

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

MOHAMMAD DAHER

*Ensembles de Rosenthal et propriété de Radon-Nikodym relative*

Tome XVIII, n° 3 (2009), p. 599-610.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2009\\_6\\_18\\_3\\_599\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2009_6_18_3_599_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Ensembles de Rosenthal et propriété de Radon-Nikodym relative

MOHAMMAD DAHER

---

**RÉSUMÉ.** — Soient  $G$  un groupe abélien compact métrisable,  $\Gamma$  son groupe dual et  $\Lambda \subset \Gamma$  un ensemble de Rosenthal. Nous montrons que  $L^\infty_\Lambda(G, Y^*) = C_\Lambda(G, Y^*)$ , lorsque  $Y^*$  est un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym et  $C_\Lambda(G, Y^*)$  est faiblement séquentiellement complet. Nous en déduisons une condition suffisante pour que le produit de deux ensembles de Rosenthal en soit encore un pour le groupe produit.

Ensuite nous introduisons la propriété de Radon-Nikodym relative  $RN-\Lambda$ , une généralisation de la propriété de Radon-Nikodym analytique. Nous montrons que si  $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$  a la propriété  $RN-\Lambda$ , alors  $\Lambda$  est fini. Cela nous permet de retrouver très simplement le fait que  $L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique.

**ABSTRACT.** — Let  $G$  be a metrizable compact abelian group,  $\Gamma$  its dual group and let  $\Lambda \subset \Gamma$  be a Rosenthal set. We show that  $L^\infty_\Lambda(G, Y^*) = C_\Lambda(G, Y^*)$  whenever  $Y^*$  is a Banach space with Radon-Nikodym property and  $C_\Lambda(G, Y^*)$  is weakly sequentially complete.

We deduce a condition implying that the product of two Rosenthal sets is still a Rosenthal set in product group.

Then we introduce the relative Radon-Nikodym property  $RN-\Lambda$ , which generalizes the analytic Radon-Nikodym property. We prove that  $RN-\Lambda$  property for  $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$  implies that  $\Lambda$  is finite.

This gives a new and easy proof that  $L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  does not possess the analytic Radon-Nikodym property.

---

### 1. Introduction

Soient  $G$  un groupe abélien compact métrisable,  $\Gamma$  son groupe dual,  $m = dt$  la mesure de Haar sur  $G$  et  $\Lambda \subset \Gamma$ . Soient d'autre part  $X$  un

---

(\*) Reçu le 17 décembre 2007, accepté le 31 octobre 2008

espace de Banach complexe et  $\mathcal{F}(G, X)$  un espace de fonctions définies sur  $G$ , intégrables par rapport à la mesure de Haar, et à valeurs dans  $X$ .

$\mathcal{F}_\Lambda(G, X)$  sera le sous-espace de  $\mathcal{F}(G, X)$  formé des fonctions dont le spectre est inclus dans  $\Lambda$ , c-à-d. telles que, pour tout  $\lambda \notin \Lambda$ , on ait

$$\int_G \overline{\lambda(t)} f(t) dt = 0.$$

Un ensemble  $\Lambda \subset \Gamma$  est dit de Rosenthal lorsque toute fonction mesurable bornée à spectre dans  $\Lambda$  est en fait continue, c-à-d. lorsque  $L_\Lambda^\infty(G) = C_\Lambda(G)$ . Ici nous désignons par  $C(G)$ , ou  $C(G, X)$ , l'espace des fonctions continues sur  $G$  à valeurs scalaires, ou vectorielles.

Si  $G = \mathbb{T}$  (donc  $\Gamma = \mathbb{Z}$ ), les ensembles lacunaires au sens de Hadamard fournissent des exemples d'ensembles de Rosenthal infinis ; plus généralement, tout ensemble de Sidon est un ensemble de Rosenthal, et H. P. Rosenthal ([R]) a été le premier à donner des exemples non Sidon. On trouvera d'autres exemples et des propriétés des ensembles de Rosenthal dans [DP<sub>1</sub>], [DP<sub>2</sub>], [G], [LLQR], [LR], [L<sub>1</sub>], [L<sub>2</sub>], [L<sub>3</sub>], [LQR], [LP<sub>1</sub>], [LP<sub>2</sub>], [LP<sub>3</sub>], [LP<sub>4</sub>], [R], [W].

Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux ensembles de Rosenthal pour des groupes abéliens compacts métrisables  $G$  et  $G'$ ; il est en général difficile de décider si le produit  $\Lambda \times \Lambda'$  est un ensemble de Rosenthal pour le groupe  $G \times G'$ . Nous donnons dans la deuxième partie une condition suffisante (Corollaire 2.3), pour que  $\Lambda \times \Lambda'$  soit un ensemble de Rosenthal.

Soit  $\xi$  un élément de première classe ([OR]) du dual de  $L_\Lambda^\infty(G)$ . Dans la troisième partie, nous montrons que si la translation  $t \in G \rightarrow \xi_t \in (L_\Lambda^\infty(G))^*$  est fortement mesurable, alors  $\xi$  est un élément de  $L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$ .

On s'intéresse dans la dernière partie de ce travail à une propriété de Riesz vectorielle (appelée propriété de Radon-Nikodym relative pour le Banach  $X$ ), notée  $RN-\Lambda$ , et caractérisée par l'égalité :

$$M_\Lambda(G, X) = L_\Lambda^1(G, X).$$

Nous montrons que, si  $L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$  a la propriété  $RN-\Lambda$ , alors  $\Lambda$  est un ensemble fini ; on retrouve ainsi un résultat de [RS]. On en déduit trivialement que  $L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique. Ce résultat est dû à Bukhvalov et Danilevich [BD], [E], qui ont introduit la propriété  $RNa$ .

## Notations et rappels

Soient  $X$  un espace de Banach et  $Y$  un sous-espace fermé de  $X$ ; pour tout  $x \in X$ ,  $[x]$  sera l'image de  $x$  par l'application quotient dans l'espace quotient  $X/Y$ . On note  $X^*$  le dual de  $X$ .

Si  $f \in \mathcal{F}(G, X)$ , pour  $t \in G$ , on définit la fonction  $f_t$  par  $f_t(u) = f(u-t)$  et la fonction  $\check{f}$  par  $\check{f}(u) = f(-u)$ , pour presque tout  $u \in G$ .

Pour  $f \in L^1(G)$  et  $g \in L^\infty(G)$  on note  $(f, g) = \int_G f(t)g(-t) dt = f * g(0)$ .

Rappelons qu'il existe une suite  $(K_n)_{n \geq 0}$  dans  $C(G)$ , bornée dans  $L^1(G)$ , telle que  $K_n(t) = K_n(-t)$  pour tout  $t$ , et telle que, pour toute  $f \in L^1(G)$ , la suite  $(f * K_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  dans  $L^1(G)$  ([HR, p. 88]). On voit facilement que, pour tout espace de Banach  $X$  et toute  $f \in L^1(G, X)$ , la suite  $(f * K_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  dans  $L^1(G, X)$ .

Un espace de Banach  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym si tout opérateur borné, défini sur  $L^1(\mathbb{T})$ , à valeurs dans  $X$ , est représentable ([BD], [E]).

## 2. Ensembles de Rosenthal vectoriels

Nous avons montré dans [D] que si  $\Lambda$  est un ensemble de Rosenthal infini, l'espace  $L^\infty_\Lambda(G, c_0)$  contient strictement  $C_\Lambda(G, c_0)$ . Cela contraste avec le résultat suivant :

**THÉORÈME 2.1.** — *Soient  $G$  un groupe abélien compact métrisable,  $\Lambda \subset \Gamma$  un ensemble de Rosenthal et  $Y$  un espace de Banach complexe. Supposons que  $Y^*$  a la propriété de Radon-Nikodym et que  $C_\Lambda(G, Y^*)$  est faiblement séquentiellement complet. Alors*

$$L^\infty_\Lambda(G, Y^*) = C_\Lambda(G, Y^*).$$

*Démonstration.* — Soient  $f \in L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$  et  $f_n = f * K_n \in C_\Lambda(G, Y^*)$ . L'espace  $Y^*$  ayant la propriété de Radon-Nikodym,  $L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$  est, d'après [DU, Chap. IV, Theorem 1], le dual de  $L^1(G, Y)/L^1_{\Lambda^c}(G, Y)$ ; la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge donc préfaiblement vers  $f$ .

Nous allons montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy faible. Elle convergera alors faiblement dans  $C(G, Y^*)$  puisque  $C_\Lambda(G, Y^*)$  est faiblement séquentiellement complet, et nécessairement vers  $f$ . Ainsi,  $f$  appartiendra à  $C_\Lambda(G, Y^*)$ .

Soit  $\xi \in (C_\Lambda(G, Y^*))^*$ . Pour toute  $g \in L^1(G)$ , remarquons que  $f * g \in C_\Lambda(G, Y^*)$ ; on peut donc définir  $\xi * f$  par :

$$(\xi * f, g) = (\xi, f * g).$$

Alors  $\xi * f$  est une forme linéaire continue sur  $L^1(G)$ , c-à-d. un élément de  $L^\infty(G)$ , dont le spectre est contenu dans  $\Lambda$ . Mais,  $\Lambda$  étant un ensemble de Rosenthal,  $\xi * f$  est continue et donc :

$$(\xi, f_n) = (\xi * f, K_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\xi * f)(0).$$

La suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est donc faiblement de Cauchy, ce qui termine la preuve.  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.** — *Soient  $\Lambda$  un ensemble de Rosenthal et  $Y$  un espace de Banach tels que  $Y^*$  soit séparable. Supposons que  $C_\Lambda(G)$  et  $Y^*$  sont faiblement séquentiellement complets. Alors  $C_\Lambda(G, Y^*) = L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$  si et seulement si  $C_\Lambda(G, Y^*)$  est faiblement séquentiellement complet.*

*Démonstration.* — Le Théorème 2.1 prouve la condition suffisante, puisqu'un dual séparable a la propriété de Radon-Nikodym ([DU, Chap. III, Theorem 1]).

Il reste à montrer que, si  $C_\Lambda(G, Y^*) = L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$  et si  $C_\Lambda(G)$  et  $Y^*$  sont faiblement séquentiellement complets, alors  $C_\Lambda(G, Y^*)$  l'est aussi.

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy faible dans  $C_\Lambda(G, Y^*)$ . Pour tout  $t \in G$ , la suite  $(f_n(t))_{n \geq 0}$  est faiblement de Cauchy dans  $Y^*$ , qui est faiblement séquentiellement complet. Donc il existe  $W(t) \in Y^*$  vérifiant  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W(t)$  faiblement dans  $Y^*$ . D'autre part, pour tout  $y^{**} \in Y^{**}$ , la suite  $(f_n(\cdot), y^{**})_{n \geq 0}$  est faiblement de Cauchy dans  $C_\Lambda(G)$ ; comme  $C_\Lambda(G)$  est faiblement séquentiellement complet, il existe  $g_{y^{**}} \in C_\Lambda(G)$  vérifiant

$$(f_n(\cdot), y^{**}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g_{y^{**}},$$

faiblement dans  $C_\Lambda(G)$ . On en déduit que, pour  $t \in G$  et  $y^{**} \in Y^{**}$ ,

$$(W(t), y^{**}) = g_{y^{**}}(t).$$

Comme  $Y^*$  est séparable,  $W$  est fortement mesurable d'après le Théorème de Pettis ([DU, Chap. II, Theorem 2]). Donc  $W \in L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$ . Mais, par hypothèse,  $C_\Lambda(G, Y^*) = L^\infty_\Lambda(G, Y^*)$ ; il existe donc  $g \in C_\Lambda(G, Y^*)$  telle que  $W = g$  presque partout. Comme  $(W(\cdot), y^{**}) = g_{y^{**}}$  est continue, cela implique  $W = g$  partout.

Pour  $f \in C_\Lambda(G, Y^*)$  la fonction

$$L_f : (t, y^{**}) \in G \times B_{Y^{**}} \longrightarrow (f(t), y^{**})$$

est continue sur  $G \times B_{Y^{**}}$  où  $B_{Y^{**}}$  est la boule unité fermé de  $Y^{**}$  munie de la topologie préfaible et  $\|L_f\|_\infty = \|f\|_\infty$ .

D'après ce qui précède,  $L_{f_n}(t, y^{**}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_W(t, y^{**})$ . D'après le Théorème de convergence dominée,  $L_{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_W$  faiblement dans  $C(G \times B_{Y^{**}})$ , c'est-à-dire que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} W$  faiblement dans  $C_\Lambda(G, Y^*)$ , d'où le corollaire.  $\square$

**COROLLAIRE 2.3.** — Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  deux ensembles de Rosenthal pour deux groupes abéliens compacts métrisables  $G$  et  $G'$ . Si  $C_{\Lambda \times \Lambda'}(G \times G')$  est faiblement séquentiellement complet, alors  $\Lambda \times \Lambda'$  est un ensemble de Rosenthal pour  $G \times G'$ .

*Démonstration.* — Si  $C_{\Lambda \times \Lambda'}(G \times G')$  est faiblement séquentiellement complet, alors ses sous-espaces  $C_\Lambda(G)$  et  $C_{\Lambda'}(G')$  le sont aussi. De plus, puisque  $\Lambda'$  est un ensemble de Rosenthal,  $C_{\Lambda'}(G') = L_{\Lambda'}^\infty(G')$  est un dual séparable. On a donc  $C_\Lambda(G, C_{\Lambda'}(G')) = L_\Lambda^\infty(G, C_{\Lambda'}(G'))$  par le Corollaire 2.2. Il suffit alors de remarquer que  $C_{\Lambda \times \Lambda'}(G \times G') = C_\Lambda(G, C_{\Lambda'}(G'))$  et  $L_{\Lambda \times \Lambda'}^\infty(G \times G') = L_\Lambda^\infty(G, L_{\Lambda'}^\infty(G')) = L_\Lambda^\infty(G, C_{\Lambda'}(G'))$ .  $\square$

### 3. Mesurabilité des translations pour les formes linéaires sur $L^\infty(G)$

Soient  $X$  un espace de Banach et  $x^{**} \in X^{**}$ ; on dit que  $x^{**}$  est un élément de première classe s'il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $X$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{**}$  pour la topologie préfaible sur  $X^{**}$ .

Pour  $\xi \in (L_\Lambda^\infty(G))^*$ ,  $t \in G$  et  $f \in L_\Lambda^\infty(G)$ , on note

$$(f, \xi_t) = (f_t, \xi).$$

**PROPOSITION 3.1.** — Soient  $G$  un groupe abélien compact métrisable,  $\Lambda$  un sous-ensemble de  $\Gamma$  et  $\xi \in L_\Lambda^\infty(G)^*$ . On suppose que l'application  $\psi: t \in G \longrightarrow \xi_t \in L_\Lambda^\infty(G)^*$  est fortement mesurable. Alors :

a) Si  $\xi \in L_\Lambda^\infty(G)^*$  est de première classe, on a  $\xi \in L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$ ;

b)  $\psi: G \rightarrow L_\Lambda^\infty(G)^*$  est continue.

*Démonstration.* — Notons

$$\psi_n = \psi * K_n, \quad n \geq 1.$$

L'application  $\psi$ , étant fortement mesurable et bornée, est dans l'espace  $L^\infty(G, L^\infty_\Lambda(G)^*)$ ; en particulier dans  $L^1(G, L^\infty_\Lambda(G)^*)$ . Il en est de même pour  $\psi_n$  et  $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi$  en norme dans  $L^1(G, L^\infty_\Lambda(G)^*)$ . Il existe alors une sous-suite  $(\psi_{n_k})_{k \geq 0}$  telle que, pour presque tout  $t \in G$ ,

$$\|\psi_{n_k}(t) - \xi_t\|_{L^\infty_\Lambda(G)^*} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

En particulier il existe  $t_0 \in G$  tel que

$$\|\psi_{n_k}(t_0) - \xi_{t_0}\|_{L^\infty_\Lambda(G)^*} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1)$$

Comme  $\psi \in L^1(G, L^\infty_\Lambda(G)^*) = L^1(G) \widehat{\otimes} L^\infty_\Lambda(G)^*$ , on a

$$\begin{aligned} (f, \psi_n(t)) &= (f, \int_G \psi(t-y)K_n(y) dy) = \int_G (f, \psi(t-y))K_n(y) dy \\ &= \int_G (f, \xi_{t-y})K_n(y) dy = \int_G (f_{-y}, \xi_t)K_n(y) dy \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &= \int_G (f_t, \xi_{-y})K_n(y) dy = (f_t, \int_G \psi(-y)K_n(y) dy) \\ &= (f_t, \psi_n(0)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

a) Pour voir que  $\xi \in L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ , il suffit de montrer que  $\xi_{t_0} \in L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ , ou encore, par (3.1), que  $(\xi_n)_{t_0} = \psi_n(t_0) \in L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ . Pour cela, il suffit, d'après le Théorème de Banach-Dieudonné, de montrer que  $(\xi_n)_{t_0}$  est continue sur la boule unité de  $L^\infty_\Lambda(G)$  munie de la topologie préfaible.

Soit donc  $(f_j)_{j \geq 0}$  une suite dans la boule unité de  $L^\infty_\Lambda(G)$ , convergeant vers  $f$  pour la topologie préfaible sur  $L^\infty_\Lambda(G)$ . Les fonctions  $f_j * K_n$  et  $f * K_n$  sont continues et, pour tout  $u \in G$ ,

$$f_j * K_n(u) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f * K_n(u).$$

D'après le Théorème de convergence dominée,

$$(f_j * K_n, \xi_{t_0}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} (f * K_n, \xi_{t_0}).$$

La preuve sera terminée si on montre que, pour toute  $f \in L^\infty_\Lambda(G)$ ,

$$(f * K_n, \xi_{t_0}) = (f, (\xi_n)_{t_0}). \quad (3.4)$$

Par hypothèse, il existe une suite  $(g_k)_{k \geq 0}$ , bornée dans  $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ , convergeant vers  $\xi$  préfaiblement dans  $(L^\infty_{\Lambda}(G))^*$ . En particulier

$$(f * K_n, (g_k)_{t_0}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (f * K_n, \xi_{t_0}). \quad (3.5)$$

Or, pour tout  $y \in G$ ,

$$(f_{-y}, (g_k)_{t_0}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (f_{-y}, \xi_{t_0});$$

donc, par le Théorème de convergence dominée et (3.2) :

$$\int_G (f_{-y}, (g_k)_{t_0}) K_n(y) dy \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_G (f_{-y}, \xi_{t_0}) K_n(y) dy = (f, (\xi_n)_{t_0}). \quad (3.6)$$

Comme

$$\int_G (f_{-y}, (g_k)_{t_0}) K_n(y) dy = (f * K_n, (g_k)_{t_0}),$$

(3.5) et (3.6) impliquent (3.4).

b) Par (3.3), pour tout  $t \in G$ ,

$$\begin{aligned} \|\psi_n(t) - \xi_t\|_{L^\infty_{\Lambda}(G)^*} &= \sup \left\{ |(f, \psi_n(t)) - (f, \xi_t)|; \|f\|_{L^\infty_{\Lambda}(G)} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |(f_t, \psi_n(0)) - (f_t, \xi)|; \|f\|_{L^\infty_{\Lambda}(G)} \leq 1 \right\} \\ &= \|\psi_n(0) - \xi\|_{L^\infty_{\Lambda}(G)^*}. \end{aligned}$$

Alors, d'après (3.1) :

$$\sup_t \|\psi_{n_k}(t) - \xi_t\|_{L^\infty_{\Lambda}(G)^*} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.7)$$

Comme  $K_n \in C(G)$  et  $\psi \in L^1(G) \widehat{\otimes} L^\infty_{\Lambda}(G)^*$ , on a  $\psi * K_n \in C(G) \widehat{\otimes} L^\infty_{\Lambda}(G)^*$  et, en particulier,  $\psi_n: G \rightarrow L^\infty_{\Lambda}(G)^*$  est continue. Donc (3.7) implique la continuité de  $t \rightarrow \xi_t$ .  $\square$

*Remarque.* — La continuité de  $t \in G \rightarrow \xi_t \in L^\infty(G)^*$  n'entraîne pas en général que  $\xi \in L^1(G)$  : il existe des moyennes  $\xi \in L^\infty(G)^*$ ,  $\xi \notin L^1(G)$ , invariantes :  $\xi_t = \xi$  pour tout  $t \in G$  ([Ru]).



#### 4. Propriété de Radon-Nikodym relative

Dans cette partie nous considérons une généralisation, dite  $RN-\Lambda$ , de la propriété de Radon-Nikodym analytique ( $RNa$ ) introduite par A. V. Bukhvalov et A. A. Danilevich ([BD], [E]).

Notons  $M(G, X)$  l'espace des mesures définies sur  $G$  à valeurs dans  $X$  à variation bornée, et  $M_\Lambda(G, X)$  l'espace des mesures  $\mu \in M(G, X)$  telles que, pour tout  $\lambda \notin \Lambda$ ,

$$\int_G \overline{\lambda(t)} d\mu(t) = 0.$$

Si  $M_\Lambda(G) = L_\Lambda^1(G)$ , c'est-à-dire que toute mesure à spectre dans  $\Lambda$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar  $m$ , on dit que  $\Lambda$  est un ensemble de Riesz ([LR], [L<sub>1</sub>], [LP<sub>1</sub>]).

Par définition, un espace de Banach  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym analytique si toute mesure  $\mu \in M_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur  $\mathbb{T}$ , c-à-d si  $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{T}, X) = L_{\mathbb{N}}^1(\mathbb{T}, X)$  ([BD], [E]).

Dans [LP<sub>1</sub>] on montre que si  $\Lambda$  un ensemble de Riesz et si  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym, alors  $M_\Lambda(G, X) = L_\Lambda^1(G, X)$ . En particulier la propriété de Radon-Nikodym entraîne la propriété de Radon-Nikodym analytique.

Rappelons que  $L^1(G)$  possède la propriété  $RNa$ , mais pas la propriété de Radon-Nikodym (si  $G$  est infini).

**DÉFINITION 4.1.** — *Soient  $G$  un groupe abélien compact métrisable,  $\Lambda \subset \Gamma$  un ensemble de Riesz et  $X$  un espace de Banach complexe; on dit que  $X$  a la propriété de Radon-Nikodym  $RN-\Lambda$  si*

$$M_\Lambda(G, X) = L_\Lambda^1(G, X).$$

Lorsque  $G = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , la propriété  $RN-\mathbb{N}$  coïncide avec la propriété de Radon-Nikodym analytique.

*Remarque.* — Si  $M_\Lambda(G, X) = L_\Lambda^1(G, X)$  alors  $\Lambda$  est nécessairement un ensemble de Riesz. En effet, soient  $\mu \in M_\Lambda(G), x \in X$  et  $x^* \in X^*$  tels que  $\langle x, x^* \rangle \neq 0$ . Alors  $\mu \otimes x \in M_\Lambda(G, X) = L_\Lambda^1(G, X) \subset L^1(G, X)$ . Donc  $\langle x, x^* \rangle \mu \in L^1(G)$ .

La propriété  $RN-\Lambda$  implique la propriété  $\Lambda-RNP$  de type II définie dans [Do] et ces deux propriétés coïncident si  $\Lambda$  est un ensemble de Riesz.

Le résultat suivant est connu, comme nous l'a signalé F. Lust-Piquard après une première version de ce travail. D'après [RS, proposition 4.6], si  $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$  a la propriété  $1-\Lambda - CCP$ , alors  $\Lambda$  est fini. Or la propriété  $\Lambda-RNP$  de type *II* implique la propriété  $1-\Lambda - CCP$  [RS, p. 186]. Nous donnons ici une preuve directe.

**THÉORÈME 4.2** ([RS]). — *Soient  $G$  un groupe compact abélien métrisable et  $\Lambda$  un sous-ensemble de  $\Gamma$ . Si  $X = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$  a la propriété  $RN-\Lambda$ , alors  $\Lambda$  est fini.*

*Démonstration.* — *Étape 1.* On va montrer que

$$M(G)/M_{\Lambda^c}(G) = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G).$$

Soit  $\mu \in M(G)$ . On définit l'opérateur  $T: C(G) \rightarrow X$  par :

$$T(g) = [\mu * g].$$

On a :

$$\|T(g)\| \leq \|\mu\|_{M(G)} \int_G |g(t)| dt.$$

$T$  est un opérateur 1-sommant ; donc, d'après [DU, Théorème 3, page 162],  $T$  s'identifie à  $\nu \in M(G, X)$ . De plus  $\nu \in M_{\Lambda}(G, X)$  car  $T(\bar{\lambda}) = 0$  si  $\lambda \in \Lambda^c$ .

Par hypothèse  $X$  a la propriété  $RN-\Lambda$  ; donc  $\nu = \psi \cdot dt$ , avec  $\psi \in L^1_{\Lambda}(G, X)$ .

D'autre part il existe, par le Théorème de Michael, une sélection continue

$$S: X \rightarrow L^1(G)$$

telle que l'image par  $S$  de la boule unité de  $X$  soit incluse dans deux fois la boule unité de  $L^1(G)$  ([P, Proposition 1.2], [BL, Proposition 1.19]).

Soit  $\varphi(u, \cdot) = S \circ \psi(u)$ . On a  $\varphi \in L^1_{\Lambda \times \Gamma}(G \times G)$ . Alors, pour  $g \in C(G)$ ,

$$\int_G g(u)\psi(u) du = T(g) = [\mu * g] ;$$

d'où

$$\int_G g(u) S(\psi(u)) du - \mu * g \in L^1_{\Lambda^c}(G).$$

Cela signifie que, pour  $h \in C_{\Lambda}(G)$ ,

$$\int_G \left[ \int_G g(u)\varphi(u, t) du \right] h(-t) dt = \int_G \left[ \int_G g(t-u) d\mu(u) \right] h(-t) dt,$$

c'est-à-dire :

$$\int_G g(u) \left[ \int_G h(-t)\varphi(u, t) dt \right] du = \int_G g(s) \left[ \int_G h(-s - u) d\mu(u) \right] ds.$$

On en déduit que, pour presque tout  $u \in G$ ,

$$\int_G h(-t)\varphi(u, t) dt = \int_G h(-t - u) d\mu(t).$$

Choisissons  $u_0 \in G$  tel que

$$\int_G h(-t - u_0) d\mu(t) = \int_G h(-t)\varphi(u_0, t) dt = \int_G h(-t - u_0)\varphi(u_0, t + u_0) dt,$$

et posons  $\varphi_0(t) = \varphi(u_0, t + u_0)$ , pour  $t \in G$ . D'après ce qui précède, on a  $\varphi_0 \in L^1(G)$  et

$$\mu - \varphi_0 \cdot dt \in [C_\Lambda(G)]^\perp = M_{\Lambda^c}(G).$$

Donc  $[\mu] \in L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$ , ce qui achève la preuve de l'Étape 1.

*Étape 2.* On a :

$$(C_\Lambda(G))^* = M(G)/M_{\Lambda^c}(G).$$

D'après l'Étape 1,  $(C_\Lambda(G))^*$  est séparable. D'après un théorème de Sidon, si  $\Lambda$  est de cardinal infini, il contient un sous ensemble de Sidon  $\Lambda'$ , c-à-d. que  $C_{\Lambda'}(G)$  est canoniquement isomorphe à  $\ell^1$ . Alors le dual de  $C_{\Lambda'}(G)$  et *a fortiori* le dual de  $C_\Lambda(G)$  ne peuvent être séparables.  $\square$

Le corollaire suivant est connu ([BD]).

**COROLLAIRE 4.3.** — [BD]  $L^1(\mathbb{T})/L_{\mathbb{N}}^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  n'a pas la propriété de Radon-Nikodym analytique.

*Démonstration.* — Si  $L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  avait la propriété de Radon-Nikodym analytique, cela signifierait que  $L^1(\mathbb{T})/H^1(\mathbb{T})$  a la propriété RN- $\mathbb{N}$ , ce qui n'est pas possible, par le Théorème 4.2, puisque  $\mathbb{N}^c$  est un ensemble infini.  $\square$

**Remerciements.** Je remercie chaleureusement F. Lust-Piquard dont les conseils et suggestions m'ont permis de progresser constamment. Je remercie également B. Maurey pour le temps qu'il m'a consacré lors de la préparation

de ce travail. Je remercie enfin le rapporteur pour ses remarques et ses suggestions, notamment une preuve plus simple du Théorème 2.1.

## Bibliographie

- [BL] BENYAMINI (Y.), LINDENSTRAUSS (J.). — Geometric nonlinear functional analysis, Vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications 48, American Mathematical Society, Providence, RI (2000).
- [BD] BUKHVALOV (A. V.), DANILEVICH (A. A.). — Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, *Mat. Zametki* 31, p. 203–214 (1982), no. 2; English translation *Math. Notes* 31, p. 104–110 (1982).
- [D] DAHER (M.). — Translations mesurables et ensembles de Rosenthal, *Annales de la Fac. de Toulouse*, vol. XIV, n° I, p. 105–121 (2005).
- [DU] DIESTEL (J.), UHL JR (J. J.). — Vector measures, *Math. Surveys* N° 15 (1977).
- [Do] DOWLING (P. N.). — Radon-Nikodym properties associated with subsets of countable discrete abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 327, no. 2, p. 879–890 (1991).
- [DP<sub>1</sub>] DRESSLER (R. E.), PIGNO (L.). — Rosenthal sets and Riesz sets, *Duke Math. J.* 41, p. 675–677 (1974).
- [DP<sub>2</sub>] DRESSLER (R. E.), PIGNO (L.). — Une remarque sur les ensembles de Rosenthal et Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 280, p. A1281–A1282 (1975).
- [E] EDGAR (G. A.). — Banach spaces with the analytic Radon-Nikodym property and compact abelian groups, *Almost everywhere convergence* (Columbus, OH, 1988), Academic Press, Boston, MA, p. 195–213 (1989).
- [G] GODEFROY (G.). — On coanalytic families of sets in harmonic analysis, *Illinois J. Math.* 35, no. 2, p. 241–249 (1991).
- [HR] HEWITT (E.), ROSS (K. A.). — *Abstract harmonic analysis II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).
- [LLQR] LEFÈVRE (P.), LI (D.), QUEFFÉLEC (H.), RODRÍGUEZ-PIAZZA (L.). — Some translation-invariant Banach function spaces which contain  $c_0$ , *Studia Math.* 163, no. 2, p. 137–155 (2004).
- [LR] LEFÈVRE (P.), RODRÍGUEZ-PIAZZA (L.). — *Anal.* 233, no. 2, p. 545–560 (2006).
- [L<sub>1</sub>] LI (D.). — A class of Riesz sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 119, p. 889–892 (1993).
- [L<sub>2</sub>] LI (D.). — On Hilbert sets and  $C_\Lambda(G)$ -spaces with no subspace isomorphic to  $c_0$ , *Colloq. Math.* 68, no. 1, p. 67–77 (1995).
- [L<sub>3</sub>] LI (D.). — A remark about  $\Lambda(p)$ -sets and Rosenthal sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, no. 11, p. 3329–3333 (1998).
- [LQR] LI (D.), QUEFFÉLEC (H.), RODRÍGUEZ-PIAZZA (L.). — Some new thin sets of integers in harmonic analysis, *J. Anal. Math.* 86, p. 105–138 (2002).
- [LP<sub>1</sub>] LUST-PIQUARD (F.). — Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris* 282, p. 833–835 (1976).
- [LP<sub>2</sub>] LUST-PIQUARD (F.). — L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur, *Colloq. Math.* 41, p. 273–284 (1979).
- [LP<sub>3</sub>] LUST-PIQUARD (F.). — Eléments ergodiques et totalement ergodiques dans  $L^\infty(G)$ , *Studia Math.* 69, p. 191–225 (1981).

- [LP<sub>4</sub>] LUST-PIQUARD (F.). — Bohr local properties of  $C_\Lambda(T)$ , Colloq. Math. 58, no. 1, p. 29–38 (1989).
- [N] NEUWIRTH (S.). — Two random constructions inside lacunary sets, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49, no. 6, p. 1853–1867 (1999).
- [OR] ODELL (E.), ROSENTHAL (H. P.). — A double-dual characterization of separable Banach spaces containing  $\ell^1$ , Israel J. Math. 20, p. 375–384 (1975).
- [P] PARTHASARTHY (T.). — Selection theorems and their applications, Lecture Notes in Math. Vol. 263, Springer-Verlag-Berlin New York (1972).
- [R] ROSENTHAL (H. P.). — On trigonometric series associated with weak\*-closed subspaces of continuous, J. Math. Mech. 17, p. 485–490 (1967).
- [RS] ROBDERA (M.), SAAB (P.). — Complete continuity properties of Banach spaces associated with subsets of a discrete abelian group, Glasgow Math. J. 43, p. 185–198 (2001).
- [Ru] RUDIN (W.). — Invariant means on  $L^\infty$ , Studia Math. 44, p. 219–227 (1972).
- [W] WATBLED (F.). — Rosenthal sets for Banach valued functions, Arch. Math. 66, p. 479–489 (1996).