

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

OLIVIER RIPOLL, JULIEN SEBAG

Tissus du plan et polynômes de Darboux

Tome XIX, n° 1 (2010), p. 1-11.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_1_1_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Tissus du plan et polynômes de Darboux

OLIVIER RIPOLL⁽¹⁾, JULIEN SEBAG⁽²⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions le problème de l'existence de polynômes de Darboux dans $\mathbf{C}\{x\}[y, y']$ pour la dérivation $\delta = R(y)\partial_x + R(y)y'\partial_y - V(y, y')\partial_{y'}$.

ABSTRACT. — In this article, we study the problem of the existence of Darboux polynomials in $\mathbf{C}\{x\}[y, y']$ for the derivation $\delta = R(y)\partial_x + R(y)y'\partial_y - V(y, y')\partial_{y'}$.

1. Introduction

Le point de départ de ce travail est l'étude des tissus du plan, à savoir des familles de feuilletages du plan en position générale. La donnée d'un tissu \mathcal{W} du plan correspond donc à celle d'une équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, avec $F \in \mathbf{C}\{x, y\}[y']$.

Dans [R2], le premier auteur a exhibé une paire $(U_{\mathcal{W}}, V_{\mathcal{W}})$ de polynômes différentiels d'ordre 1, telle que

$$R(y) \cdot (\partial_x F + y' \partial_y F) = U_{\mathcal{W}}(y, y') \cdot F + V_{\mathcal{W}}(y, y') \cdot \partial_{y'} F,$$

où $R(y) \in \mathbf{C}\{x\}[y]$ (dans le cas polynomial) est le y' -résultant de F et de $\partial_{y'} F$. Le polynôme $V_{\mathcal{W}}(y, y') \in \mathbf{C}\{x\}[y, y']$ est le polynôme de *linéarisation* du tissu. Il est lié à la question de la linéarisation simultanée des feuilles du

(*) Reçu le 17/03/08, accepté le 20/03/08

⁽¹⁾ Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence
Olivier.Ripoll@math.u-bordeaux1.fr

⁽²⁾ Université Rennes 1, UFR Mathématiques, IRMAR, 263 avenue du General Leclerc,
CS 74205, 35042 Rennes cedex (France)
julien.sebag@univ-rennes1.fr

tissu (*cf.* [R2, Proposition 3.2], ou [R-S, Théorème 11]). On peut montrer, par exemple, que les solutions de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, qui correspondent aux feuilles du tissu, vérifient une équation quasi-linéaire d'ordre 2 de la forme $R(y)y'' - V_{\mathcal{W}}(y, y') = 0$.

Dans cet article, nous étudions, initialement, la question de l'existence de tissus à polynômes $U_{\mathcal{W}}$ et $V_{\mathcal{W}}$ fixés (*cf.* Proposition 3.11). D'après ce qui précède, ce problème géométrique s'inscrit naturellement dans une problématique d'algèbre différentielle plus générale :

Soient $R(y) \in \mathbf{C}\{x\}[y]$ et $V(y, y') \in \mathbf{C}\{x\}[y, y']$ deux polynômes. Existe-t-il des polynômes de Darboux pour la dérivation $\delta := R(y)\partial_x + R(y)y'\partial_y - V(y, y')\partial_{y'}$?

Nous apportons à cette question d'algèbre différentielle «classique» (et, *ipso facto*, à notre question géométrique initiale) une réponse partielle (*cf.* Théorème 3.2 et 3.7 et Corollaire 3.10). Les moyens mis en oeuvre résident dans des techniques géométriques et dans l'utilisation de résultats issus de la géométrie des tissus.

On considère ici l'espace de polynômes de Darboux $P \in \mathbf{C}\{x, y\}[y']$ de degré au plus d , de paramètre U fixé *i.e.* vérifiant la relation $\delta(P) = UP$ où

$$\delta := R(y)\partial_x + R(y)y'\partial_y - V(y, y')\partial_{y'}.$$

Notre article s'articule essentiellement autour de l'étude (géométrique) des systèmes différentiels associés à de tels polynômes de Darboux.

Notre résultat principal (*cf.* Théorème 3.7) assure que cet espace est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie dont nous obtenons une borne r optimale, dépendant finement des paramètres, et explicite. Plus grossièrement, r est inférieure au genre d'une courbe lisse de degré $d + 3$. Nous apportons également une réponse (Théorème 3.4 et Proposition 4.1) à la question de borner le degré de tels polynômes, posée dans [P-S]. Ce type de questions a également été étudié, par exemple, dans [CLN] ou [C].

Initiée dans [R-S], la «philosophie» de cet article s'inscrit dans un va-et-vient entre géométrie des tissus et algèbre différentielle. Il nous permet d'espérer que ce genre d'approche pourra être féconde dans l'une et l'autre de ces deux théories.

Remerciements. — Les auteurs tiennent à remercier Ahmed Sebbar d'avoir attiré leur attention sur cette autre définition des polynômes de

Darboux¹, et Alain Hénaut pour les discussions intéressantes qu'ils ont eues avec lui.

2. Notations et définitions

- On notera K le corps des fractions de l'anneau différentiel $\mathbf{C}\{x\}$ des fonctions holomorphes, muni de la dérivation classique ∂_x et par $\mathcal{O} := \mathbf{C}\{x, y\}$ l'anneau des fonctions holomorphes à deux variables, muni des dérivations classiques ∂_x et ∂_y . Nous donnons quelques définitions analogues à celles que l'on peut trouver par exemple dans [MO-N-S].

- Soit R un polynôme dans $K[y]$ et V un polynôme dans $K[y, y']$. On note δ la dérivation sur $\mathcal{O}[y']$ définie par

$$\delta := R \cdot \partial_x + R \cdot y' \cdot \partial_y - V(y, y') \cdot \partial_{y'}.$$

- On appelle polynôme de Darboux pour la dérivation δ , un polynôme $P \in \mathcal{O}[y']$ tel qu'il existe $U \in K[y, y']$ vérifiant

$$\delta(P) = UP$$

Le paramètre U est souvent appelé *valeur propre* de δ .

- Si R est un polynôme dans $K[y]$, U et V deux polynômes dans $K[y, y']$ et d un entier naturel, on notera $\mathcal{D}_U^d := \mathcal{D}_U^d(\mathcal{O}[y'])$ le \mathbf{C} -espace vectoriel des polynômes de Darboux $P \in \mathcal{O}[y']$, de degré au plus d vérifiant $\delta(P) = UP$. On notera $\mathcal{D}_U^d(K[y, y']) := \mathcal{D}_U^d \cap K[y, y']$ le sous- \mathbf{C} -espace vectoriel des polynômes de Darboux dans $K[y, y']$.

- Soit $d \geq 3$ un entier et R un polynôme de $K[y]$. On appelle système de type $\mathcal{M}(d)$ en les inconnues (b_3, \dots, b_d) un système différentiel de la forme :

$$\mathcal{M}(d) \begin{cases} \partial_x(b_d) & + & A_{1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{1,d-2} \cdot b_d & = & 0 \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) & + & A_{2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{2,d-2} \cdot b_d & = & 0 \\ & & & & \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) & + & A_{d-2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-2,d-2} \cdot b_d & = & 0 \\ \partial_y(b_3) & + & A_{d-1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-1,d-2} \cdot b_d & = & 0 \end{cases}$$

où les A_{ij} sont dans $K[y][1/R]$.

⁽¹⁾ Dans [R-S], les auteurs ont défini une notion de polynômes de Darboux pour l'étude des solutions singulières. La donnée de ces deux définitions est cohérente (cf. Proposition 3.12).

3. Étude de \mathcal{D}_U^d

Dans toute la suite, on se donne un entier naturel d , un polynôme $R \in K[y]$, et $U, V \in K[y, y']$.

◦ Commençons par poser le problème du point de vue des tissus. Considérons un tissu du plan (polynomial) $\mathcal{W} := \mathcal{W}(d)$, i.e. une équation différentielle $P = 0$, où $P \in K[y, y']$ est un polynôme de degré d et d'ordre 1, sans racines multiples en tant que polynôme en y' . Le premier auteur a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1 ([R2], THÉORÈME 3.1). — *Il existe deux polynômes $U_{\mathcal{W}}, V_{\mathcal{W}} \in K[y, y']$, de degré au plus $d - 2$ et $d - 1$ (en y') respectivement, vérifiant la relation suivante :*

$$(\star) \quad R(\partial_x P + y' \partial_y P) = U_{\mathcal{W}} P + V_{\mathcal{W}} \partial_{y'} P$$

où $R \in K[y]$ est le y' -résultant de P et de $\partial_{y'} P$. En outre, il existe un unique couple de polynômes $(\widetilde{U}_{\mathcal{W}}, \widetilde{V}_{\mathcal{W}}) \in K(y)[y']^2$ de degré en y' au plus $d - 2$ et $d - 1$ respectivement tels que

$$R(\partial_x P + y' \partial_y P) = \widetilde{U}_{\mathcal{W}} P + \widetilde{V}_{\mathcal{W}} \partial_{y'} P$$

Il est important de noter que cette relation contient plus d'informations qu'une relation analogue trivialement obtenue par le théorème de Bézout, notamment puisque $V_{\mathcal{W}}$ est ici le polynôme de linéarisation du tissu. Ce polynôme donne des conditions nécessaires et suffisantes de linéarisation simultanée des courbes intégrales du tissu (cf. [H-94]). Dans notre contexte, on peut encore écrire

$$\delta(P) = U_{\mathcal{W}} P$$

Autrement dit, P est un polynôme de Darboux pour δ .

À l'inverse, se pose naturellement la question de savoir s'il existe des tissus vérifiant la relation (\star) , à polynômes $U_{\mathcal{W}}$ et $V_{\mathcal{W}}$ fixés, et de le trouver. En d'autres termes, il s'agit d'étudier les polynômes de Darboux de $\mathcal{D}_{U_{\mathcal{W}}}^d$.

◦ Dans ce paragraphe, nous caractérisons algébriquement le \mathbf{C} -espace vectoriel \mathcal{D}_U^d .

THÉORÈME 3.2. — *Soit $V \in K[y, y']$ un polynôme de degré $p - 1$ (en y'), avec $p \geq 1$. Les coefficients $a_i \in \mathcal{O}$, $0 \leq i \leq d$, d'un polynôme de Darboux $P := a_0(y')^d + \dots + a_d$ de \mathcal{D}_U^d vérifient un système \mathcal{S}_d composé d'une part d'un système différentiel de type $\mathcal{M}(d + 3)$, et d'autre part d'un système (algébrique) linéaire à $p - 3$ équations, si $p \geq 4$.*

Démonstration. — Posons $V := v_1.(y')^{p-1} + \dots + v_p$. En identifiant les coefficients de même degré dans l'expression vérifiée par P , le degré de U en y' est au plus $p - 2$, si $p \geq 3$, et sera au plus égal à 1 dans le cas contraire. On écrit alors que $U := u_2.(y')^{p-2} + \dots + u_p$ si $p \geq 3$. Si $p \leq 2$, on posera $U = u_{p-1}y' + u_p$.

On pose $u_k = 0$ si $k \leq 1$ et $v_k = 0$ si $k \leq 0$. Par identification terme à terme, le système \mathcal{S}_d vérifié par les coefficients d'un tel polynôme de Darboux est alors d'une part le système de type $\mathcal{M}(d+3)$ suivant :

$$R \cdot \begin{pmatrix} \partial_x(a_d) \\ \partial_x(a_{d-1}) + \partial_y(a_d) \\ \partial_x(a_{d-2}) + \partial_y(a_{d-1}) \\ \vdots \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_y(a_0) \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

où D est la matrice à $d + 1$ colonnes et $d + 2$ lignes suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & v_p & u_p \\ 0 & 0 & \dots & 2v_p & u_p + v_{p-1} & u_{p-1} \\ 0 & 0 & \dots & u_p + 2v_{p-1} & u_{p-1} + v_{p-2} & u_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (d-1).v_p & \dots & u_{p-(d-4)} + 2v_{p-(d-3)} & u_{p-(d-3)} + v_{p-(d-2)} & u_{p-(d-2)} \\ dv_p & u_p + (d-1).v_{p-1} & \dots & u_{p-(d-3)} + 2v_{p-(d-2)} & u_{p-(d-2)} + v_{p-(d-1)} & u_{p-(d-1)} \\ u_p + dv_{p-1} & u_{p-1} + (d-1).v_{p-2} & \dots & u_{p-(d-2)} + 2v_{p-(d-1)} & u_{p-(d-1)} + v_{p-d} & u_{p-d} \\ u_{p-1} + dv_{p-2} & u_{p-2} + (d-1).v_{p-3} & \dots & u_{p-(d-1)} + 2v_{p-d} & u_{p-d} + v_{p-(d+1)} & u_{p-(d+1)} \end{pmatrix}$$

et, d'autre part, le système linéaire (algébrique) suivant à $p - 3$ lignes :

$$\tilde{D} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = 0$$

où

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} u_{p-2} + dv_{p-3} & u_{p-3} + (d-1)v_{p-4} & \dots & u_{p-(d+1)} + v_{p-(d+2)} & u_{p-(d+2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & u_3 + v_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & u_2 + v_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ u_3 + d.v_2 & u_2 + (d-1)v_1 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 + d.v_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 3.3. — En tant que faisceau sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{R = 0\}$ pour la topologie canonique, l'espace \mathcal{D}_U^d est un système local. C'est une conséquence d'un résultat analogue concernant ces systèmes dans [H-04, page 441], qui découle de la nature des symboles du système \mathcal{S}_d , à coefficients dans $K[y][1/R]$.

Par définition, on dispose d'une filtration des espaces de polynômes de Darboux de degré au plus d :

$$\mathcal{D}_U^0 \subseteq \mathcal{D}_U^1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}_U^{d-1} \subseteq \mathcal{D}_U^d \subseteq \dots$$

Il est important de remarquer que le système \mathcal{S}_{d-k} est obtenu à partir de \mathcal{S}_d en supprimant les k premières colonnes et les dernières lignes correspondantes de $\mathcal{M}(d+3)$.

THÉORÈME 3.4. — *Soit $p \geq 4$ et soient $R \in K[y]$, $U := u_2 \cdot (y')^{p-2} + \dots + u_p \in K[y, y']$, et $V := v_1 \cdot (y')^{p-1} + \dots + v_p \in K[y, y']$ tel que $\deg_{y'} V = p-1$. On a alors les résultats suivants :*

1. *La filtration précédente est stationnaire.*
2. *Ou bien $-u_2/v_1 =: k \in \mathbf{N}$ et tout polynôme de Darboux non nul est de degré k ; ou bien, pour tout $d \in \mathbf{N}$, $\mathcal{D}_U^d = \{0\}$.*

Démonstration. — Puisque $p \geq 4$, le système linéaire vérifié par les coefficients du polynôme de Darboux de degré au plus d implique notamment que $(u_2 + dv_1)a_0 = 0$. Pour qu'un polynôme de Darboux de degré d existe ($a_0 \neq 0$), il faut donc que $u_2 + dv_1 = 0$.

Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$, tel que $u_2 + kv_1 = 0$. Puisque v_1 est non nul, on a alors $u_2 + k'v_1 \neq 0$ pour tout $k' \neq k$. Ainsi, il n'existe pas de polynôme de Darboux de degré k' et on a les égalités suivantes, pour tout $d \geq k$:

$$\mathcal{D}_U^k = \mathcal{D}_U^{k+1} = \dots = \mathcal{D}_U^d = \mathcal{D}_U^{d+1} = \dots$$

et d'autre part, $\mathcal{D}_U^d = \{0\}$ pour tout $d \leq k-1$.

Sinon, $u_2 + kv_1 \neq 0$ pour tout $k \geq 0$. Le même argument s'applique et ainsi, il n'existe pas de polynômes de Darboux : $\mathcal{D}_U^d = \{0\}$. \square

Remarque 3.5. — Si $p \leq 3$, l'énoncé du théorème 3.4 est faux en général. Par exemple, dans le cas où $V = 0$, on montrera (cf. Proposition 4.1) que la filtration est strictement croissante.

Exemple 3.6. — Soient $R = 1$, $V = y(y')^3$ et $U = (y')^2$. Soit $d \geq 0$ un entier. Puisque $p = 4$, la matrice \tilde{D} est la ligne

$$\tilde{D} = \left(1 + d \cdot y \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right).$$

Comme $d \cdot y \neq -1$, il n'existe pas de polynôme de Darboux (non trivial) de degré d .

◦ Nous allons maintenant étudier ce système \mathcal{S}_d *via* des techniques et résultats initialement développés pour l'étude des tissus du plan, et essentiellement empruntés à la théorie de Cartan-Spencer.

THÉORÈME 3.7. — *Le \mathbf{C} -espace vectoriel \mathcal{D}_U^d est de dimension finie, et on a l'inégalité suivante :*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_U^d(K[y, y']) \leq \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_U^d \leq r(d, U, V) \leq \frac{1}{2}(d+1)(d+2) =: \pi$$

De plus, l'entier $r(d, U, V)$ est explicite.

Démonstration. — Comme il a été montré dans [H-04, Théorème 2] pour les systèmes de type $\mathcal{M}(d)$, l'étude du système $\mathcal{M}(d+3)$ conduit à construire une connexion (E, ∇) de rang $\pi = (d+2)(d+1)/2$ dans l'espace des jets d'ordre $d+1$ dont les sections horizontales correspondent aux solutions du système $\mathcal{M}(d+3)$.

Autrement dit, on a l'isomorphisme $\text{Ker} \nabla \cong \mathcal{M}(d+3)$. On définit l'entier $r(d, U, V)$ comme la dimension du \mathbf{C} -espace vectoriel $\text{Ker} \nabla$. Il donne ainsi la dimension de l'espace des solutions du système $\mathcal{M}(d+3)$ extrait de \mathcal{S}_d . La borne π obtenue découle de cet isomorphisme et du fait que $\mathcal{M}(d+3)$ soit un système local. L'entier $r(d, U, V)$ s'obtient explicitement par le théorème de détermination du rang (*cf.* [R1, Théorème 3.1]). Voir aussi [R2] pour les détails de la construction. \square

Remarque 3.8. — L'entier $r(d, U, V)$ se réalise donc comme le co-rang d'une matrice explicitement donnée par les coefficients du système \mathcal{S}_d . Il est en outre explicitement calculable en théorie. En pratique, néanmoins, la difficulté des calculs peut être un obstacle à l'obtention explicite de cet entier.

Remarque 3.9. — La méthode proposée ici ne permet pas, a priori, de distinguer les polynômes de Darboux de $K[y, y']$. Néanmoins, l'entier $r(d, U, V)$ défini ci-dessus est une borne optimale de la dimension de $\mathcal{D}_U^d(K[y, y'])$, comme nous le verrons avec le cas où V est nul (*cf.* §4).

COROLLAIRE 3.10. —

1. Si $p \leq 3$, alors on a $r(d, U, V) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_U^d$.
2. Si $p \geq 4$, on pose $k = -u_2/v_1$, si $k \in \mathbf{N}$, et $k = -1$ sinon.

On a alors les inégalités suivantes :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_U^d \leq r(k, U, V) \leq \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Démonstration. — En effet, dans le cas où $p \leq 3$, le système \mathcal{S}_d est exactement un système de type $\mathcal{M}(d+3)$ et le théorème de détermination du rang démontré dans [R1, Théorème 3.1] s'applique. Pour le second point, il suffit d'appliquer le théorème 3.4 en utilisant les arguments donnés dans sa preuve. \square

PROPOSITION 3.11. — Soit $P \in K[y, y']$ réduit de degré d définissant un d -tissu du plan \mathcal{W} . Soient $R \in K[y] \setminus \{0\}$, et $U, V \in K[y, y']$ de degré au plus $d-2$ et $d-1$ respectivement. Alors P appartient à $\mathcal{D}_U^d(K[y, y'])$ si et seulement s'il existe $\tilde{R} \in K[y]$ tel que $R = \tilde{R} \cdot \text{Result}_{y'}(P, \partial_{y'} P)$, $U = \tilde{R} \cdot U_{\mathcal{W}}$ et $V = \tilde{R} \cdot V_{\mathcal{W}}$.

Démonstration. — Si P appartient à $\mathcal{D}_U^d(K[y, y'])$, alors P vérifie

$$\partial_x P + y' \partial_y P = \frac{U}{R} P + \frac{V}{R} \partial_{y'} P$$

dans $K(y)[y']$. D'autre part, le théorème 3.1 assure que

$$\text{Result}_{y'}(P, \partial_{y'} P)(\partial_x P + y' \partial_y P) = U_{\mathcal{W}} P + V_{\mathcal{W}} \partial_{y'} P$$

On conclut grâce à l'unicité d'une telle relation. \square

Le travail réalisé dans [R-S] permet, enfin, d'étudier les solutions singulières des polynômes de Darboux :

PROPOSITION 3.12. — Supposons que V appartienne à l'idéal (R) de $K[y, y']$. Soit P un polynôme de Darboux dans $\mathcal{D}_U^d(K[y, y'])$ irréductible et d'ordre 1, tel que $\partial_y P$ n'appartient pas à la racine $\{P, \partial_{y'} P\}$ de l'idéal différentiel engendré par P et $\partial_{y'} P$. Alors P admet une composante des solutions singulières essentielle.

Démonstration. — Remarquons d'abord que les hypothèses entraînent que U appartient à (R) . D'après [R-S, Théorème 7], il nous suffit alors de constater qu'un polynôme de Darboux tel que $\partial_y P \notin \{P, \partial_{y'} P\}$ est bien un polynôme de Darboux au sens de [R-S]. \square

4. Exemples

Dans ce paragraphe, nous donnons deux exemples de calculs de la dimension $r(d, U, V)$ du \mathbf{C} -espace vectoriel \mathcal{D}_U^d .

◦ LE CAS OÙ $V = 0$.

PROPOSITION 4.1. — *Supposons que $V = 0$. Les polynômes de Darboux pour δ sont de la forme $P = e^\phi F(y - y' \cdot x, y')$ où $\phi \in \mathcal{O}$ et $F(s, t) \in K[s, t]$.*

Démonstration. — La matrice D du système \mathcal{S}_d est donnée par les deux coefficients u_p et u_{p-1} de U , qui est de degré au plus 1 puisque $V = 0$. Le système est alors intégrable si et seulement si $\partial_y(u_p) - \partial_x(u_{p-1}) = 0$. Autrement dit, il existe ϕ dans \mathcal{O} tel que $U = \partial_y(\phi) \cdot y' + \partial_x(\phi)$. On vérifie alors que les solutions d'un tel système sont de la forme $e^\phi (y - y'x)^l (y')^m$ avec $0 \leq l + m \leq d$, ce qui prouve la proposition. \square

Remarque 4.2. — En d'autres termes, les polynômes de Darboux de degré d pour δ sont exactement les polynômes provenant d'équations de Clairaut de degré d . Ils correspondent aux *tissus algébriques*.

De fait, la suite des \mathbf{C} -espaces vectoriels des polynômes de Darboux est strictement croissante, puisqu'il existe des polynômes $F(s, t) \in K[s, t]$ de tout degré.

COROLLAIRE 4.3. — *On suppose que $V = 0$. Soit $\alpha = A_1 dx + A_2 dy$ une 1-forme de \mathbf{C}^2 à coefficients dans $K[y]$. On note $U = A_2 y' + A_1$. La forme α est fermée si et seulement si $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_U^d = \pi$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on a de plus l'égalité $\mathcal{D}_U^d = \mathcal{D}_U^d(K[y, y'])$.*

◦ LE CAS OÙ $V = 6y^2 + x$.

Prenons $V = 6y^2 + x$ et $R = 1$. Il s'agit donc de trouver les polynômes de Darboux associés à la première équation de Painlevé. Cette équation a été étudiée en détails, par exemple, dans [Ca], [N] ou [U].

Le système \mathcal{S}_1 s'écrit :

$$R \begin{pmatrix} \partial_x(a_1) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_y(a_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_p & u_p \\ u_p + v_{p-1} & u_{p-1} \\ u_{p-1} + v_{p-2} & u_{p-2} \\ \vdots & \vdots \\ u_3 + v_2 & u_2 \\ u_2 + v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors $U = A_2y' + A_1$.

Le calcul de la matrice K de courbure de la connexion ∇ , dans une base adaptée, donne

$$K = \begin{pmatrix} 3k_1 & \partial_x(k_1) - 12 & \partial_y(k_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

où

$$k_1 = \partial_x(A_2) - \partial_y(A_1).$$

La matrice de détermination du rang est la suivante :

$$(k_{m\ell}) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} k_{21} &= 4\partial_x(k_1) - 3A_1k_1 - 12 \\ k_{22} &= \partial_x^2(k_1) - 36yk_1 - (6y^2 + x)\partial_y(k_1) - A_1\partial_x(k_1) \\ k_{23} &= \partial_x\partial_y(k_1) + 3k_1^2 - A_1\partial_y(k_1) \\ k_{31} &= 4\partial_y(k_1) - 3A_2k_1 \\ k_{32} &= \partial_x\partial_y(k_1) - 3k_1^2 - A_2\partial_x(k_1) + 12A_2k_1 \\ k_{33} &= \partial_y^2(k_1) - A_2\partial_y(k_1) \end{aligned}$$

Dans notre cadre, le théorème de détermination du rang assure que le noyau de cette matrice est un fibré vectoriel dont le rang est la dimension de \mathcal{D}_U^1 (cf. Corollaire 3.10). Autrement dit, la dimension de \mathcal{D}_U^1 est exactement le co-rang de la matrice $(k_{m\ell})$.

Par exemple, si k_1 est nul, \mathcal{D}_U^1 est de dimension 1. Le noyau de $(k_{m\ell})$ est engendré sur \mathcal{O} par le vecteur ${}^t(0, 0, 1)$. En identifiant les sections horizontales de ∇ et les solutions du système \mathcal{S}_1 , ceci prouve que les polynômes de Darboux de degré au plus 1 sont en fait de degré nul. En effet, la différentielle de la 1-forme $A_1dx + A_2dy$ étant nulle ($k_1 = 0$), il existe (localement) $\phi \in \mathcal{O}$ telle que $d\phi = A_1dx + A_2dy$. Ainsi, les polynômes de Darboux solutions de notre problème sont de la forme $P = \phi$.

Si k_1 est non nul, cette dimension est au plus 2, puisque la courbure de la connexion est non nulle. De la même façon, on montre qu'alors il n'existe pas de tels polynômes de degré nul.

Bibliographie

- [C] CARNICER (M. M.). — The Poincaré problem in the nondicritical case. *Ann. of Math. (2)* 140, no. 2, p. 289-294 (1994).
- [Ca] CASALE (G.). — Irréductibilité de la première équation de Painlevé. (French) [Irreducibility of the first Painleve equation] *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343, no. 2, p. 95-98 (2006).
- [CLN] CERVEAU (D.), LINS NETO (A.). — Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 41, no. 4, p. 883-903 (1991).
- [H-04] HÉNAUT (A.). — On planar web geometry through abelian relations and connections, *Ann. of Math.* 159, p. 425-445 (2004).
- [H-94] HÉNAUT (A.). — Caractérisation des tissus de C^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables, *Compositio Math.* 94, p. 247-268 (1994).
- [MO-N-S] MOULIN OLLAGNIER (J.), NOWICKI (A.) and STRELCYN (J.-M.). — On the non-existence of constants of derivations: the proof of a theorem of Jouanolou and its development. *Bull. Sci. math.* 119, p. 195-233 (1995).
- [N] NISHIOKA (K.). — A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent. *Nagoya Math. J.* 109, p. 63-67 (1988).
- [P-S] PRELLE (M.J.) and SINGER (M.F.). — Elementary First Integrals of Differential Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279 (1), p. 215-229 (1983).
- [R1] RIPOLL (O.). — Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 341, p. 247-252 (2005).
- [R2] RIPOLL (O.). — Properties of the connection associated with planar webs and applications, à paraître, *Arxiv math.DG/0702321*.
- [R-S] RIPOLL (O.) et SEBAG (J.). — Solutions singulières des tissus polynomiaux du plan, *J. of Algebra* 310, p. 351-370 (2007).
- [U] UMEMURA (H.). — Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé. *Nagoya Math. J.* 117, p. 125-171 (1990).
- [W] GRIFONE (J.) and SALEM (É.) (Eds). — *Web Theory and Related Topics*, World Scientific, Sci. Publishing co., River Edge, NJ, (2001).