérés après éclatement .	587
Bibliographie	594

^(*) Reçu le 23 avril 2007, accepté le 7 février 2008

⁽¹⁾ Université de Bourgogne – I.M.B., 9 avenue Alain Savary – B.P. 47870, 21078 DIJON Cedex.

ludovic.landure@free.fr

<http://math.univ-angers.fr/~landure/>

Notations

$\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$: Direction réelle engendrée par v .
\mathbb{P}^n ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: Espace projectif complexe de dimension n .
$\text{Inv}(\mathcal{F})$: Ensemble des germes de biholomorphismes qui laissent invariant le feuilletage \mathcal{F} .
$\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$: Ensemble des germes de biholomorphismes de \mathbb{C} en 0 .
$\text{Re}(z)$: Partie réelle du nombre complexe z .
$\text{Im}(z)$: Partie imaginaire du nombre complexe z .

1. Introduction

Considérons deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Nous dirons que \mathcal{F}' est un surfeuilletage de \mathcal{F} si le fibré tangent de \mathcal{F} est inclus dans celui de \mathcal{F}' . Dans ces conditions, les feuilles de \mathcal{F}' sont feuilletées par celles de \mathcal{F} .

Un feuilletage Levi-plat est un feuilletage \mathcal{F} d'une variété holomorphe X tel que l'ensemble $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F} = T\mathcal{F} \cap iT\mathcal{F}$ soit un fibré intégrable au sens de Frobenius. La partie complexe $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ définie par le fibré $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ est un feuilletage en sous-variétés holomorphes qui n'est pas nécessairement holomorphe. Nous appelons de tels feuilletages des \mathbb{C} -feuilletages. En particulier, un feuilletage Levi-plat est un surfeuilletage d'un \mathbb{C} -feuilletage. La réciproque est fautive. En effet, un feuilletage Levi-plat est, transversalement à sa partie complexe, totalement réel ; *i.e.* les fibres de $T\mathcal{F}/T\mathcal{F}^{\mathbb{C}} \subset TX/T\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ ne contiennent pas de droite complexe. Cependant, si l'écart entre la dimension d'un \mathbb{C} -feuilletage et de l'un de ses surfeuilletages est égal à 1, alors le surfeuilletage est automatiquement Levi-plat. On pourra trouver une étude locale des feuilletages Levi-plats dans l'article [CS04] de D.Cerveau et P.Sad.

L'objectif de cet article est d'étudier les feuilletages Levi-plats \mathcal{C}^1 de dimension 3 sans singularité en dehors de l'origine et dont la partie complexe est un feuilletage holomorphe singulier en l'origine de \mathbb{C}^2 . Par les remarques précédentes, cette étude revient à l'étude des surfeuilletages de ces feuilletages. L'article se décompose essentiellement en trois parties :

- Généralités sur les surfeuilletages (section 2)
- Calcul de groupes d'invariance (section 3)
- L'étude des surfeuilletages de feuilletages non-dégénérés après un éclatement (section 4).

1.1. Généralités

Dans la section 2, nous rappelons sans démonstration les propriétés fondamentales des surfeuilletages. En particulier, considérons un feuilletage \mathcal{F} et un surfeuilletage \mathcal{F}' de \mathcal{F} . Pour chaque transversale T de \mathcal{F} , le feuilletage \mathcal{F}' induit alors un feuilletage \mathcal{F}'_T sur T . Il est fondamental de remarquer que ces feuilletages sont conjugués entre eux par le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} .

Étant donnés les forts liens qui existent entre l'existence d'un surfeuilletage et l'holonomie du feuilletage sous-jacent, nous déterminons dans la section 3 les groupes de biholomorphismes qui stabilisent des feuilletages de classe \mathcal{C}^1 . Nous montrons en particulier le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage sans singularité \mathcal{C}^1 de $(\mathbb{C}, 0)$. Alors il existe ϕ un germe de biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tel que : $\phi \circ \text{Inv}(\mathcal{F}) \circ \phi^{-1} \in \{\{\text{Id}\}, \{-\text{Id}, \text{Id}\}, \mathbb{R}^* \text{Id}\}$.*

Ce théorème a pour corollaire immédiat que le groupe d'holonomie d'une feuille d'un feuilletage holomorphe de codimension 1 admettant un surfeuilletage est linéarisable. Un tel résultat témoigne de la rigidité de la notion de feuilletages Levi-plats de partie complexe holomorphe. Cette rigidité est d'autant plus marquée lorsque l'holonomie d'une feuille F de la partie complexe d'un feuilletage Levi-plat \mathcal{F} est contractante. Une conjugaison linéarisant le groupe d'holonomie associé à une transversale T de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ envoie alors le feuilletage \mathcal{F}_T sur un feuilletage de $(\mathbb{C}, 0)$ défini par un champ de directions constant. En particulier, le feuilletage \mathcal{F} est nécessairement analytique au voisinage de F .

Nous complétons cette étude par le calcul de groupes d'invariance de feuilletages particuliers à singularités isolées et de classe \mathcal{C}^1 . Ces calculs seront utiles dans la section 4.

1.2. Feuilletages singuliers en dimension 2

Lorsqu'un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ de codimension 1 admet une intégrale première f submersive en dehors de son lieu singulier, il est aisé de construire un surfeuilletage de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$. Par exemple, la partie réelle de f décrit un feuilletage \mathcal{F} qui est clairement un surfeuilletage de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$. Plus généralement, la composée de f avec une application submersive g décrit un tel feuilletage. Dans cet article, nous relierons l'existence d'un surfeuilletage à l'existence d'une intégrale première submersive en dehors de l'origine.

Rappelons tout d'abord la définition de la notion de feuilletages singuliers non dégénérés :

DÉFINITION 1.2. — *Un germe de feuilletage holomorphe singulier est non dégénéré si, à une conjugaison près, il est décrit par une 1-forme ω dont la partie linéaire est de la forme $\lambda_1 x dy + \lambda_2 y dx$ avec $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.*

On suppose ici que le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ est non dicritique et qu'après un éclatement en l'origine les singularités qui apparaissent sont non-dégénérées et admettent au moins deux séparatrices. Un théorème de Mattei-Moussu nous assure alors que les singularités qui apparaissent sont linéarisables. En étudiant les traces du surfeuilletage sur les transversales du diviseur exceptionnel, nous établissons le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soit $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ un feuilletage holomorphe singulier non dicritique au voisinage de l'origine admettant un surfeuilletage \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^1 régulier en dehors de l'origine de \mathbb{C}^2 . On suppose qu'après un éclatement les singularités de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ sont non dégénérées et admettent au moins deux séparatrices lisses. Alors, quitte à réduire l'ouvert de définition de ces feuilletages, le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ admet une intégrale première g submersive en dehors de 0. De plus, il existe une application submersive f de $(\mathbb{C}, 0)$ dans \mathbb{R} telle que les feuilles de \mathcal{F} soient localement les fibres de la fonction $f \circ g$.*

Remarque 1.4. — Bien que nous n'utiliserons pas explicitement cet argument, les hypothèses du théorème 1.3 signifient qu'une singularité du feuilletage éclaté est réduite sans être de type selle-nœud ou qu'à défaut, elle est linéarisable.

Remarquons que le théorème 1.3 admet pour corollaire :

COROLLAIRE 1.5. — *Soit $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ un feuilletage logarithmique admettant une intégrale première multiforme du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_n^{\lambda_n}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. On suppose de plus que le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ admet un surfeuilletage \mathcal{C}^1 régulier en dehors de l'origine de \mathbb{C}^2 . Si les 1-formes df_i sont libres deux à deux en 0, alors les λ_i sont égaux.*

2. Surfeuilletages

2.1. Propriétés fondamentales

Remarque 2.1. — Les preuves des résultats de cette partie sont laissées au lecteur (cf. [Lan06]).

Nous commençons par introduire la notion de surfeuilletage.

DÉFINITION 2.2 (Surfeuilletage). — Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux feuilletages de dimensions respectives p et q sur une variété X de dimension n avec $p \leq q$. Le feuilletage \mathcal{F}' est un surfeuilletage de \mathcal{F} si le fibré tangent de \mathcal{F} est inclus dans celui de \mathcal{F}' . Dans ce cas, les feuilles de \mathcal{F}' sont saturées par celles de \mathcal{F} (i.e. le feuilletage \mathcal{F} induit un feuilletage sur chacune des feuilles de \mathcal{F}'). Nous dirons également que \mathcal{F} est un sous-feuilletage de \mathcal{F}' .

Le lemme suivant initie l'étude des propriétés fondamentales des surfeuilletages.

LEMME 2.3. — Soit T une transversale à un feuilletage \mathcal{F} . Alors tout surfeuilletage \mathcal{F}' de \mathcal{F} induit un feuilletage \mathcal{F}'_T sur T que l'on appellera trace de \mathcal{F}' sur T .

La trace d'un surfeuilletage va nous permettre de relier la notion de surfeuilletages à celle d'holonomie. Pour décrire ce lien, nous introduisons la notion de compatibilité d'un surfeuilletage par rapport à un pseudo-groupe.

DÉFINITION 2.4. — Soient \mathcal{F} un feuilletage et \mathcal{F}' un surfeuilletage de \mathcal{F} . On se donne un pseudo-groupe Γ de germes de difféomorphismes des transversales de \mathcal{F} . On dit que \mathcal{F}' est compatible avec le pseudo-groupe Γ si, pour toutes transversales T_1 et T_2 de \mathcal{F} et quel que soit le morphisme ϕ de Γ entre T_1 et T_2 , les traces de \mathcal{F}' sur T_1 et T_2 sont conjuguées par ϕ ; i.e. $\phi_* (\mathcal{F}'_{T_1}) = \mathcal{F}'_{T_2}$.

Grâce à cette notion, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.5. — Soient \mathcal{F} un feuilletage de dimension p sur une variété X de dimension n et \mathcal{F}' un surfeuilletage de \mathcal{F} . Alors le surfeuilletage \mathcal{F}' est compatible avec le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} .

Lorsque l'on définit un surfeuilletage \mathcal{F}' d'un feuilletage \mathcal{F} sur un ouvert, il est naturel de se demander à quelles conditions le surfeuilletage \mathcal{F}' se prolonge sur un ouvert plus grand. Dans le cas analytique, on peut appliquer le principe de prolongement analytique. Sans hypothèse de régularité sur les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' , il est plus adéquat de prolonger le surfeuilletage \mathcal{F}' au saturé de son ouvert de définition pour le feuilletage \mathcal{F} . La proposition 2.5 donne une condition nécessaire pour que ce prolongement soit possible. Elle s'avère suffisante.

PROPOSITION 2.6. — Soient \mathcal{F} un feuilletage sur une variété X et \mathcal{F}' un surfeuilletage de $\mathcal{F}|_U$ où U désigne un ouvert de X . Supposons que la

restriction à U du pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} est compatible avec \mathcal{F}' . Alors le feuilletage \mathcal{F}' se prolonge au saturé de U pour \mathcal{F} .

2.2. Surfeuilletage et espace des feuilles

Comme nous le verrons par la suite, lorsque l'espace des feuilles est une variété, un surfeuilletage ne définit pas nécessairement un feuilletage sur l'espace des feuilles. Cependant, il existe une classe de feuilletages qui corrobore cette intuition : les feuilletages simples. Dans ce cas, l'espace des feuilles est une variété a priori non séparée et les surfeuilletages sont décrits par les feuilletages sur l'espace des feuilles.

Rappelons tout d'abord la définition des feuilletages simples (cf. [God91]).

DÉFINITION 2.7. — Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété X . Le feuilletage \mathcal{F} est simple si tout point x de X possède un voisinage ouvert distingué pour \mathcal{F} coupant chaque feuille de \mathcal{F} en au plus une seule plaque.

On peut maintenant énoncer le résultat.

PROPOSITION 2.8. — Soit \mathcal{F} un feuilletage simple sur une variété X . Alors l'espace des feuilles X/\mathcal{F} a une structure de variété (éventuellement non séparée) telle que la projection $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{F}$ soit une submersion. Tout surfeuilletage de \mathcal{F} est l'image réciproque par π d'un feuilletage défini sur X/\mathcal{F} .

3. Calcul de groupes d'invariance

Si un feuilletage admet un surfeuilletage, alors le groupe d'holonomie de chacune de ses feuilles stabilise un feuilletage. Puisque nous nous intéressons aux surfeuilletages des feuilletages holomorphes, il s'avère nécessaire d'étudier des groupes de biholomorphismes qui laissent invariants des feuilletages réguliers ou non. D'une part, en étudiant les groupes de biholomorphismes qui laissent stables les feuilletages \mathcal{C}^1 réguliers de dimension 1, nous établissons que le groupe d'holonomie d'une feuille d'un feuilletage holomorphe de codimension complexe 1 admettant un surfeuilletage \mathcal{C}^1 régulier de codimension réelle 1 est linéarisable. D'autre part, nous caractérisons les biholomorphismes qui conjuguent certains feuilletages avec une singularité isolée en l'origine définis par des applications multiformes bien choisies.

Remarque 3.1. — Un champ de vecteurs X de $(\mathbb{C}, 0)$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ où f est une fonction à valeurs dans \mathbb{C} de même régularité que X . Si $X_1(z) = f_1(z)\frac{\partial}{\partial z}$ et $X_2(z) = f_2(z)\frac{\partial}{\partial z}$, on notera $X_1(z) \sim X_2(z)$ si $f_1(z) \sim f_2(z)$.

3.1. Feuilletages réguliers

Dans toute cette partie, nous nous donnons un feuilletage régulier \mathcal{F} de $(\mathbb{C}, 0)$ et de classe \mathcal{C}^1 . Nous étudions le groupe $\text{Inv}(\mathcal{F})$ des germes de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ qui stabilisent le feuilletage \mathcal{F} . Nous commençons par établir que les éléments tangents à l'identité se réduisent à l'identité. Pour cela, nous exploitons un théorème de Leau-Ecalle (cf. [Lor05] et [Lea97]) que nous exprimons sous la forme simplifiée suivante :

THÉORÈME 3.2 (Leau+Ecalle). — *Soit $f(z) = z + z^{p+1} + o(z^{p+1})$ un germe de biholomorphisme. Il existe un ouvert sectoriel V , appelé pétale, adhérent à l'origine et un plongement $\psi : V \hookrightarrow \mathbb{C}$ tels que :*

- *l'ouvert V est stable par f .*
- *$\psi(z) = -\frac{1}{pz^p} + o(\frac{1}{z^p})$.*
- *L'application ψ conjugue f à la translation ($w \mapsto w + 1$).*

Ce théorème nous permet d'établir le lemme suivant :

LEMME 3.3. — *Soit $f(z) = z + z^{p+1} + o(z^{p+1})$. Soit X un champ de vecteurs défini sur un pétale V tel que $X(z) \sim \alpha z^\beta \frac{\partial}{\partial z}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Si f stabilise le champ de directions réelles engendré par X , alors $\beta = p + 1$.*

Démonstration. — On applique le théorème 3.2.

On a : $\psi^{-1}(w) = (-pw)^{-\frac{1}{p}} + o_{+\infty}(w^{-\frac{1}{p}})$ et, sur tout ouvert de V d'ouverture plus petite, $\psi'(z) = \frac{1}{z^{p+1}} + o_0(\frac{1}{z^{p+1}})$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_*(X)(w) &= \left((-pw)^{1+\frac{1}{p}} + o_{+\infty}(w^{1+\frac{1}{p}}) \right) X \left((-pw)^{-\frac{1}{p}} + o_{+\infty}(w^{-\frac{1}{p}}) \right) \\ &= \left(\alpha (-pw)^{1+\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}} + o_{+\infty}(w^{1+\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}}) \right) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

L'application ψ conjugue f à la translation ($w \mapsto w + 1$). Puisque f stabilise le champ de directions réelles engendré par X , le champ de directions réelles engendré par $\psi_*(X)$ doit être 1-périodique.

$$\text{Or : } \lim_{\text{Re}(w) \rightarrow +\infty} \langle (\alpha (-pw)^{1+\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}}) \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \alpha \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Donc : $\lim_{\text{Re}(w) \rightarrow +\infty} \langle \psi_*(X)(w) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \alpha \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$. On en déduit que le champ de directions $\langle \psi_*(X) \rangle_{\mathbb{R}}$ est constant. Par conséquent, $\beta = p + 1$. \square

Remarque 3.4. — Remarquons que le champ de directions engendré par X est un multiple de celui engendré par le logarithme sectoriel de f .

COROLLAIRE 3.5. — *Soient $f(z) = z + \lambda z^{p+1} + o(z^{p+1})$ et \mathcal{F} un feuilletage régulier de $(\mathbb{C}, 0)$ de classe C^1 stable par l'action de f . Alors $f = \text{Id}$.*

Démonstration. — Le feuilletage \mathcal{F} est engendré par un champ de vecteurs non nul continu X . On a alors : $X(z) \sim X(0)$. Quitte à conjuguer par une homothétie, on peut supposer $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$. Le lemme précédent exclut le cas $\lambda = 1$. On en déduit le corollaire. \square

Pour pouvoir établir, le théorème 3.9 nous aurons également besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 3.6. — *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage réel régulier et de classe C^1 de $(\mathbb{C}, 0)$ stable par λId avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. Alors le feuilletage \mathcal{F} est décrit par un champ de directions constant.*

LEMME 3.7. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage de $(\mathbb{C}, 0)$ décrit par un champ de directions constant. Alors $\text{Inv}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^* \text{Id}$.*

Démonstration. — La preuve de ces deux lemmes est laissée au lecteur. \square

Enfin, rappelons le théorème de Koenigs.

THÉORÈME 3.8 (Théorème de Koenigs). — *Soit f un germe de biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tel que $f'(0) = \lambda$ avec $|\lambda| \neq 1$. Alors, à une conjugaison près, $f(z) = \lambda z$.*

Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3.9. — *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage sans singularité de $(\mathbb{C}, 0)$ et de classe C^1 . Alors il existe ϕ un germe de biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tel que : $\phi \circ \text{Inv}(\mathcal{F}) \circ \phi^{-1} \in \{\{\text{Id}\}, \{-\text{Id}, \text{Id}\}, \mathbb{R}^* \text{Id}\}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \text{Inv}(\mathcal{F})$. La partie linéaire d'un biholomorphisme stabilisant le feuilletage \mathcal{F} doit stabiliser la direction du feuilletage \mathcal{F} en l'origine. Par conséquent, $f'(0) \in \mathbb{R}^*$.

Si $f'(0) \neq \pm 1$, alors, par le théorème de Koenigs, on peut supposer que f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Le lemme 3.6 nous assure que le feuilletage \mathcal{F} est alors un feuilletage constant. Enfin, grâce au lemme 3.7, on obtient : $\text{Inv}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^* \text{Id}$.

Si $f'(0) = -1$, alors $(f \circ f)'(0) = 1$. Par le corollaire 3.5, cela implique que $f \circ f = \text{Id}$. Le biholomorphisme $\text{Id} - f$ conjugue f à $-\text{Id}$. De même, si g est un élément de $\text{Inv}(\mathcal{F})$ tel que $g'(0) = -1$, alors $g \circ f = \text{Id}$ et donc $g = f$. Dans ces conditions et si, de plus, $\text{Inv}(\mathcal{F})$ n'a que des éléments dont la dérivée en l'origine est égale à ± 1 , alors le groupe $\text{Inv}(\mathcal{F})$ est conjugué biholomorphiquement à $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

Enfin, si tous les éléments de $\text{Inv}(\mathcal{F})$ sont tangents à l'identité, alors le corollaire 3.5 nous assure que $\text{Inv}(\mathcal{F})$ est réduit à $\{\text{Id}\}$. \square

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.10. — *Soit $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ un feuilletage holomorphe de codimension 1 qui est la partie complexe d'un feuilletage Levi-plat \mathcal{F} de codimension réelle 1 et de classe \mathcal{C}^1 . Alors les groupes d'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ sont linéarisables.*

3.2. Exemples de feuilletages à singularité isolée

Il nous sera très utile de connaître les groupes de biholomorphismes laissant invariants des feuilletages réels à singularités isolées ou plus généralement les ensembles de biholomorphismes conjugant ces feuilletages. Nous répertorions ici quelques exemples de telles études. Nous commençons par l'étude d'un feuilletage défini par une fonction holomorphe multiforme.

Remarque 3.11. — Dans toute la suite, lorsque nous utilisons des puissances non entières, nous parlons évidemment d'un choix de détermination de ces puissances non entières.

Pour un vecteur v non nul d'un \mathbb{C} -espace vectoriel, nous noterons $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ la droite réelle engendrée par v .

LEMME 3.12. — *Soient β_1 et β_2 deux nombres complexes différents de 1 et de 0 tels que $e^{2i\pi\beta_k} \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) et α_1 et α_2 deux nombres complexes non nuls. Alors les applications $\phi_k(z) = \langle \alpha_k z^{\beta_k} \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$, $k = 1, 2$, sont bien définies sur \mathbb{C}^* et leurs feuilletages associés \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont conjugués par un biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ si et seulement si les constantes β_1 et β_2 sont égales.*

De plus, lorsque β_1 n'est pas un entier supérieur ou égal à 2, les biholomorphismes qui conjuguent ces feuilletages sont de la forme :

$$f(z) = \lambda z$$

$$\text{où } \lambda = \left(r \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} \text{ et } r \in \mathbb{R}^*.$$

Sinon, ils sont de la forme :

$$f(z) = \frac{\lambda z}{(1 + cz^{\beta_1 - 1})^{\frac{1}{\beta_1 - 1}}}$$

où $\lambda = \left(r \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}}$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Les déterminations de z^{β_k} sont égales à une multiplication par une puissance de $e^{2i\pi\beta_k}$ près. Or ces constantes sont réelles. La direction réelle engendrée par une détermination de la fonction $\alpha_k z^{\beta_k}$ ne dépend donc pas du choix de la détermination. Par conséquent, les applications ϕ_k sont bien définies.

Soit f un biholomorphisme qui conjugue localement en 0 le feuilletage \mathcal{F}_1 en \mathcal{F}_2 . Puisque ces deux feuilletages ont une unique singularité en 0, l'application f fixe nécessairement l'origine. On se place sur un ouvert D de \mathbb{C}^* tel que les applications multiformes $f(z)^{\beta_1}$ et z^{β_2} admettent une détermination. Il existe alors une application $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on ait la relation suivante : $\alpha_1 f(z)^{\beta_1} = \alpha_2 g(z) f'(z) z^{\beta_2}$. Sur cet ouvert D , la fonction g est clairement holomorphe et donc égale à une constante réelle non nulle r . Après intégration, on en déduit

$$f(z) = \left[\frac{\alpha_2 r}{\alpha_1} \frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 - 1} \frac{z^{\beta_2 - 1}}{1 + cz^{\beta_2 - 1}} \right]^{\frac{1}{\beta_1 - 1}}$$

où c désigne une constante complexe. L'application multiforme f admet une détermination qui est un biholomorphisme en 0 si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $c = 0$ et $\beta_1 = \beta_2$
- $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ $\beta_1 = \beta_2 = n$

Ceci termine la démonstration. □

Nous en déduisons les groupes d'invariance de ces feuilletages.

COROLLAIRE 3.13. — *Soient α et β comme précédemment et \mathcal{F} le feuilletage défini par $\phi(z) = \langle \alpha z^\beta \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$.*

Si β n'est pas un entier supérieur ou égal à 2, alors :

$$\text{Inv}(\mathcal{F}) = \left\{ f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \ / \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(z) = e^{\frac{\log(r) + ik\pi}{\beta - 1}} z \right\}$$

Sinon

$$\text{Inv}(\mathcal{F}) = \left\{ f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \exists c \in \mathbb{C} \exists r \in \mathbb{R}^{+*} f(z) = \frac{re^{\frac{ik\pi}{\beta-1}} z}{(1 + cz^{\beta-1})^{\frac{1}{\beta-1}}} \right\}$$

Nous continuons à étudier les groupes d'invariance de feuilletages réels. Nous énonçons le lemme suivant :

LEMME 3.14. — *Soient X et Y deux champs de vecteurs \mathcal{C}^1 qui ne s'annulent pas au voisinage de 0. Soient également deux entiers naturels n_1 et n_2 . On suppose que les champs de directions $X_{n_1}(z) = \left\langle z^{1-\frac{n_1}{2}} X(z^{\frac{n_1}{2}}) \right\rangle_{\mathbb{R}}$ et $Y_{n_2}(z) = \left\langle z^{1-\frac{n_2}{2}} Y(z^{\frac{n_2}{2}}) \right\rangle_{\mathbb{R}}$ sont bien définis indépendamment des choix de déterminations de $z^{\frac{n_1}{2}}$ et $z^{\frac{n_2}{2}}$. Si X_{n_1} et Y_{n_2} sont conjugués par un biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$, alors les constantes n_1 et n_2 sont égales.*

Démonstration. — L'indice du champ de directions X_{n_1} est égal à $1 - \frac{n_1}{2}$ et celui de Y_{n_2} est $1 - \frac{n_2}{2}$. Si ces deux champs sont conjugués alors ces deux indices sont égaux. On en déduit le lemme. \square

Nous ne déterminons pas les groupes d'invariance de ces feuilletages d'une manière générale. Par contre, nous montrons le lemme suivant :

LEMME 3.15. — *Soient n un entier naturel non nul et X un champ de vecteurs qui ne s'annule pas au voisinage de 0. Comme précédemment, on suppose que le champ de directions X_n est bien défini. On se donne f un biholomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ tangent à l'identité qui laisse invariant X_n . Alors l'application f est égale à l'identité.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 3.3. \square

4. Feuilletages singuliers non-dégénérés après un éclatement

Nous démontrons ici le théorème 1.3. Après éclatement, les singularités qui apparaissent sont linéarisables. Nous commençons donc notre étude par quelques remarques sur les surfeuillements de feuilletages linéaires. Après l'étude de coefficients caractérisant ces singularités, nous construisons l'intégrale première.

4.1. Remarques sur les feuilletages linéaires et leurs surfeuilletages

Nous notons $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$ le feuilletage linéaire défini par le champ de vecteurs holomorphe de la forme

$$X_\lambda = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$$

où λ est un nombre complexe non nul.

Les deux axes sont des feuilles des feuilletages $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$. Rappelons leur groupes d'holonomie.

PROPOSITION 4.1. — *Le groupe d'holonomie de la feuille $\{y = 0\}$ de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$ associé à la transverse $\{x = 1\}$ est engendré par la similitude de rapport $e^{2i\pi\lambda}$ et de centre $(1, 0)$.*

Le groupe d'holonomie de la feuille $\{x = 0\}$ de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$ associé à la transverse $\{y = 1\}$ est engendré par la similitude de rapport $e^{\frac{2i\pi}{\lambda}}$ et de centre $(1, 0)$.

Le lemme suivant nous assure que l'étude locale des surfeuilletages des feuilletages linéaires peut se faire sur un ouvert saturé :

LEMME 4.2. — *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit \mathcal{F} un surfeuilletage de $\mathcal{F}_{\lambda|B(0,r)}^{\mathbb{C}}$ éventuellement singulier, où $B(0, r)$ désigne la boule de rayon $r > 0$ pour la norme du maximum des modules. Alors le feuilletage \mathcal{F} se prolonge au saturé $B(0, r)$ pour $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Soit F une feuille de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$. A l'aide du flot ϕ de X_λ , on montre que l'intersection de F avec $B(0, r)$ est homotope à F . Par conséquent, le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}_{\lambda|B(0,r)}^{\mathbb{C}}$ est égal à la restriction à $B(0, r)$ du pseudo-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$. Puisque le premier pseudo-groupe est naturellement compatible avec \mathcal{F} , il en est de même pour le second. Par la proposition 2.6, le surfeuilletage \mathcal{F} se prolonge au saturé de $B(0, r)$. \square

Pour un surfeuilletage \mathcal{F} de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$, on note \mathcal{F}_x la trace de \mathcal{F} sur la transverse $\{x = 1\}$ et \mathcal{F}_y la trace de \mathcal{F} sur la transverse $\{y = 1\}$. Dans toute la suite, on identifie canoniquement les droites $\{x = 1\}$ et $\{y = 1\}$ à \mathbb{C} .

LEMME 4.3. — *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit \mathcal{F} un surfeuilletage de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$ régulier le long de l'axe $\{y = 0\}$. On peut alors écrire λ sous la forme : $\lambda = \frac{n}{2} + ir$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{R}$, i.e. $e^{2i\pi\lambda} \in \mathbb{R}$.*

Si, de plus, $\lambda \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et quitte à réduire l'ouvert de définition de \mathcal{F} , on a alors :

Surfeuilletages de feuilletages singuliers non dégénérés après un éclatement

- \mathcal{F}_x est un feuilletage constant.
- \mathcal{F}_y est décrit par un champ de directions de la forme $\langle \alpha z^{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Le groupe d’holonomie de la feuille $\{y = 0\}$ de $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$ associé à la transversale $\{x = 1\}$ est engendré par la similitude de rapport $e^{2i\pi\lambda}$ et de centre $(1, 0)$ de l’espace affine $\{x = 1\}$. Par conséquent, la constante $e^{2i\pi\lambda}$ est un réel non nul. Si, de plus, λ n’est pas un élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, sa valeur absolue est différente de 1 ; l’holonomie est contractante. Le lemme 3.6 nous assure que le feuilletage \mathcal{F}_x est un feuilletage constant. Par conséquent, les feuilles du feuilletage \mathcal{F}_x sont décrites par des applications du type $(u \mapsto e^{i\theta}(u + i\epsilon))$ où u, ϵ et θ sont des réels (θ ne dépend pas du choix de la feuille). Grâce au lemme 4.2 et quitte à réduire l’ensemble définition de \mathcal{F} , nous pouvons prolonger le feuilletage \mathcal{F} à un ouvert saturé pour le feuilletage $\mathcal{F}_\lambda^{\mathbb{C}}$. Ainsi, grâce au flot de X_λ , toutes les déterminations de l’application $x(u) = (e^{i\theta}(u + i\epsilon))^{-\frac{1}{\lambda}}$ sont des paramétrages de feuilles de \mathcal{F}_y . En dérivant ces applications, on montre que le feuilletage \mathcal{F}_y est décrit par un champ de directions de la forme $\psi(z) = \langle -\frac{e^{i\theta}}{\lambda} z^{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$. Cela termine la démonstration du lemme. \square

LEMME 4.4. — Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit \mathcal{F} un surfeuilletage de $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$ régulier le long de l’axe $\{y = 0\}$. Quitte à réduire l’ouvert de définition de \mathcal{F} , on a alors :

- \mathcal{F}_x est régulier et est décrit par une intégrale première réelle submersive f et par un champ de vecteurs X .
- \mathcal{F}_y est décrit par le champ de directions $\langle z^{1-n} X(z^n) \rangle_{\mathbb{R}}$.
- \mathcal{F} admet pour intégrale première $f(x^n y)$.

Réciproquement, la composée d’une application submersive f avec $x^n y$ définit un surfeuilletage de $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$ régulier le long de l’axe $\{y = 0\}$.

Démonstration. — Le feuilletage \mathcal{F} est régulier le long de l’axe $\{y = 0\}$. Le feuilletage \mathcal{F}_x est donc régulier. Quitte à réduire son domaine de définition et donc celui de \mathcal{F} , on peut supposer que \mathcal{F}_x est décrit par une intégrale première submersive f et par un champ de vecteurs X .

L’application d’expression $x^n y$ est une intégrale première de $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$. L’application $f(x^n y)$ définit une intégrale première de \mathcal{F} sauf éventuellement le long de l’axe $\{x = 0\}$.

Grâce au flot de $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$, on montre aisément que le feuilletage \mathcal{F}_y est l'image du feuilletage \mathcal{F}_x par les déterminations des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. On obtient ainsi le champ de directions proposé.

La réciproque est claire. \square

4.2. Étude des singularités du diviseur exceptionnel

Nous nous ramenons à des singularités linéarisables grâce au théorème de J.F. Mattei et R. Moussu suivant :

THÉORÈME 4.5 (Théorème de Mattei-Moussu). — (cf. [CM82] et [MM80]) Soit $\omega = \lambda_1 x dy + \lambda_2 y dx + \dots$ un germe de 1-forme holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 avec $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, i.e. ω définit un feuilletage singulier non dégénéré. Alors la 1-forme ω est linéarisable au voisinage de 0 si et seulement si l'holonomie d'une séparatrice lisse est linéarisable.

En notant E l'application d'éclatement en l'origine de $(\mathbb{C}^2, 0)$, ce théorème nous permet d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 4.6. — *On suppose que $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ admet un surfeuilletage lisse \mathcal{F} . Alors les singularités de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ sont linéarisables et le feuilletage $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ est, en chacune de ces singularités, localement biholomorphe à l'un des feuilletages singuliers $\mathcal{F}_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ telle que la constante $e^{2i\pi\lambda}$ soit réelle. Le groupe d'holonomie de la séparatrice qui n'est pas le diviseur exceptionnel $E^{-1}(\{0\})$ est alors engendré par une application conjuguée à $(z \mapsto e^{2i\pi\lambda} z)$.*

Démonstration. — Après avoir fait un éclatement, le surfeuilletage est bien défini partout sauf sur le diviseur exceptionnel. Puisque le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ est non dicritique, l'une des deux séparatrices lisses de chaque singularité est la trace du diviseur exceptionnel. Par le corollaire 3.10, l'holonomie de la seconde séparatrice est alors linéarisable de partie linéaire réelle. D'après le théorème 4.5, cela implique que la singularité est linéarisable. L'équivalence avec les feuilletages $\mathcal{F}_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ est alors claire car l'holonomie de la seconde séparatrice doit être réelle. \square

Ces coefficients λ sont en nombre fini puisqu'ils correspondent aux singularités situées sur le diviseur exceptionnel $E^{-1}(\{0\})$ qui est un compact canoniquement isomorphe à \mathbb{P}^1 . On les note λ_k . On a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.7. — $\sum_k \frac{1}{\lambda_k} = -1$

Démonstration. — C'est une application directe de la formule de l'indice de Camacho-Sad (cf. [CS82]). \square

Dans un premier temps, nous excluons le cas où une des singularités qui apparaît a une holonomie contractante par le lemme suivant :

LEMME 4.8. — *Si $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ admet un surfeuilletage \mathcal{F} , alors $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ n'admet pas de singularités linéarisables contractantes. En particulier, les coefficients λ_k sont de la forme $\frac{n_k}{2}$ avec n_k entier relatif.*

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que tous les λ_k sont réels.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe k_0 tel que $e^{2i\pi\lambda_{k_0}}$ soit un réel différent de ± 1 . On identifie localement le feuilletage $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ au feuilletage \mathcal{F}_{λ_k} . Par le lemme 4.3, la trace du feuilletage sur une transversale au diviseur exceptionnel est conjuguée à $\langle \alpha z^{\lambda_{k_0}+1} \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$. Or, par le lemme 3.12, lorsque les coefficients β ne sont pas réels, les feuilletages du type $\langle \alpha z^{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$ sont conjugués si et seulement si ils ont le même coefficient β . Par conséquent, tous les λ_k ayant une partie imaginaire non nulle sont égaux. Or la somme de tous les inverses des λ_k est réelle. On en déduit que tous les coefficients λ_k sont réels. \square

Nous continuons par une étude locale au voisinage de chaque point singulier du diviseur exceptionnel.

Pour chaque point singulier A sur le diviseur exceptionnel, on note $\lambda_A = \frac{n_A}{2}$ le coefficient $\lambda_k = \frac{n_k}{2}$ associé à la singularité A . Au voisinage de A , on se donne une transversale T_A de la séparatrice du feuilletage initial. On note A_1 le point d'intersection de la séparatrice et de la transversale. Toujours au voisinage de A , on se donne une transversale \tilde{T}_A du diviseur exceptionnel. On note A_0 le point d'intersection du diviseur exceptionnel et de cette transversale. Nous résumons tout cela dans la figure 1.

LEMME 4.9. — *Soit T une transversale au diviseur exceptionnel en un point P . Alors il existe k tel que $\lambda_k = \frac{n_k}{2}$ soit négatif et que l'indice de \mathcal{F}_T en P soit égal à $1 + \frac{n_k}{2}$.*

Démonstration. — Puisque la somme des λ_k vaut -1 , on est sûr qu'au moins un des λ_k est négatif. On note A l'un des points correspondant à ce coefficient. Les feuilletages \mathcal{F}_T et $\mathcal{F}_{\tilde{T}_A}$ sont conjugués via le transport holonome du diviseur exceptionnel. Il suffit donc de calculer l'indice de $\mathcal{F}_{\tilde{T}_A}$.

Grâce au flot de $\mathcal{F}_{\lambda_A}^{\mathbb{C}}$, on déduit que la trace du surfeuilletage sur \tilde{T}_A est, à une conjugaison près, l'image réciproque d'un champ de directions régulier par l'application $\left(z \mapsto z^{-\frac{n_A}{2}} \right)$; c'est-à-dire qu'à une conjugaison près, il est décrit par un champ de directions du type suivant : $\left\langle z^{1+\frac{n_A}{2}} X \left(z^{-\frac{n_A}{2}} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}}$

où X est un champ de vecteurs qui ne s'annule pas à l'origine. L'indice d'un tel champ de directions est clairement $1 + \frac{n_A}{2}$. \square

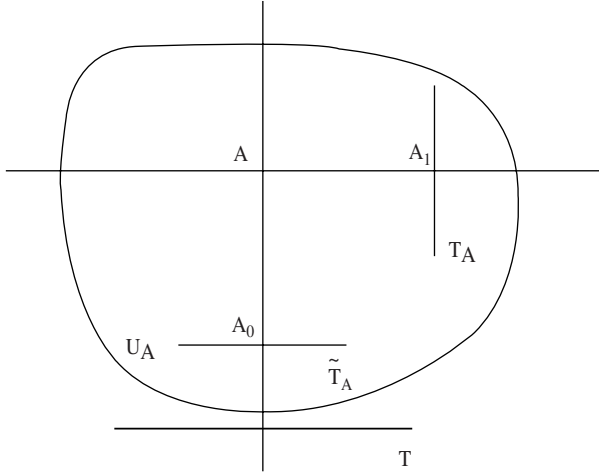


Figure 1. — Notations

Par l'unicité de l'indice, on en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.10. — *Les coefficients λ_k négatifs sont tous égaux.*

Maintenant, nous allons écarter l'existence d'un coefficient λ_k positif. Pour faire cette étude, nous utiliserons le théorème de Poincaré-Hopf (cf. [Spi70]) pour les feuilletages en dimension 2. Nous obtenons le lemme suivant :

LEMME 4.11. — *Les coefficients λ_k sont tous négatifs.*

Démonstration. — On se donne un point singulier A tel que λ_A soit positif. Le surfeuilletage \mathcal{F} de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ induit un surfeuilletage de $\mathcal{F}_{\lambda_A}^{\mathbb{C}}$ restreint à un voisinage de l'origine privé de l'axe des y . Par un abus sans conséquence, nous conservons les notations précédentes pour ce surfeuilletage.

On définit Ψ de la façon suivante :

– Si n_A est pair, $m = \frac{n_A}{2}$ et

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (x, y) & \longmapsto [x^{\frac{n_A}{2}} : y] \end{cases}$$

- Si n_A est impair, $m = n_A$ et

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (x, y) & \longmapsto [x^{n_A} : y^2] \end{cases}$$

Ainsi, les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda_A}^{\mathbb{C}}$ sont les fibres de l'application ψ . Par le lemme 4.2, le feuilletage \mathcal{F} se prolonge à $\mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$. D'autre part, le feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda_A}^{\mathbb{C}}$ est simple en dehors des axes. Le feuilletage \mathcal{F} induit donc un feuilletage \mathcal{G} régulier sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$. Nous calculons tout d'abord l'indice de \mathcal{G} en 0 et en ∞ .

La feuille passant par A_1 correspond au point 0. En A_1 , le feuilletage \mathcal{F}_{T_A} est régulier et isomorphe à $\mathcal{F}_{\{x=1\}}$. Or, le feuilletage \mathcal{G} est, en 0, l'image directe de $\mathcal{F}_{\{x=1\}}$ par ψ . Le feuilletage \mathcal{G} est donc, à conjugaison près, l'image directe d'un feuilletage régulier par $(z \mapsto z)$ ou par $(z \mapsto z^2)$. L'indice de \mathcal{G} en 0 est donc égal à 0 ou à $\frac{1}{2}$.

La feuille passant par A_0 correspond au point ∞ . Par le lemme précédent, il existe un entier naturel n tel qu'en A_0 , le feuilletage $\mathcal{F}_{\tilde{T}_A}$ ait un indice égale à $1 - \frac{n}{2}$. De plus, le feuilletage $\mathcal{F}_{\tilde{T}_A}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{\{y=1\}}$. Or, en ∞ , le feuilletage \mathcal{G} est l'image directe de $\mathcal{F}_{\{y=1\}}$ par ψ . Le feuilletage \mathcal{G} est donc, à conjugaison près, l'image directe d'un feuilletage d'indice $1 - \frac{n}{2}$ par $(z \mapsto z^m)$. Si φ est un champ de directions décrivant $\mathcal{F}_{\{y=1\}}$, alors \mathcal{G} est décrit en ∞ par le champ de directions suivant $\left\langle z^{1-\frac{1}{m}} \varphi \left(z^{\frac{1}{m}} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}}$. L'indice d'un tel champ de directions est égal à $1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \left(1 - \frac{n}{2}\right)$. On peut remarquer que cet indice est inférieur à 1.

En sommant ces deux indices, on obtient une quantité inférieure ou égale à $\frac{3}{2}$. Or la caractéristique d'Euler de \mathbb{P}^1 est égal à 2. Par le théorème de Poincaré-Hopf, on aboutit à une contradiction. \square

Le corollaire et le lemme précédent ont pour conséquence immédiate le lemme suivant :

LEMME 4.12. — *Tous les coefficients λ_k sont égaux.*

4.3. Construction de l'intégrale première

Les singularités qui apparaissent après un éclatement sont toutes isomorphes à $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$. Par le lemme 4.4, la trace du surfeuilletage sur une transversale du diviseur exceptionnel D est conjuguée à un champ de directions de la forme : $\left\langle z^{1-n} X(z^n) \right\rangle_{\mathbb{R}}$. Le lemme 3.15 nous assure que tout biholomorphisme tangent à l'identité laissant invariant un tel champ de directions est l'identité. Le groupe d'holonomie du diviseur exceptionnel est donc

exactement le groupe d'holonomie de sa restriction à un voisinage d'une des singularités.

Considérons une singularité A de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$. Au voisinage de A , le feuilletage $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ est conjuguée à $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$. Le feuilletage $\mathcal{F}_{-n}^{\mathbb{C}}$ admet pour intégrale première $x^n y$. Le feuilletage $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ admet donc au voisinage de A une intégrale première g submersive sauf le long de D . Elle est invariante par le groupe d'holonomie du diviseur exceptionnel. Elle se prolonge donc au voisinage de D privé des singularités de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$.

Considérons une seconde singularité B de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ et h une intégrale première de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$ définie au voisinage de B submersive sauf le long de D . Sur une transversale T de D , le groupe d'holonomie de D agit transitivement sur les fibres de g et de h . Les applications g et h ont donc les mêmes fibres sur T . Par conséquent, il existe ψ un biholomorphisme tel que $g|_T = \psi \circ h|_T$. On prolonge ainsi g au voisinage de B en une application submersive sauf le long de D . L'application g se prolonge donc au voisinage de D .

D'autre part, le lemme 4.4 nous assure que le feuilletage $E^*(\mathcal{F})$ admet au voisinage de A une intégrale première de la forme $f \circ g$ où f est une application réelle submersive. Puisque les feuilles de $E^*(\mathcal{F})$ sont saturées par celle de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$, la fonction $f \circ g$ est une intégrale première de $E^*(\mathcal{F})$ au voisinage de D privé des singularités de $E^*(\mathcal{F}^{\mathbb{C}})$. De plus, par notre construction, les séparatrices de $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$ correspondent à une même fibre de g . On en déduit que $f \circ g$ est une intégrale première de $E^*(\mathcal{F})$.

Cela termine la démonstration du théorème 1.3.

Bibliographie

- [Arn74] ARNOLD (V.). — Équations différentielles ordinaires, Éditions Mir, Moscow, Traduit du russe par Djilali Embarek (1974).
- [BG03] BELKO GARBA (D.). — « Caractérisation des feuilletages holomorphes singuliers, contenus dans des feuilletages Levi Flat, sur les surfaces complexes compactes », Bull. Sci. Math., no 10, p. 845-857 (2003).
- [CM82] CERVEAU (D.), MATTEI (J.-F.). — Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque 97, Société Mathématique de France (1982).
- [CS82] CAMACHO (C.), SAD (P.). — « Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields », Ann. of Math (2), 155, no 3, p. 579-595 (1982).
- [CS04] CERVEAU (D.), SAD (P.). — « Fonctions et feuilletages Levi-Flat », Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci 3, no 2, p. 427-445 (2004).
- [God91] GODBILLON (C.). — Feuilletages, études géométriques, Progress in Mathematics Volume 98, Birkhäuser Verlag, Basel (1991).

- [Lan06] LANDURÉ (L.). — « Feuilletages levi-plats du point de vue des surfeuillements », Thèse, Université d'Angers, (2006).
<http://math/univ-angers.fr/~landure/these.pdf>
- [Lea97] LEAU (L.). — « Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables », Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. 11, no 2, p. E1-E24 (1897).
- [Lor05] LORAY (F.). — « Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux », Prépublication, IRMAR (2005).
- [MM80] MATTEI (J.-F.), MOUSSU (R.). — « Holonomie et intégrales premières », Ann. Sci. École Norm. Sup 13, no 4, p. 469-523 (1980).
- [Spi70] SPIVAK (M.). — A comprehensive introduction to differential geometry. Vol One, Published by M. Spivak, Brandeis univ., Waltham, Mass. (1970).