

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

RIDHA CHATBOURI

Algèbres enveloppantes à homotopie près, homologies et cohomologies

Tome XX, n° 1 (2011), p. 99-133.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_1_99_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Algèbres enveloppantes à homotopie près, homologies et cohomologies

RIDHA CHATBOURI⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On présente une définition et une construction unifiée des homologies et cohomologies d’algèbres et de modules sur ces algèbres et de modules sur ces algèbres dans le cas d’algèbres associatives ou commutatives ou de Lie ou de Gerstenhaber. On sépare la construction linéaire des cogèbres ou bicogèbres qui traduisent les symétries des relations de définition de la structure de la partie structure qui apparaît ici comme une codérivation de degré 1 et de carré nul de la cogèbre ou de la bicogèbre.

ABSTRACT. — We present an unified construction for algebras and modules homologies and cohomologies, in the case of associative, commutative, Lie and Gerstenhaber algebras. We make a distinction between the linear part of the construction of algebras and cogebras, characterized by the symmetries of the defining relations and the structure itself which appears as a differential on these algebras and cogebras.

0. Introduction et motivation

La définition opéradique de l’homologie permet d’unifier les notions d’homologie et de cohomologie pour les modules sur les algèbres associatives (homologie et cohomologie de Hochschild) et pour les modules sur les algèbres de Lie (homologie et cohomologie de Chevalley).

Ces deux complexes sont dérivés de résolutions de l’algèbre (associative ou de Lie) considérée : la bar résolution et la résolution de Koszul.

(*) Reçu le 21/03/2010, accepté le 15/06/2010

(1) Département de Mathématiques, Unité de Recherche Physique Mathématique Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l’environnement, 5019 Monastir
Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn

D'autre part, on peut affaiblir la notion d'algèbre pour définir des algèbres 'à homotopie près'. Dans le cas d'une algèbre associative A , on regarde A comme une algèbre à homotopie près particulière : cette algèbre à homotopie près est exactement la bar résolution de l'algèbre A . Dans le cas d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , la résolution de Koszul est obtenue en tensorisant par $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre à homotopie près qu'on identifie à \mathfrak{g} .

Dans cet article, on parlera plutôt d'algèbre enveloppante : la Bar résolution de A l'algèbre A_∞ , la résolution de Koszul pour une algèbre de Lie L l'algèbre L_∞ .

On décrira alors les liens entre d'une part l'homologie et la cohomologie d'un module M sur l'algèbre et des structures de X_∞ algèbre associées.

De plus on traitera de même le cas des algèbres commutatives R et de leurs algèbres $C_\infty(R)$. Enfin, nous utiliserons cette construction pour définir l'homologie et la cohomologie d'un module sur une algèbre de Gerstenhaber G .

Dans toutes ces constructions, nous commencerons par définir la partie linéaire (les espaces de tenseurs retenus sur l'algèbre de départ) et sa ou ses comultiplications naturelles soit coassociatives Δ pour $A_\infty(A)$ ou $L_\infty(\mathfrak{g})$, soit cocrochet de Lie δ pour $C_\infty(R)$ soit un couple (κ, Δ) pour les structures d'algèbres de Gerstenhaber $G_\infty(G)$. Ensuite nous écrivons la structure de l'algèbre X_∞ comme l'opérateur bord du complexe. Cela nous permettra de définir explicitement les opérateurs d'homologie et de cohomologie associés sur les modules.

Nous retrouvons ainsi des résultats antérieurs (voir [G], [BGHHW] et [AAC2] par exemple) en les complétant, les précisant et les explicitant.

1. Homologie et cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative

Soit A une algèbre associative et unitaire sur \mathbb{R} . On rappelle (voir par exemple [L]) que la Bar-résolution de A est le complexe suivant :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} A \xleftarrow{\partial_1} A \otimes A \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} \otimes^n A \xleftarrow{\partial_n} \dots$$

où ∂_n est l'application linéaire définie par :

$$\partial_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \dots \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n.$$

On vérifie directement que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus, puisque A est unitaire, ce complexe admet une homotopie, définie par :

$$h_n : \otimes^n A \longrightarrow \otimes^{n+1} A, \quad h_n(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n.$$

On montre directement que $h_n \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_{n+1}$ est l'identité de $\otimes^{n+1} A$. Ce complexe est donc une résolution de l'algèbre A . En posant $C_n(A) = \otimes^{n-1} A$, on le note :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(A) \xleftarrow{\partial_1} C_1(A) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1}(A) \xleftarrow{\partial_n} \dots$$

On note $Z_n(A) = \ker(\partial_n)$ et $B_n(A) = \text{im}(\partial_{n+1})$, on a donc

$$H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A) = 0$$

pour tout n .

Soit M un A -bimodule. L'homologie de Hochschild du bimodule M est définie à partir de la Bar-résolution de la façon suivante.

On pose $C_n(A, M) = \sum_{j=0}^n \otimes^j A \otimes M \otimes \otimes^{n-j} A$. Le complexe d'homologie de Hochschild est le complexe :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(A, M) \xleftarrow{\partial_1} C_1(A, M) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1}(A, M) \xleftarrow{\partial_n} \dots$$

où le bord ∂_n est linéaire et défini par :

$$\begin{aligned} \partial_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes m_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) = & \\ \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^j a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots \otimes a_n + & \\ + (-1)^{i-1} a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} m_i \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes m_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + & \\ + \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \dots \otimes m_i \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n & \end{aligned}$$

Comme plus haut, le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du bimodule M est $H_n(A, M) = Z_n(A, M)/B_n(A, M)$, où $Z_n(A, M) = \ker(\partial_n)$ et $B_n(A, M) = \text{im}(\partial_{n+1})$.

De même la cohomologie de ce bimodule M est définie ainsi. On pose

$$C^n(A, M) = L(\otimes^n A, M),$$

et on obtient le complexe de cohomologie de Hochschild dérivé de la Bar résolution :

$$0 \xrightarrow{\partial^0} C^0(A, M) \xrightarrow{\partial^1} C^1(A, M) \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^{n-1}(A, M) \xrightarrow{\partial^n} \dots$$

avec :

$$\begin{aligned} (\partial^{n+1} f_n)(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= a_0 f_n(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\ &- \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j f_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n) \\ &+ (-1)^{n-1} f_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) a_n. \end{aligned}$$

En considérant l'isomorphisme $L(\otimes^n A, M) \simeq \text{Hom}_{A \otimes A^{op}}(\otimes^{n+2} A, M)$, donné par

$$F_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = a_0 f_n(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) a_{n+1},$$

on constate qu'on peut écrire $\partial^{n+1} \circ F_n = F_n \circ \partial_{n+1}$, donc on a un complexe dérivé de la Bar résolution et la cohomologie de Hochschild de M est celle de ce complexe :

$$H^n(A, M) = Z^n(A, M) / B^n(A, M), \text{ où } Z^n(A, M) = \ker(\partial^{n+1})$$

$$\text{et } B^n(A, M) = \text{im}(\partial^n).$$

2. A_∞ -algèbre

Dans cette section, nous allons traduire les constructions précédentes dans le cadre de la A_∞ -algèbre.

La structure multiplicative de A n'étant pas commutative, ne possède pas de symétrie : l'unique relation est l'associativité :

$$Ass(a_1, a_2 a_3) = a_1(a_2 a_3) - (a_1 a_2) a_3.$$

L'application Ass n'a pas de symétries, l'espace $Vect(Ass \circ \sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_3)$ est de dimension 6. On considérera l'algèbre tensorielle de A .

D'autre part, on sait que les signes $(-1)^j$ apparaissant dans les formules ci-dessus s'interprètent simplement si on décale le degré des éléments de A de 1. On va donc directement considérer ici une algèbre A graduée, munie d'une multiplication de degré 0 :

$$|a_1 a_2| = |a_1| + |a_2|,$$

si $|a|$ est le degré de $a \in A$.

L'espace vectoriel que l'on considère est donc l'algèbre tensorielle sans unité $\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1]$, graduée par :

$$\deg(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_n) = |a_1| + \dots + |a_n| - n.$$

Cet espace est une cogèbre coassociative libre pour la comultiplication canonique :

$$\Delta(a) = 0, \quad \Delta(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (a_1 \otimes \dots \otimes a_j) \otimes (a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n).$$

(Voir par exemple [AAC2]). La coassociativité s'écrit :

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.$$

Le fait que $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta)$ est une cogèbre libre se traduit ici par la propriété suivante :

1. Pour tout espace gradué V , un morphisme F de cogèbres de $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta)$ dans $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n V[1], \Delta)$ est uniquement caractérisé par sa projection sur $V[1]$: F est un morphisme si $(F \otimes F) \circ \Delta = \Delta \circ F$. Posons $F_n : \otimes^n A[1] \rightarrow V[1]$, on a explicitement :

$$F(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{r_j, r_1 + \dots + r_k = n} F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n).$$

Réciproquement, pour toute suite d'applications linéaires (F_n) , l'application F définie ci-dessus est un morphisme de cogèbres.

2. Toute codérivation D de $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta)$ est uniquement caractérisée par sa projection sur $A[1]$: D est une dérivation si $(D \otimes id + id \otimes D) \circ \Delta = \Delta \circ D$. Posons $D_n : \otimes^n A[1] \rightarrow A[1]$, on a explicitement :

$$D(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{1 \leq j < j+r-1 \leq n} (-1)^{\deg(D_r)(\deg(a_1) + \dots + \deg(a_{j-1}))} (a_1 \otimes \dots \otimes a_{j-1}) \otimes D_r(a_j \otimes \dots \otimes a_{j+r-1}) \otimes (a_{j+r} \otimes \dots \otimes a_n).$$

Réciproquement, pour toute suite d'applications linéaires (D_n) , l'application D définie ci-dessus est une codérivation de la cogèbre $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta)$.

La multiplication devient une opération de degré 1 de $\otimes^2 A[1]$ dans $A[1]$. On utilise la règle des signes donnée dans [AAC1], et on pose :

$$m(a_1 \otimes a_2) = (-1)^{\deg(a_1)}(a_1 a_2).$$

Enfin, l'application m se prolonge d'une façon unique en une codérivation de degré 1 de la loi Δ à tout l'espace $\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1]$.

Ce prolongement est explicitement :

$$m(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<j} \deg(a_i)} a_0 \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n.$$

La relation d'associativité est équivalente à $m \circ m = 0$.

DÉFINITION 2.1 (A_∞ -algèbre). — *Soit A une algèbre associative. On appelle algèbre A_∞ de A la cogèbre $(\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta)$ munie de la codérivation m . On note cette algèbre*

$$A_\infty(A) = (\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta, m).$$

La A_∞ -algèbre de A est donc la généralisation au cas gradué de la Bar résolution de A : si A n'est pas gradué, tous les a de $A[1]$ sont de degré -1 , et l'espace vectoriel $A_\infty(A)$ est $\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A$ et la codérivation m coïncide avec ∂ .

Plus généralement,

PROPOSITION 2.2 (Homologie et cohomologie de Hochschild et A_∞ algèbres). — *Soit A une algèbre associative, unitaire et graduée. Soit M un A -bimodule gradué. On définit une nouvelle algèbre associative, notée $B = A \ltimes M$, produit semi-direct de A par M en munissant $A \oplus M$ de la multiplication :*

$$(a + u)(b + v) = (ab + (ub + av)) \quad (a, b \in A, \quad u, v \in M).$$

Alors

1. *Le complexe d'homologie de Hochschild du bimodule M est un sous complexe de $(A_\infty(A \ltimes M), m_{A \ltimes M})$.*
2. *Un morphisme de cogèbres $F : (\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta_A) \longrightarrow (\oplus_{n \geq 1} \otimes^n B[1], \Delta_B)$, de degré 0 défini par $F_1 = \iota + c_1$, $F_n = c_n$ où ι est l'injection canonique de A dans $A \ltimes M$ et $c_j \in L(\otimes^j A[1], M[1])$ est un morphisme $F : (A_\infty(A), \Delta_A, m_A) \longrightarrow (A_\infty(B), \Delta_B, m_B)$ de A_∞ algèbres si et seulement si $m_B \circ F = F \circ m_A$, si et seulement si $\partial c_j = 0$ ($j \geq 1$) où ∂ est le cobord de Hochschild.*

Un tel morphisme est dit trivial s'il existe une suite d'applications $b = (b_n)$, de degré -1 telle que $c = m_B \circ (\iota \otimes b + b \otimes \iota) - b \circ m_A$, si et seulement si, $c_1 = 0$ et $c_n = \partial b_{n-1}$, pour tout $n > 1$.

Preuve. —

1) On a $B = A \oplus M$, alors, $C_n(B) = \otimes^{n-1} B \supset \sum_{j=0}^{n-1} \otimes^j A \otimes M \otimes^{n-1-j} A = C_n(A, M)$ et $m_B|_{C_n(A, M)} = \partial_n$.

D'où, le complexe d'homologie de Hochschild du bimodule M est un sous complexe de $(A_\infty(A \times M), m_{A \times M})$.

2) Soit $F : \left(\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1], \Delta_A, m_A \right) \longrightarrow \left(\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n B[1], \Delta_B, m_B \right)$ un morphisme de A_∞ -algèbres tel que $F_1 = \iota + c_1$ et $F_n = c_n$. Alors, on a

$$F(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n).$$

et $m_B \circ F = F \circ m_A$. On va démontrer que $\partial c_j = 0$ par récurrence sur j .

Pour $j = 1$, $F(a \otimes b) = F_1(a) \otimes F_1(b) + F_2(a \otimes b)$. Donc, $m_B \circ F(a \otimes b) = m_B(F_1(a) \otimes F_1(b)) = ab + c_1(a)b + ac_1(b)$ et $F \circ m_A(a \otimes b) = F_1(a.b)$.

D'où, $\partial c_1(a \otimes b) = 0$.

Supposons que $\partial c_j = 0$, $\forall j \leq n - 2$ et montrons que $\partial c_{n-1} = 0$.

On a

$$\begin{aligned} & F \circ m_A(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\ &= F\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < j} \deg(a_i)} a_0 \otimes \dots \otimes m_A(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n\right) \\ &= \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \deg(a_i)} F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \\ & \otimes \dots \otimes F_{r_j} \circ m_A(a_{r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_j}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & m_B \circ F(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\ &= \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \deg(a_i)} F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \\ & \otimes \dots \otimes m_B\left(F_{r_j}(a_{r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_1 + \dots + r_j})\right) \\ & \otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1 + \dots + r_j + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_1 + \dots + r_{j+1}}) \\ & \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n). \end{aligned}$$

Dans la somme précédente, si $r_j, r_{j+1} > 1$ on a

$$\begin{aligned}
 & m_B \left(F_{r_j}(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}) \otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1+\dots+r_{j+1}} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}) \right) = 0. \text{ D'où,} \\
 & m_B \circ F(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &= \sum_{\substack{k>0, 0<r_1,\dots,r_k \\ r_1+\dots+r_k=n}} \sum_{\substack{j=0 \\ \text{ou } r_{j+1}=1}}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<r_1+\dots+r_{j-1}+1} \text{deg}(a_i)} F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \\
 & \otimes \dots \otimes m_B \left(F_{r_j}(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}) \right) \\
 & \otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1+\dots+r_{j+1}} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}) \\
 & \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n).
 \end{aligned}$$

De plus, on a si $r_j = 1$,

$$\begin{aligned}
 & m_B \left(F_1(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1}) \otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1+\dots+r_{j+1}} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}) \right) \\
 &= m_B \left(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1+\dots+r_{j+1}} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}) \right)
 \end{aligned}$$

et si $r_{j+1} = 1$,

$$\begin{aligned}
 & m_B \left(F_{r_j}(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}) \otimes F_1(a_{r_1+\dots+r_{j+1}}) \right) \\
 &= m_B \left(F_{r_j}(a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}) \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}} \right).
 \end{aligned}$$

Dans l'expression $(m_B \circ F - F \circ m_A)(a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$, ils apparaissent des termes où $r_j \leq n-2$ et des termes où $r_{j+1} \leq n-2$ qui disparaissent par hypothèse de récurrence car $\partial c_{r_j} = 0$, $\forall r_j \leq n-2$. Il reste que les termes où $r_j = 1$ et $r_{j+1} = n-1$ ou $r_j = n-1$ et $r_{j+1} = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
 & (m_B \circ F - F \circ m_A)(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = m_B(F_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) \otimes a_n) \\
 & + m_B(a_0 \otimes F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)) \\
 & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<j} \text{deg} a_i} F_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes m_A(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes a_{j+2} \otimes \dots \otimes a_n) \\
 & = (-1)^{\sum_{i<n-1} \text{deg} a_i} F_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) \cdot a_n + (-1)^{\text{deg} a_0} a_0 \cdot F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
 & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<j} \text{deg} a_i} F_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes (a_j \cdot a_{j+1}) \otimes a_{j+2} \otimes \dots \otimes a_n) \\
 & = (\partial F_{n-1})(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = 0
 \end{aligned}$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Hochschild ∂ .

3) Si $C = m_B \circ (\iota \otimes b + b \otimes \iota) - b \circ m_A$, alors,

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= m_B(a_0 \otimes b_{n-2}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &\quad + b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) \otimes a_n) \\
 &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i \leq j} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &= (-1)^{\text{deg} a_0} a_0 . b_{n-2}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) + (-1)^{\sum_{i \leq n-1} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) . a_n \\
 &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i \leq j} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &= \partial b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n).
 \end{aligned}$$

Dans les sections suivantes, nous allons répéter cette construction au cas des algèbres commutatives, des algèbres de Lie et des algèbres de Gerstenhaber.

3. C_∞ -algèbre

Dans ce paragraphe, R est une algèbre associative, commutative, graduée sur \mathbb{R} . La relation de commutativité $Com(a_1 \otimes a_2) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$ est symétrique. La relation d'associativité n'est pas complètement symétrique mais on a :

$$\dim Vect\{Ass \circ \sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = 2.$$

En fait cet espace est engendré, en tenant compte de la commutativité par les 2 relations :

$$Ass(a_1, a_2, a_3) = 0 \quad \text{et} \quad Ass(a_2, a_1, a_3) = 0.$$

Un supplémentaire de cet espace est formé par les images $Ass \circ \sigma$ de tous les battements (2,1) et (1,2) σ de trois lettres a_1, a_2, a_3 .

On définit donc d'abord les p, q battements de $n = p + q$ lettres comme les permutations σ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. On appelle $Bat(p, q)$ l'ensemble de tous ces battements et on définit le produit battement de deux tenseurs $\alpha = a_1 \otimes \dots \otimes a_p \in \otimes^p R$ et $\beta = a_{p+1} \otimes \dots \otimes a_{p+q} \in \otimes^q R$ par

$$bat_{p,q}(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon_{|\alpha|}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Où $\varepsilon_{|a|}(\sigma^{-1})$ est le signe obtenu par la règle de Koszul en tenant compte des degrés $|a|$ des tenseurs. C'est-à-dire le morphisme de groupe sur \mathfrak{S}_n tel que $\varepsilon_{|a|}((i, j)) = (-1)^{|a_i||a_j|}$.

$bat_{p,q}$ représente la somme signée de tous les tenseurs $a_{i_1} \otimes \dots \otimes a_{i_n}$ dans lesquels les vecteurs a_1, \dots, a_p et les vecteurs a_{p+1}, \dots, a_{p+q} apparaissent rangés dans leur ordre naturel.

Par définition, l'espace $\underline{\otimes}^n R$ est le quotient de $\otimes^n R$ par la somme de toutes les images des applications linéaires $bat_{p,n-p}$ ($0 < p < n$) (voir [G], [L]). Cet espace est engendré par les classes des tenseurs $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ dans le quotient. On note abusivement $a_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} a_n$ une telle classe (bien que $\underline{\otimes}$ ne soit pas une multiplication définie sur les classes).

Si $n = 3$, si (a_1, a_2, a_3) est un système libre dans R , l'espace $Bat(2, 1)$ contient les tenseurs

$$\begin{aligned} bat_{2,1}(a_1 \otimes a_2, a_3) &= a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 + (-1)^{|a_3||a_2|} a_1 \otimes a_3 \otimes a_2 \\ &\quad + (-1)^{|a_3|(|a_2|+|a_1|)} a_3 \otimes a_1 \otimes a_2 \\ bat_{2,1}(a_2 \otimes a_1, a_3) &= a_2 \otimes a_1 \otimes a_3 + (-1)^{|a_3||a_1|} a_2 \otimes a_3 \otimes a_1 \\ &\quad + (-1)^{|a_3|(|a_2|+|a_1|)} a_3 \otimes a_2 \otimes a_1. \end{aligned}$$

L'espace $Bat(1, 2)$ contient les tenseurs

$$\begin{aligned} bat_{1,2}(a_1, a_2 \otimes a_3) &= a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 + (-1)^{|a_1||a_2|} a_2 \otimes a_1 \otimes a_3 \\ &\quad + (-1)^{|a_1|(|a_2|+|a_3|)} a_2 \otimes a_3 \otimes a_1 \\ bat_{1,2}(a_2, a_1 \otimes a_3) &= a_2 \otimes a_1 \otimes a_3 + (-1)^{|a_2||a_1|} a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \\ &\quad + (-1)^{|a_2|(|a_1|+|a_3|)} a_1 \otimes a_3 \otimes a_2. \end{aligned}$$

Si $V = Vect\{a_1, a_2, a_3\}$, ces quatre tenseurs forment une base de l'espace image des battemenst de $Bat(1, 2)$ et $Bat(2, 1)$ dans $\otimes^3 V$. Les tenseurs $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$ et $a_2 \otimes a_1 \otimes a_3$ forment une base d'un supplémentaire, donc $a_1 \underline{\otimes} a_2 \underline{\otimes} a_3$ et $a_2 \underline{\otimes} a_1 \underline{\otimes} a_3$ forment une base de $\underline{\otimes}^3 V$.

Ce qui remplacera l'algèbre tensorielle $\oplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1]$ sera donc ici l'espace $\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1]$. Le quotient tient compte bien sûr du nouveau degré $\deg(a) = |a| - 1$ des éléments de $R[1]$.

Cet espace est muni d'un cocrochet de Lie δ sur $\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1]$ en posant d'abord :

$$\begin{aligned} \delta(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_1 \otimes \dots \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n \\ &\quad - \varepsilon^{\deg} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-j & n-j+1 & \dots & n \\ j+1 & \dots & n & 1 & \dots & j \end{pmatrix} a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_j. \end{aligned}$$

Cette formule permet de définir δ sur l'espace quotient $\underline{\otimes}^n(R[1])$ (voir [AAC2]).

PROPOSITION 3.1 (La structure de cogèbre). — *L'espace $\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1]$ équipé de δ est une cogèbre de Lie, c'est-à-dire que δ est coantisymétrique de degré 0 et vérifie l'identité de coJacobi : si τ est la volte ($\tau(a \otimes b) = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} b \otimes a$),*

$$\tau \circ \delta = -\delta, \quad \left(id^{\otimes 3} + (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) + (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \right) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0.$$

Cette cogèbre de Lie est libre. C'est-à-dire que si (C, c) est une cogèbre de Lie nilpotente quelconque, tout $f : (C, c) \rightarrow R[1]$ linéaire se prolonge en $F : (C, c) \rightarrow \oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1]$ qui est un morphisme de cogèbre. On en déduit qu'on peut définir des codérivations D et des morphismes F de cette structure à partir de leur 'série de Taylor'.

Soit $F : \oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1] \rightarrow \oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n S[1]$ un morphisme de cogèbres de Lie :

$$(F \otimes F) \circ \delta = \delta \circ F.$$

On suppose toujours F homogène de degré 0. On appelle F_n la projection sur $S[1]$ parallèlement à $\oplus_{n > 1} \underline{\otimes}^n S[1]$ de la restriction de F à $\underline{\otimes}^n(R[1])$: F_n est une application linéaire de $\underline{\otimes}^n(R[1])$ dans $S[1]$.

De même soit $D : \oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1] \rightarrow \oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n R[1]$ une codérivation de cogèbres de Lie :

$$(id \otimes D + D \otimes id) \circ \delta = \delta \circ D.$$

On suppose D homogène de degré q . On appelle D_n la projection sur $R[1]$ parallèlement à $\oplus_{n > 1} \underline{\otimes}^n R[1]$ de la restriction de D à $\underline{\otimes}^n(R[1])$: D_n est une application linéaire de $\underline{\otimes}^n(R[1])$ dans $R[1]$.

PROPOSITION 3.2 (Reconstruction de F et D). — *La suite d'applications (F_n) (resp. (D_n)) permet de reconstruire F (resp. D) de façon unique. En posant $a_{[i, i+j]} = a_i \underline{\otimes} a_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} a_{i+j}$, on a explicitement :*

$$F(a_{[1, n]}) = \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} F_{r_1}(a_{[1, r_1]}) \underline{\otimes} F_{r_2}(a_{[r_1+1, r_1+r_2]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(a_{[n-r_k+1, n]})$$

et

$$D(a_{[1, n]}) = \sum_{\substack{0 < r \\ 1 \leq j \leq n-r}} (-1)^{q \deg(a_{[1, j]})} a_{[1, j]} \underline{\otimes} D_r(a_{[j+1, j+r]}) \underline{\otimes} a_{[j+r+1, n]}.$$

Plus précisément, toute suite d'applications (φ_n) peut se relever d'une seule façon en un morphisme (resp. une codérivation).

Voir [AAC2] et [BGHHW] pour la preuve de cette proposition.

La multiplication dans R permet de transformer $\bigoplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n(R[1])}$ en un complexe d'homologie. Posons $C_n(R) = \underline{\otimes^n(R[1])}$. La multiplication se remonte en une application $m : \underline{\otimes^2 R[1]} \longrightarrow R[1]$ comme ci-dessus :

$$m(\underline{a \otimes b}) = (-1)^{\deg(a)} ab.$$

Cette application est de degré 1, anticommutative et antiassociative :

$$\begin{aligned} \deg(m(\underline{a \otimes b})) &= 1 + \deg(a) + \deg(b), \\ m(\underline{a \otimes b}) &= -(-1)^{\deg(a)\deg(b)} m(\underline{b \otimes a}), \\ m(\underline{m(\underline{a \otimes b}) \otimes c}) &= -(-1)^{\deg(a)} m(\underline{a \otimes m(\underline{b \otimes c})}). \end{aligned}$$

Elle se prolonge d'une façon unique en une codérivation de $(\bigoplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n R[1]}, \delta)$, toujours notée m . On a :

$$m(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n}) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < j} \deg(a_i)} \underline{a_1 \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n}$$

et donc :

$$(id \otimes m + m \otimes id) \circ \delta = \delta \circ m.$$

La relation d'associativité pour le produit est équivalente à

$$m \circ m = 0.$$

On définit ainsi un complexe d'homologie appelé la Bar résolution de R la C_∞ -algèbre.

DÉFINITION 3.3 (C_∞ -algèbre). — Soit R une algèbre graduée, associative et commutative. On appelle C_∞ -algèbre de R la cogèbre de Lie $(\bigoplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n R[1]}, \delta)$ munie de la codérivation m . On note cette algèbre par

$$C_\infty(R) = (\bigoplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n R[1]}, \delta, m).$$

La C_∞ -algèbre de R est donc un complexe d'homologie :

$$0 \xleftarrow{m} C_0(R) \xleftarrow{m} C_1(R) \xleftarrow{m} \dots \xleftarrow{m} C_{n-1}(R) \xleftarrow{m} \dots$$

On note $Z_n(R) = \ker(m|_{C_n(R)})$ et $B_n(m) = \text{im}(m|_{C_{n+1}(R)})$, on a donc les groupes d'homologie :

$$H_n(R) = Z_n(R)/B_n(R)$$

pour tout n . On appelle cette homologie, l'homologie de Harrison de l'algèbre commutative R .

Plus généralement,

Soit R une algèbre graduée, associative et commutative. Soit M un R -bimodule gradué et symétrique :

$$v.a = (-1)^{|a||v|} a.v \quad (a \in R, v \in M).$$

On posera $m(a \otimes v) = (-1)^{\deg(a)} a.v$. L'homologie de Harrison du bimodule M est définie de la façon suivante.

On pose $C_n(A, M) = \frac{\sum_{j=0}^n \otimes^j R[1] \otimes M[1] \otimes \otimes^{n-j} R[1]}$, quotient de l'espace des n chaînes de R vue comme une algèbre associative par l'espace des images de tous les battements $bat_{p,n-p}$ agissant sur le produit tensoriel avec un facteur $M[1]$. Le complexe d'homologie de Harrison est le complexe :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(R, M) \xleftarrow{\partial_1} C_1(R, M) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1}(R, M) \xleftarrow{\partial_n} \dots$$

où le bord ∂_n est linéaire, de degré 1 et défini par :

$$\begin{aligned} \partial_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes v_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) = & \\ \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{\sum_{k<j} \deg(a_k)} \underline{a_0 \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes a_n} + & \\ + (-1)^{\sum_{k<i-1} \deg(a_k)} \underline{a_0 \otimes \dots \otimes m(a_{i-1} \otimes v_i) \otimes \dots \otimes a_n} & \\ + (-1)^{\sum_{k<i} \deg(a_k)} \underline{a_0 \otimes \dots \otimes m(v_i \otimes a_{i+1}) \otimes \dots \otimes a_n} + & \\ + \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{\sum_{k<j} \deg(a_k) + \deg(v_i)} \underline{a_0 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n}. & \end{aligned}$$

Comme plus haut, le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du bimodule M est $H_n(R, M) = Z_n(R, M)/B_n(R, M)$, où $Z_n(R, M) = \ker(\partial_n)$ et $B_n(R, M) = \text{im}(\partial_{n+1})$.

De même la cohomologie de ce bimodule M est définie ainsi. On pose

$$C^n(R, M) = L(\otimes^n R[1], M[1]),$$

et on obtient le complexe de cohomologie de Harisson en posant :

$$0 \xrightarrow{\partial^0} C^0(R, M) \xrightarrow{\partial^1} C^1(R, M) \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^{n-1}(R, M) \xrightarrow{\partial^n} \dots$$

avec, si $f \in C^n(R, M)$ est homogène de degré $\deg(f)$:

$$\begin{aligned} (\partial^{n+1} f)(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n}) &= (-1)^{\deg(f) \deg(a_0)} m(a_0 \otimes f(\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n})) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{\sum_{k < j} \deg(a_k)} f(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n}) \\ &\quad + (-1)^{\sum_{k < n} \deg(a_k)} f(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}}) \otimes a_n. \end{aligned}$$

Et la cohomologie de Harrison de M est celle de ce complexe :

$$H^n(R, M) = Z^n(R, M) / B^n(R, M),$$

$$\text{où } Z^n(R, M) = \ker(\partial^{n+1}) \text{ et } B^n(R, M) = \text{im}(\partial^n).$$

Remarquons que si R et M ne sont pas gradués, on retrouve l'homologie et la cohomologie de Harrison usuelles du R bimodule symétrique M .

PROPOSITION 3.4 (Homologie et cohomologie de Harrison et C_∞ -algèbres). — *Soit R une algèbre associative, commutative et graduée. Soit M un R -bimodule symétrique gradué. On définit une nouvelle algèbre associative et commutative, notée $S = R \ltimes M$, produit semi-direct de R par M en munissant $R \oplus M$ de la multiplication :*

$$(a + u)(b + v) = (ab + (ub + av)) \quad (a, b \in R, \quad u, v \in M).$$

Alors

1. *Le complexe d'homologie de Harrison du bimodule symétrique M est un sous complexe de $(C_\infty(R \ltimes M), m_{R \ltimes M})$.*
2. *Un morphisme de cogèbres $F : (\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n R[1]}, \delta_R) \longrightarrow (\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n S[1]}, \Delta_S)$, de degré 0 défini par $F_1 = \iota + c_1$, $F_n = c_n$ où ι est l'injection canonique de R dans $R \ltimes M$ et $c_j \in L(\otimes^j R[1], M[1])$ est un morphisme $F : (C_\infty(R), \delta_R, m_R) \longrightarrow (C_\infty(S), \delta_S, m_S)$ de C_∞ algèbres si et seulement si $m_S \circ F = F \circ m_R$, si et seulement si $\partial c_j = 0$ ($j \geq 1$) où ∂ est le cobord de Harrison.*

Un tel morphisme est dit trivial s'il existe une suite d'applications $b = (b_n)$, de degré -1 telle que $c = m_B \circ (\iota \otimes b + b \otimes \iota) - b \circ m_A$, si et seulement si, $c_1 = 0$ et $c_n = \partial b_{n-1}$, pour tout $n > 1$.

Preuve. — **1)** On a $S = R \oplus M$, alors, $C_n(S) = \otimes^{n-1} S \supset \sum_{j=0}^{n-1} \otimes^j R \otimes M \otimes^{n-1-j} R = C_n(R, M)$ et $m_{S|C_n(R, M)} = \partial_n$.

D'où, le complexe d'homologie de Harrison du bimodule M est un sous complexe de $(C_\infty(R \times M), m_{R \times M})$.

2) Soit $F : \left(\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n R[1], \Delta_R, m_R \right) \longrightarrow \left(\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n S[1], \Delta_S, m_S \right)$ un morphisme de C_∞ -algèbres tel que $F_1 = \iota + c_1$ et $F_n = c_n$. Alors, on a

$$F(\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n}) = \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \underline{F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n)}.$$

et $m_S \circ F = F \circ m_R$. On va démontrer que $\partial c_j = 0$ par récurrence sur j .

Pour $j = 1$, $F(\underline{a \otimes b}) = \underline{F_1(a) \otimes F_1(b)} + F_2(\underline{a \otimes b})$. Donc, $m_S \circ F(\underline{a \otimes b}) = m_S(\underline{F_1(a) \otimes F_1(b)}) = ab + c_1(a)b + ac_1(b)$ et $F \circ m_R(\underline{a \otimes b}) = F_1(ab)$.

D'où, $\partial c_1(\underline{a \otimes b}) = 0$.

Supposons que $\partial c_j = 0, \forall j \leq n - 2$ et montrons que $\partial c_{n-1} = 0$.

On a

$$\begin{aligned} & F \circ m_R(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n}) \\ &= F\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < j} \deg(a_i)} \underline{a_0 \otimes \dots \otimes m_R(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n}\right) \\ &= \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \deg(a_i)} \underline{F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes} \\ & \quad \underline{\otimes \dots \otimes F_{r_j} \circ m_R(a_{r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_j}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & m_S \circ F(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n}) \\ &= \sum_{\substack{k > 0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \deg(a_i)} \underline{F_{r_1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}) \otimes} \\ & \quad \underline{\otimes \dots \otimes m_S\left(F_{r_j}(a_{r_1 + \dots + r_{j-1} + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_1 + \dots + r_j})\right)} \\ & \quad \underline{\underline{\otimes F_{r_{j+1}}(a_{r_1 + \dots + r_j + 1} \otimes \dots \otimes a_{r_1 + \dots + r_{j+1}})}} \\ & \quad \underline{\underline{\otimes \dots \otimes F_{r_k}(a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n)}}. \end{aligned}$$

Dans la somme précédente, si $r_j, r_{j+1} > 1$ on a

$$\begin{aligned}
 & m_S \left(F_{r_j} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}} \right) \underline{\otimes} F_{r_{j+1}} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_j+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}} \right) \right) \\
 &= 0. \text{ D'où,} \\
 & m_S \circ F \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n} \right) \\
 &= \sum_{\substack{k>0, 0<r_1, \dots, r_k \\ r_1+\dots+r_k=n}} \sum_{\substack{j=0 \\ r_j=1 \text{ ou } r_{j+1}=1}}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<r_1+\dots+r_{j-1}+1} \text{deg}(a_i)} \underline{F_{r_1} \left(\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_{r_1}} \right) \otimes} \\
 & \underline{\otimes \dots \otimes m_S \left(F_{r_j} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}} \right) \right)} \\
 & \underline{\underline{\otimes F_{r_{j+1}} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_j+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}} \right)}} \\
 & \underline{\otimes \dots \otimes F_{r_k} \left(\underline{a_{n-r_k+1} \otimes \dots \otimes a_n} \right)}.
 \end{aligned}$$

De plus, on a si $r_j = 1$,

$$\begin{aligned}
 & m_S \left(F_1 \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1}} \right) \underline{\otimes} F_{r_{j+1}} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_j+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}} \right) \right) \\
 &= m_S \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1}} \underline{\otimes} F_{r_{j+1}} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_j+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_{j+1}}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

et si $r_{j+1} = 1$,

$$\begin{aligned}
 & m_S \left(F_{r_j} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}} \right) \underline{\otimes} F_1 \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_j+1}} \right) \right) \\
 &= m_S \left(F_{r_j} \left(\underline{a_{r_1+\dots+r_{j-1}+1} \otimes \dots \otimes a_{r_1+\dots+r_j}} \right) \underline{\otimes} \underline{a_{r_1+\dots+r_j+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Dans l'expression $(m_S \circ F - F \circ m_R)(a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$, apparaissent des termes où $r_j \leq n-2$ et des termes où $r_{j+1} \leq n-2$ qui disparaissent par hypothèse de récurrence car $\partial c_{r_j} = 0$, $\forall r_j \leq n-2$. Il reste que les termes où $r_j = 1$ et $r_{j+1} = n-1$ ou $r_j = n-1$ et $r_{j+1} = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
 & (m_S \circ F - F \circ m_R) \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n} \right) = m_S \left(F_{n-1} \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}} \right) \underline{\otimes} \underline{a_n} \right) \\
 & + m_S \left(\underline{a_0} \underline{\otimes} F_{n-1} \left(\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n} \right) \right) \\
 & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\sum_{i<j} \text{dega}_i} \underline{F_{n-1} \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes m_R \left(\underline{a_j \otimes a_{j+1}} \right) \otimes a_{j+2} \otimes \dots \otimes a_n} \right)} \\
 & = (-1)^{\sum_{i<n-1} \text{dega}_i} \underline{F_{n-1} \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}} \right) \cdot a_n} + (-1)^{\text{dega}_0} \underline{a_0 \cdot F_{n-1} \left(\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_n} \right)} \\
 & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\sum_{i \leq j} \text{dega}_i} \underline{F_{n-1} \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes (a_j \cdot a_{j+1}) \otimes a_{j+2} \otimes \dots \otimes a_n} \right)} \\
 & = (\partial F_{n-1}) \left(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n} \right) = 0
 \end{aligned}$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Harrison ∂ .

3) Si $C = m_S \circ (\iota \otimes b + b \otimes \iota) - b \circ m_A$, alors,

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) &= m_S(a_0 \otimes b_{n-2}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) + b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) \otimes a_n) \\
 &- \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i \leq j} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n) = \\
 &(-1)^{\text{deg} a_0} a_0 \cdot b_{n-2}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) + (-1)^{\sum_{i \leq n-1} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) \cdot a_n \\
 &- \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i \leq j} \text{deg} a_i} b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &= \partial b_{n-2}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n).
 \end{aligned}$$

4. L_∞ -algèbre

Dans ce paragraphe, \mathfrak{g} est une algèbre de Lie graduée sur \mathbb{R} . La relation d'antisymétrie du crochet : $\text{Antisym}(a_1 \otimes a_2) = [a_1, a_2] + (-1)^{|a_1||a_2|} [a_2, a_1] = 0$ est bien sûr antisymétrique, de plus, la relation de Jacobi $\text{Jac}(a_1, a_2, a_3) = 0$ où :

$$\begin{aligned}
 \text{Jac}(a_1, a_2, a_3) &= (-1)^{|a_1||a_3|} [[a_1, a_2], a_3] + (-1)^{|a_2||a_1|} [[a_2, a_3], a_1] \\
 &+ (-1)^{|a_3||a_2|} [[a_3, a_1], a_2]
 \end{aligned}$$

est complètement antisymétrique. On a :

$$\dim \text{Vect}\{\text{Jac} \circ \sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = 1.$$

En fait cet espace est engendré, en tenant compte de l'antisymétrie par la relation $\text{Jac}(a_1, a_2, a_3) = 0$.

Après décalage de 1, on doit donc considérer des tenseurs complètement symétriques pour le degré deg .

Ce qui remplacera l'algèbre tensorielle $\bigoplus_{n \geq 1} \otimes^n A[1]$ sera donc ici l'espace $\bigoplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1])$. La symétrie tient compte bien sûr du nouveau degré $\text{deg}(a) = |a| - 1$ des éléments de $\mathfrak{g}[1]$. Un élément de $S^n(\mathfrak{g}[1])$ est noté $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

Cet espace est muni d'une comultiplication Δ définie par :

$$\Delta(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ |I| > 0, |J| > 0}} \varepsilon_{\text{deg}(a)} - \binom{\{1, \dots, n\}}{I, J} a_I \otimes a_J,$$

où $a_I = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{|I|}}$ si $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_{|I|}\}$. Δ est ainsi bien défini sur $S^n(\mathfrak{g}[1])$ (voir [AMM]).

PROPOSITION 4.1 (La structure de cogèbre). — *L'espace $\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1])$ équipé de Δ est une cogèbre cocommutative et coassociative, c'est-à-dire que Δ est de degré 0 et vérifie, si τ est la volte ($\tau(a \otimes b) = (-1)^{\deg(a) \deg(b)} b \otimes a$),*

$$\tau \circ \Delta = \Delta, \quad (id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta.$$

Cette cogèbre est libre, en particulier, on peut définir des codérivations Q et des morphismes F de cette structure à partir de leurs 'séries de Taylor'.

Soit $F : \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{h}[1])$ un morphisme de cogèbres :

$$(F \otimes F) \circ \Delta = \Delta \circ F.$$

On suppose toujours F homogène de degré 0. On appelle F_n la projection sur $\mathfrak{h}[1]$ parallèlement à $\oplus_{n > 1} S^n(\mathfrak{h}[1])$ de la restriction de F à $S^n(\mathfrak{g}[1])$: F_n est une application linéaire de $S^n(\mathfrak{g}[1])$ dans $\mathfrak{h}[1]$.

De même soit $D : \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1])$ une codérivation de Δ :

$$(id \otimes D + D \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ D.$$

On suppose D homogène de degré q . On appelle D_n la projection sur $\mathfrak{g}[1]$ parallèlement à $\oplus_{n > 1} S^n(\mathfrak{g}[1])$ de la restriction de D à $S^n(\mathfrak{g}[1])$: D_n est une application linéaire de $S^n(\mathfrak{g}[1])$ dans $\mathfrak{g}[1]$.

PROPOSITION 4.2 (Reconstruction de F et D). — *La suite d'applications (F_n) (resp. (D_n)) permet de reconstruire F (resp. D) de façon unique. On a explicitement :*

$$F(a_1 \dots a_n) = \sum_{j > 0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \cup \dots \cup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \varepsilon_{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{I_1, \dots, I_j} F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}).$$

et

$$D(a_1 \dots a_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{I, J} (D_{|I|}(a_I)) \cdot a_J.$$

Plus précisément, toute suite d'applications (φ_n) peut se relever d'une seule façon en un morphisme (resp. une codérivation).

Voir [AMM] et [AAC2] pour la preuve de cette proposition.

Le crochet de Lie dans \mathfrak{g} permet de transformer $\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1])$ en un complexe d'homologie. Posons $C_n(\mathfrak{g}) = S^n(\mathfrak{g}[1])$. Le crochet de Lie se remonte en une application $\ell : S^2(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}[1]$ comme ci-dessus :

$$\ell(a.b) = (-1)^{\deg(a)} [a, b].$$

Cette application est de degré 1, commutative et vérifie Jacobi :

$$\begin{aligned} \deg(\ell(a.b)) &= 1 + \deg(a) + \deg(b), \\ \ell(a.b) &= (-1)^{\deg(a)\deg(b)}\ell(b.a), \\ (-1)^{\deg(a_1)\deg(a_3)}\ell(\ell(a_1.a_2).a_3) &+ (-1)^{\deg(a_2)\deg(a_1)}\ell(\ell(a_2.a_3).a_1) + \\ &+ (-1)^{\deg(a_3)\deg(a_2)}\ell(\ell(a_3.a_1).a_2) = 0. \end{aligned}$$

Elle se prolonge d'une façon unique en une codérivation de $(\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]), \Delta)$, toujours notée ℓ . On a :

$$\ell(a_1 \dots a_n) = \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)}(1 \dots ni, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n) \ell(a_i.a_j).a_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots a_n$$

et donc :

$$(id \otimes \ell + \ell \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ \ell.$$

La relation de Jacobi pour le crochet est équivalente à

$$\ell \circ \ell = 0.$$

On définit ainsi un complexe d'homologie appelé la Bar résolution de \mathfrak{g} la L_∞ -algèbre.

DÉFINITION 4.3 (L_∞ -algèbre). — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie graduée. On appelle L_∞ -algèbre de \mathfrak{g} la cogèbre coassociative et cocommutative $(\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]), \Delta)$ munie de la codérivation ℓ . On note cette algèbre par

$$L_\infty(\mathfrak{g}) = (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]), \Delta, \ell).$$

La L_∞ -algèbre de \mathfrak{g} est donc un complexe d'homologie :

$$0 \xleftarrow{\ell} C_1(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\ell} C_2(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\ell} \dots \xleftarrow{\ell} C_{n-1}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\ell} \dots$$

On note $Z_n(\mathfrak{g}) = \ker(\ell|_{C_n(\mathfrak{g})})$ et $B_n(\mathfrak{g}) = \text{im}(\ell|_{C_{n+1}(\mathfrak{g})})$, on a donc les groupes d'homologie :

$$H_n(\mathfrak{g}) = Z_n(\mathfrak{g})/B_n(\mathfrak{g})$$

pour tout n . Il est facile de voir que cette homologie est l'homologie de Chevalley de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Plus généralement,

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie graduée. Soit M un \mathfrak{g} -module gradué. On posera

$$\ell(a.v) = (-1)^{\deg(a)}av = (-1)^{\deg(a)\deg(v)}\ell(v.a).$$

L'homologie de Chevalley du module M est définie de la façon suivante.

On pose $C_n(\mathfrak{g}, M) = M[1] \cdot S^n(\mathfrak{g}[1])$, c'est un sous espace de $S^{n+1}(\mathfrak{g}[1]) \oplus M[1]$.

Le complexe d'homologie de Chevalley est le complexe :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(\mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1}(\mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\partial_n} \dots$$

où le bord ∂_n est linéaire, de degré 1 et défini, en posant $v.a_1 \dots a_n = x_0 \dots x_n$, par :

$$\partial_n(x_0 \dots x_n) = \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(x)} \binom{0 \dots n}{i, j, 0 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n} \ell(x_i \cdot x_j) \cdot x_0 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots x_n$$

Comme plus haut, le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du module M est $H_n(\mathfrak{g}, M) = Z_n(\mathfrak{g}, M)/B_n(\mathfrak{g}, M)$, où $Z_n(\mathfrak{g}, M) = \ker(\partial_n)$ et $B_n(\mathfrak{g}, M) = \text{im}(\partial_{n+1})$.

De même la cohomologie de ce module M est définie ainsi. On pose

$$C^n(\mathfrak{g}, M) = L(S^n(\mathfrak{g}[1]), M[1]),$$

et on obtient le complexe de cohomologie de Chevalley en posant :

$$0 \xrightarrow{\partial^0} C^0(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{\partial^1} C^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^{n-1}(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{\partial^n} \dots$$

avec, si $f \in C^n(\mathfrak{g}, M)$ est homogène de degré $\deg(f)$:

$$\begin{aligned} & \partial_n f(a_1 \dots a_{n+1}) \\ &= \sum_i (-1)^{\deg(a_i) \deg(f)} \varepsilon_{\deg(a)} \binom{1 \dots n+1}{i, 1, \dots, \hat{i} \dots n+1} \ell(a_i \cdot f(a_1 \dots \hat{i} \dots a_{n+1})) \\ &+ \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \binom{1, \dots, n+1}{i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1} f(\ell(a_i \cdot a_j) \cdot a_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots a_{n+1}). \end{aligned}$$

La cohomologie de Chevalley de M est celle de ce complexe :

$$H^n(\mathfrak{g}, M) = Z^n(\mathfrak{g}, M)/B^n(\mathfrak{g}, M),$$

$$\text{où } Z^n(\mathfrak{g}, M) = \ker(\partial^{n+1}) \text{ et } B^n(\mathfrak{g}, M) = \text{im}(\partial^n).$$

Remarquons que si \mathfrak{g} et M ne sont pas gradués, on retrouve l'homologie et la cohomologie de Chevalley usuelles du \mathfrak{g} module M .

PROPOSITION 4.4 (Homologie et cohomologie de Chevalley et L_∞ -algèbres). — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie graduée. Soit M un \mathfrak{g} -module gradué. On définit une nouvelle algèbre de Lie graduée notée $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times M$, produit semi-direct de \mathfrak{g} par M en munissant $\mathfrak{g} \oplus M$ du crochet :

$$[(a + u), (b + v)] = ([a, b] + (av - (-1)^{|b||u|}bu)) \quad (a, b \in \mathfrak{g}, u, v \in M).$$

Alors

1. Le complexe d'homologie de Chevalley du module M est un sous complexe de $(L_\infty(\mathfrak{g} \times M), \ell_{\mathfrak{g} \times M})$.
2. Un morphisme de cogèbres $F : (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]), \Delta_{\mathfrak{g}}) \longrightarrow (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{h}[1]), \Delta_{\mathfrak{h}})$, de degré 0 défini par $F_1 = \iota + c_1$, $F_n = c_n$ où ι est l'injection canonique de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{g} \times M$ et $c_j \in L(S^j(\mathfrak{g}[1]), M[1])$ est un morphisme $F : (L_\infty(\mathfrak{g}), \Delta_{\mathfrak{g}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \longrightarrow (L_\infty(\mathfrak{h}), \Delta_{\mathfrak{h}}, \ell_{\mathfrak{h}})$ de L_∞ algèbres si et seulement si $\ell_{\mathfrak{h}} \circ F = F \circ \ell_{\mathfrak{g}}$, si et seulement si $\partial c_j = 0$ ($j \geq 1$) où ∂ est le cobord de Chevalley.

Preuve. — **1**) On a $C_n(\mathfrak{g}, M) = M[1].S^n(\mathfrak{g}[1]) \subset S^{n+1}(\mathfrak{g}[1] \oplus M[1])$ et $\ell_{\mathfrak{g} \times M}/C_n(\mathfrak{g}, M) = \partial_n$. D'où, le complexe d'homologie de Chevalley du module M est un sous complexe de $(L_\infty(\mathfrak{g} \times M), \ell_{\mathfrak{g} \times M})$.

2) Soit $F : (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{g}[1]), \Delta_{\mathfrak{g}}, \ell_{\mathfrak{g}}) \longrightarrow (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathfrak{h}[1]), \Delta_{\mathfrak{h}}, \ell_{\mathfrak{h}})$ un morphisme de L_∞ algèbres de degré 0 tel que $F_1 = \iota + c_1$ et $F_n = c_n$. Montrons par récurrence sur j que $\partial c_j = 0$.

D'une part, on a $\ell_{\mathfrak{h}} \circ F = F \circ \ell_{\mathfrak{g}}$, alors, d'une part, on a

$$\begin{aligned} \ell_{\mathfrak{h}} \circ F(a \otimes b) &= \ell_{\mathfrak{h}}(F_1(a).F_1(b) + F_2(a \otimes b)) \\ &= \ell_{\mathfrak{h}}(F_1(a).F_1(b)) \end{aligned}$$

et

$$F \circ \ell_{\mathfrak{g}}(a \otimes b) = \ell_{\mathfrak{g}}(a \otimes b) + c_1(\ell_{\mathfrak{g}}(a \otimes b))$$

D'où $\partial c_1(a \otimes b) = 0$.

Supposons le résultat est vrai à l'ordre $n - 2$ et montrons vrai à l'ordre $n - 1$. On a

$$\begin{aligned} &\ell_{\mathfrak{h}} \circ F(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\ &= \ell_{\mathfrak{h}} \left(\sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{I_1, \dots, I_j} F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}) \right) \\ &= \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_{s < k} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{I_s, I_k, I_1, \dots, \hat{s}k, \dots, I_j} \\ &\quad \ell_{\mathfrak{h}} \left(F_{|I_s|}(a_{I_s}), F_{|I_k|}(a_{I_k}) \right) F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}). \end{aligned}$$

Dans cette somme, si $|I_s| > 1$ et $|I_k| > 1$, on a $\ell_{\mathfrak{h}}\left(F_{|I_s|}(a_{I_s}), F_{|I_k|}(a_{I_k})\right) = 0$.

Il reste

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_{\substack{s \neq k \\ |I_s|=1}} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{s, I_k, I_1, \dots, \hat{s}k, \dots, I_j} \\
 &= \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_{\substack{s \neq k \\ |I_s|=1, |I_k| \leq n-2}} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{s, I_k, I_1, \dots, \hat{s}k, \dots, I_j} \\
 & \quad \ell_{\mathfrak{h}}\left(F_1(a_s), F_{|I_k|}(a_{I_k})\right) F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}) \\
 &+ \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_s \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{s, 1, \dots, \hat{s}, \dots, n} \\
 & \quad \ell_{\mathfrak{h}}\left(F_1(a_s), F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \hat{s} \dots \otimes a_n)\right).
 \end{aligned}$$

Or $\ell_{\mathfrak{h}}\left(F_1(a_s), F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \hat{s} \dots \otimes a_n)\right) = \ell_{\mathfrak{h}}\left(a_s, F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \hat{s} \dots \otimes a_n)\right)$.
Alors,

$$\begin{aligned}
 & \ell_{\mathfrak{h}} \circ F(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \\
 & \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_{\substack{s \neq k \\ |I_s|=1, |I_k| \leq n-2}} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{s, I_k, I_1, \dots, \hat{s}k, \dots, I_j} \\
 & \quad \ell_{\mathfrak{h}}\left(a_s, F_{|I_k|}(a_{I_k})\right) F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}) \\
 &+ \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_s \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1, \dots, n}{s, 1, \dots, \hat{s}, \dots, n} \\
 & \quad \ell_{\mathfrak{h}}\left(a_s, F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \hat{s} \dots \otimes a_n)\right).
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 & F \circ \ell_{\mathfrak{g}}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \\
 &= F\left(\sum_{i<j} \varepsilon^{\deg(a)} \binom{1 \dots n}{i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n}\right) \ell_{\mathfrak{g}}(a_i, a_j) \cdot a_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots a_n.
 \end{aligned}$$

On pose $b_1 = \ell_{\mathfrak{g}}(a_i \cdot a_j)$, $b_2 = a_1, \dots, b_{n-1} = a_n$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
 & F \circ \ell_{\mathfrak{g}}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \\
 & \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) \sum_{\ell > 0} \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{\ell} = \{1, \dots, n-1\} \\ I_1 \dots I_{\ell} \neq \emptyset}} \varepsilon_{\deg(b)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n-1 \\ I_1 \dots I_{\ell} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad F_{|I_1|}(b_{I_1}) \dots F_{|I_{\ell}|}(b_{I_{\ell}}) \\
 & = \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) \sum_{\ell > 0} \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{\ell} = \{1, \dots, n-1\} \\ I_1 \dots I_{\ell} \neq \emptyset \\ b_1 \in I_k}} \varepsilon_{\deg(b)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n-1 \\ I_k I_1 \dots I_{\ell} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad F_{|I_k|}(b_{I_k}) \cdot F_{|I_1|}(b_{I_1}) \dots F_{|I_{\ell}|}(b_{I_{\ell}}) \\
 & = \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) \sum_{\ell > 0} \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{\ell} = \{1, \dots, n-1\} \\ I_1 \dots I_{\ell} \neq \emptyset \\ b_1 \in I_k, |I_k| \leq n-2}} \varepsilon_{\deg(b)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n-1 \\ I_k I_1 \dots I_{\ell} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad F_{|I_k|}(b_{I_k}) \cdot F_{|I_1|}(b_{I_1}) \dots F_{|I_{\ell}|}(b_{I_{\ell}}) \\
 & + \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) F_{n-1}(\ell_{\mathfrak{g}}(a_i \cdot a_j) a_1 \dots a_n).
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 0 & = \ell_{\mathfrak{h}} \circ F(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) - F \circ \ell_{\mathfrak{g}}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \\
 & \sum_{j > 0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_{\substack{s \neq k \\ |I_s|=1, |I_k| \leq n-2}} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1, \dots, n \\ s, I_k, I_1, \dots, \hat{s} \hat{k}, \dots, I_j \end{array} \right) \ell_{\mathfrak{h}} \left(a_s, F_{|I_k|}(a_{I_k}) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad F_{|I_1|}(a_{I_1}) \dots F_{|I_j|}(a_{I_j}) \\
 & - \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) \sum_{\ell > 0} \frac{1}{\ell!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_{\ell} = \{1, \dots, n-1\} \\ I_1 \dots I_{\ell} \neq \emptyset \\ b_1 \in I_k, |I_k| \leq n-2}} \varepsilon_{\deg(b)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n-1 \\ I_k I_1 \dots I_{\ell} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad F_{|I_k|}(b_{I_k}) \cdot F_{|I_1|}(b_{I_1}) \dots F_{|I_{\ell}|}(b_{I_{\ell}}) \\
 & + \sum_{j > 0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \sum_s \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1, \dots, n \\ s, 1, \dots, \hat{s}, \dots, n \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \ell_{\mathfrak{h}} \left(a_s, F_{n-1}(a_1 \otimes \dots \otimes \hat{s} \dots \otimes a_n) \right) \\
 & - \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(a)} \left(\begin{array}{c} 1 \dots n \\ i, j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n \end{array} \right) F_{n-1}(\ell_{\mathfrak{g}}(a_i \cdot a_j) a_1 \dots a_n) \\
 & = (I) - (II) + (III) - (IV).
 \end{aligned}$$

Sachant que $\partial c_{|I_k|} = 0$, $\forall |I_k| \leq n - 2$, on obtient $(I) - (II) = 0$. De plus, on aura $(III) - (IV) = \partial c_{n-1}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = 0$.

5. Résolution de Koszul pour une algèbre de Lie

On peut, comme pour l'homologie et la cohomologie de Hochschild, décrire les complexes d'homologie et de cohomologie de Chevalley comme des complexes dérivés d'une résolution, celle du module trivial \mathbb{R} . Introduisons l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On rappelle, que si $(a_i)_{i \in I}$ est une base de \mathfrak{g} , formée d'éléments homogènes, si I est totalement ordonné, alors les monômes $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$ (calculés dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$) où $i_k \leq i_{k+1}$ et $i_k = i_{k+1}$ implique a_{i_k} pair forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, dite base de Poincaré-Birkhoff-Witt. On peut prouver ce résultat en reprenant la preuve de [B] donnée dans le cas non gradué et en l'adaptant au cas gradué.

Rappelons que de même une base de $S(\mathfrak{g})$ est donnée par les mêmes monômes, calculés dans $S(\mathfrak{g})$. Enfin une base de $\Lambda \mathfrak{g}$ (qui est linéairement isomorphe à $S(\mathfrak{g}[1])$) est donnée par les monômes $a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_p}$ où $i_k \leq i_{k+1}$ et $i_k = i_{k+1}$ implique a_{i_k} impair, calculés dans $\Lambda \mathfrak{g}$.

Considérons la suite exacte :

$$0 \xleftarrow{\partial_{-1}} \mathbb{R} \xleftarrow{\partial_0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\partial_1} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_n} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g} \xleftarrow{\partial_{n+1}} \dots$$

où ∂_0 est l'augmentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et ∂_n est un morphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module défini par :

$$\begin{aligned} \partial_n(u \otimes a_1 \wedge \dots \wedge a_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \varepsilon_{|a|}(i, 1 \dots \hat{i} \dots, n) u a_i \otimes a_1 \wedge \dots \hat{i} \dots \wedge a_n \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varepsilon_{|a|}(i, j, 1, \dots, \hat{i} \hat{j} \dots, n) u \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots \wedge a_n. \end{aligned}$$

Cette suite exacte est une résolution, elle s'appelle la résolution de Koszul du \mathfrak{g} module trivial.

Pour montrer que la suite est une résolution, on filtre d'abord l'espace total $C = \oplus_{n \geq 0} C_n = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n \mathfrak{g}$ en posant :

$$F_p(C) = \bigoplus_{k=0}^p \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{p-k} \otimes \wedge^k \mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^p F_p(C)_k.$$

On pose $W_p^q = F_p(C)_q / F_{p-1}(C)_q$. En ne retenant que la première partie de l'opérateur ∂_n , on pose :

$$d_n(u \otimes a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \varepsilon_{|a|}(i, 1 \dots \hat{i} \dots, n) u a_i \otimes a_1 \wedge \dots \wedge \hat{i} \dots \wedge a_n.$$

Cet opérateur passe au quotient et définit donc une famille de suites exactes, pour $p \geq 0$:

$$0 \xleftarrow{d_{-1}} \mathbb{R} \xleftarrow{d_0} W_p^0 \xleftarrow{d_1} W_p^1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_p} W_p^p \xleftarrow{d_{p+1}} 0.$$

Ces suites admettent une homotopie qui est définie sur la base de $F_k(C)_n$:

$$h_{n+1}(a_{i_1} \dots a_{i_k} \otimes a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_k < j_n \text{ ou si } i_k = j_n \text{ et } a_{i_k} \text{ est pair} \\ \frac{1}{\#\{\ell, j_\ell = j_n\}} a_{i_1} \dots a_{i_{k-1}} & \\ \otimes a_{i_k} \wedge a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que h_n passe au quotient, il est défini sur W_k^n et pour tout k et tout n ,

$$h_n \circ d_n + d_{n+1} \circ h_{n+1} = id_{W_k^n}$$

Maintenant on a un diagramme commutatif pour tout p :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathbb{R} & \longleftarrow & W_p^0 & \longleftarrow & W_p^1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & W_p^q & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & W_p^p & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & \pi_0 \uparrow & & \pi_1 \uparrow & & & & \pi_q \uparrow & & & & \pi_p \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{R} & \longleftarrow & (F_p C)_0 & \longleftarrow & (F_p C)_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (F_p C)_q & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (F_p C)_p & \longleftarrow & 0 \\ & & \parallel & & j_0 \uparrow & & j_1 \uparrow & & & & j_q \uparrow & & & & j_p \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{R} & \longleftarrow & (F_{p-1} C)_0 & \longleftarrow & (F_{p-1} C)_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (F_{p-1} C)_q & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & (F_{p-1} C)_p & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

ici, j_q est l'injection canonique et π_q est la projection canonique.

On vérifie directement que ces diagrammes commutent et on vient de voir que la première ligne est exacte.

On en déduit de façon classique une suite longue en homologie $\forall p \geq 1$:
 $\dots \rightarrow H((F_{p-1}C)_q) \rightarrow H((F_pC)_q) \rightarrow H(W_p^q) = 0 \rightarrow H((F_{p-1}C)_{q+1}) \rightarrow \dots$
 Alors, $\forall p \geq 1$ et $\forall q$, $H((F_{p-1}C)_q) = H((F_pC)_q)$.

De plus, on a $(F_0C)_0 = \mathbb{R}$ et $(F_0C)_{-1} = \mathbb{R}$. Donc, on obtient $H((F_0C)_q) = 0$ pour tout q , puis on en déduit que $\forall p$ et $\forall q$, $H((F_pC)_q) = 0$.

PROPOSITION 5.1 (La résolution de Koszul est une résolution). — *Le complexe de Koszul du \mathfrak{g} module trivial \mathbb{R} est une résolution.*

Soit M un \mathfrak{g} module à gauche, on le considère comme un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module à gauche. Alors, après décalage, on a les identifications d'espaces vectoriels :

$$M \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} C_n \simeq M[1] \otimes S^n(\mathfrak{g}[1]) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(C_n, M) \simeq L(S^n(\mathfrak{g}[1]), M[1]).$$

L'homologie et la cohomologie de Chevalley du module M , définies dans la section précédente sont donc obtenues comme des complexes dérivés de la résolution de Koszul.

6. G_∞ -algèbres

Considérons maintenant une algèbre de Gerstenhaber G . G est un espace vectoriel gradué, muni d'une multiplication associative et commutative, de degré 0, notée $(a, b) \mapsto ab$ et d'un crochet noté $(a, b) \mapsto [a, b]$, de degré -1 tel que $(G[1], [,]) est une algèbre de Lie graduée. De plus l'application $ad_a : b \mapsto [a, b]$ est une dérivation de degré $|a| - 1$ pour la multiplication (relation de Leibniz).$

La définition de l'algèbre G_∞ comme ci-dessus, demande la construction d'une codérivation, combinaison du produit et du crochet, telle que la relation de structure, c'est à dire l'associativité du produit, la relation de Jacobi pour le crochet et la relation de Leibniz sont équivalentes à l'annulation du carré de cette codérivation. La première difficulté est le fait que le produit et le crochet ne sont pas de même degré et qu'ils dépendent du même nombre d'arguments. Si on remplace G par $G[k]$, le produit et le crochet restent de degrés différents. La seconde difficulté vient des relations de symétries différentes pour chaque loi.

La solution proposée par Ginot [G] consiste à remplacer le produit par la codérivation m comme pour les algèbres commutatives, à prolonger le crochet en un crochet sur la C_∞ -algèbre de G . Dès lors cette algèbre possèdera deux opérations, l'une ayant un seul argument (m) de degré 1 l'autre étant un crochet de degré 0 entre deux arguments. Un nouveau décalage et la construction d'une L_∞ -algèbre de $C_\infty(G)$ permet de se retrouver avec deux codérivations de degré 1 que l'on peut additionner et ainsi de décrire la structure comme l'annulation d'un carré.

Si on ne regarde que les symétries des relations, on trouve :

$$\begin{aligned}
 Com(a_1 \otimes a_2) &= a_1 a_2 - (-1)^{|a_1||a_2|} a_2 a_1 = 0, \\
 Ass(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= a_1(a_2 a_3) - (a_1 a_2) a_3 = 0, \\
 Antisym(a_1 \otimes a_2) &= [a_1, a_2] + (-1)^{\deg(a_1) \deg(a_2)} [a_2, a_1], \\
 Jac(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= \oint_{1,2,3} (-1)^{\deg(a_1) \deg(a_3)} [[a_1, a_2], a_3] = 0 \\
 Leibn(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= [a_1, a_2 a_3] - [a_1, a_2] a_3 - (-1)^{|a_2| \deg(a_1)} a_2 [a_1, a_3].
 \end{aligned}$$

(\oint_{123} signifie somme sur les permutations circulaires sur 1,2,3). De ces relations, on peut construire une relation qui ne vérifie pas la règle des signes de Koszul :

$$[a_1 a_2, a_3] = a_1 [a_2, a_3] + (-1)^{|a_2| \deg(a_3)} [a_1, a_3] a_2.$$

On va donc traiter en deux étapes la construction de la cogèbre qu'on utilisera. D'abord, on construit la cogèbre de Lie

$$(\mathcal{H}, \delta) = (\oplus_{n \geq 1} \underline{\otimes^n G[1]}, \delta),$$

cette cogèbre est définie dans la section 4.

Ensuite on étend le cocrochet δ en un cocrochet κ de $\mathcal{H}[\infty]$ en posant, pour $X = \underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_p}$,

$$\begin{aligned}
 \kappa(X) &= \sum_{j=1}^{p-1} \left((-1)^{\sum_{k \leq j} \deg(a_k)} \underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_j} \otimes \underline{a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_p} \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon_{\deg(a)} \binom{1, \dots, p}{j+1, \dots, p, 1, \dots, j} (-1)^{\sum_{k > j} \deg(a_k)} \underline{a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_p} \otimes \underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_j} \right).
 \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit de façon condensée ainsi : posons $U_j = \underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_j}$, $V_j = \underline{a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_p}$, ce sont des éléments de $\mathcal{H}[1]$ de degrés $\deg(U_j) = \sum_{k \leq j} \deg(a_k) - 1$ et $\deg(V_j) = \sum_{k > j} \deg(a_k) - 1$. Alors :

$$\kappa(X) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\deg(U_j)+1} \left(U_j \otimes V_j + \tau(U_j \otimes V_j) \right).$$

Le cocrochet κ sur $(\underline{\otimes^p G[1]})[1]$ est alors cosyométrique ($\kappa = \tau \circ \kappa$) et de degré 1.

Comme dans la section 5, on considère la cogèbre $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta) = (\oplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[1]), \Delta)$, qui traduira les symétries des relations *Jac* et *Antisym*.

On prolonge alors κ à $S^+(\mathcal{H}[1])$ en posant :

$$\begin{aligned} \kappa(X_1 \dots X_n) = & \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i < s} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq 0}} (-1)^{\deg(U_s)+1} \times \\ & \times \left(\varepsilon_{(x_I \ u_s \ v_s \ x_J)}^{(x_1, \dots, x_n)} X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + \varepsilon_{(x_I \ v_s \ u_s \ x_J)}^{(x_1, \dots, x_n)} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right). \end{aligned}$$

Les notations sont celles de [AAC2] : $x_j = \deg(X_j)$, $X_j \in \mathcal{H}[\infty]$, $x_I = (\deg(x_k), k \in I)$, $u_s = \deg(U_s)$, $v_s = \deg(V_s)$ et $\varepsilon_{(x_I \ u_s \ v_s \ x_J)}^{(x_1, \dots, x_n)}$ représente le signe de la permutation $(1, \dots, n) \mapsto I \cup \{s\} \cup J$, en tenant compte des degrés, $\varepsilon_{(x_I \ v_s \ u_s \ x_J)}^{(x_1, \dots, x_n)}$ est $(-1)^{\deg(U_s) \deg(V_s)} \times$ ce signe. On rappelle que $\deg(X_s) = \deg(U_s) + \deg(V_s) + 1$.

Rappelons que Δ est cocommutative et coassociative, de degré 0 :

(i) $\tau \circ \Delta = \Delta$ (cocommutativité),

(ii) $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$ (coassociativité),

en posant $\tau_{12} = \tau \otimes id$ et $\tau_{23} = id \otimes \tau$, κ est de degré 1, cocommutatif et vérifie les identités de coJacobi et de coLeibniz suivantes :

(iii) $\tau \circ \kappa = \kappa$ (cocommutativité),

(iv) $(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa = 0$ (identité de coJacobi),

(v) $(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta$ (identité de coLeibniz).

(Voir [BGHHW] et [AAC2]).

L'espace $S^+(\mathcal{H}[1])$ est maintenant une bicogèbre $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa, \Delta)$. Cette structure est libre dans le sens que tout morphisme F ou toute codérivation D peut être reconstruite à partir de leur série de Taylor :

$$\begin{aligned} F_{p_1, \dots, p_r} : & (\otimes^{p_1} G[1])[1] \cdot (\otimes^{p_2} G[1])[1] \cdot \dots \cdot (\otimes^{p_r} G[1])[1] \longrightarrow (G'[1])[1] \\ D_{p_1, \dots, p_r} : & (\underline{\otimes}^{p_1} G[1])[1] \cdot (\underline{\otimes}^{p_2} G[1])[1] \cdot \dots \cdot (\underline{\otimes}^{p_r} G[1])[1] \longrightarrow (G[1])[1] \end{aligned}$$

Comme on a vu comment construire des homomorphismes ou des codérivations de $S^+\mathcal{H}[\infty]$ à partir de leur série de Taylor, pour reconstruire F et D à partir des $F_{p_1, \dots, p_r}^{(\sum p_k)}$ ou des $D_{p_1, \dots, p_r}^{(\sum p_k)}$, il nous suffit de définir les applications :

$$F_n : \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[1]) \longrightarrow \mathcal{H}'[1] \quad \text{et} \quad D_n : \oplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[1]) \longrightarrow \mathcal{H}[1].$$

Soit donc $X_1 \dots X_n$ un élément de $(\underline{\otimes}^{p_1} G[1])[1] \cdot (\underline{\otimes}^{p_2} G[1])[1] \cdot \dots \cdot (\underline{\otimes}^{p_r} G[1])[1]$, avec

$$X_j = \underline{a_1^j} \otimes \dots \otimes \underline{a_{p_j}^j}.$$

$F_n(X_1 \dots X_n)$ (resp. $D_n(X_1 \dots X_n)$) est une somme de produits tensoriels modulo les battements de $F_{q_1, \dots, q_s}(Y_k)$ ($1 \leq k \leq t$) (resp. de $D_{q_1, \dots, q_s}(Y_k)$ et de Y_k) où les Y_k sont des produit . de parties U_i^j des X_j de la forme :

$$U_i^j = \underline{a_{r_i^j+1}^j} \otimes \underline{a_{r_i^j+2}^j} \otimes \dots \otimes \underline{a_{r_i^j}^j} \quad (0 \leq r_i^j \leq p_j).$$

On considère toutes les décompositions possibles des X_j en produit $\underline{\otimes}$ de U_i^j , on permute les U_i^j , on note V_k^ℓ les U_i^j après cette permutation, on pose $Y_k = V_1^k \dots V_{s_k}^k$. On note

$$V_\ell^k \in (\underline{\otimes}^{q_\ell^k} G[1])[1].$$

Les V_ℓ^k forment une permutation des U_i^j . Si un X_j n'est pas décomposé ($r_i^j = 1$), il ne peut apparaître qu'en facteur d'au moins une vraie partie $U_i^{j'}$ d'un autre X ($r_{j'}^j > 1$). Si un X_j est décomposé ($r_i^j > 1$) chacune de ses parties apparaît dans un Y différent enfin il y a autant de . et de $\underline{\otimes}$ dans l'expression

$$X_1 \dots X_n = \left(U_1^1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} U_{r_1^1}^1 \right) \dots \left(U_1^n \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} U_{r_n^n}^n \right)$$

que dans l'expression (formelle) :

$$Y_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} Y_t = (V_1^1 \dots V_{s_1}^1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} (V_1^t \dots V_{s_t}^t).$$

(Voir [AAC2]).

F_n envoie le produit $X_1 \dots X_n$ sur des sommes de termes de la forme

$$\begin{aligned} F_n(X_1 \dots X_n) &= \sum_{U, V} \pm F_{q_1^1, \dots, q_{s_1}^1}(Y_1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{q_1^t, \dots, q_{s_t}^t}(Y_t) \\ &= \sum_{U, V} \pm F_{q_1^1, \dots, q_{s_1}^1}(V_1^1 \dots V_{s_1}^1) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{q_1^t, \dots, q_{s_t}^t}(V_1^t \dots V_{s_t}^t). \end{aligned}$$

De même D_n envoie $X_1 \dots X_n$ sur des sommes de termes de la forme

$$\begin{aligned} D_n(X_1 \dots X_n) &= \sum_{U, V} \pm Y_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} D_{q_1^k, \dots, q_{s_k}^k}(Y_k) \underline{\otimes} \dots \dots Y_t \\ &= \sum_{U, V} \pm Y_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} D_{q_1^k, \dots, q_{s_k}^k}(V_1^k \dots V_{s_k}^k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} Y_t. \end{aligned}$$

On va expliciter cette construction pour les lois de G , que l'on étend à la bicogèbre $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa, \Delta)$.

PROPOSITION 6.1 (Construction de m et ℓ). — Soit $(G, \cdot, [\ , \])$ une algèbre de Gerstenhaber. Le produit commutatif s'étend à $\bigoplus_{n \geq 1} \underline{\otimes}^n G[1]$ comme ci-dessus par :

$$\begin{aligned} m(\underline{a_1 \otimes a_2}) &= (-1)^{\deg(a_1)} a_1 a_2 \\ m(\underline{a_0 \otimes \dots \otimes a_n}) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\sum_{i < j} \deg(a_i)} \underline{a_1 \otimes \dots \otimes m(a_j \otimes a_{j+1}) \otimes \dots \otimes a_n} \\ &\hspace{20em} (a_i^j \in G[1]) \\ m(X_1 \dots X_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{k < j} \deg(X_k)} X_1 \dots m(X_j) \dots X_n \quad (X_k \in \mathcal{H}[\infty]). \end{aligned}$$

Ainsi défini, m est une codérivation de κ et de Δ .

Le crochet de Lie s'étend d'abord en un crochet sur \mathcal{H} , ainsi :

$$\begin{aligned} \left[\underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_p} \wedge \underline{a_{p+1} \otimes \dots \otimes a_{p+q}} \right] = \\ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_{\deg(a)}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [a_{\sigma^{-1}(k)}, a_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} a_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Enfin on étend ce crochet à $S^+(\mathcal{H}[\infty])$ comme ci-dessus par :

$$\begin{aligned} \ell(X_1 \cdot X_2) &= (-1)^{\deg(X_1)} [X_1 \wedge X_2] \\ \ell(X_1 \dots X_n) &= \sum_{i < j} \varepsilon_{\deg(X)} \binom{1 \ \dots \ \dots \ n}{i, j, 1, \dots, \hat{i} \hat{j}, \dots, n} \ell(X_i \cdot X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_n. \end{aligned}$$

Ainsi défini, ℓ est une codérivation de κ et de Δ .

La structure d'algèbre de Gerstenhaber, c'est-à-dire l'associativité du produit, la relation de Jacobi pour le crochet et la relation de compatibilité de Leibniz, est équivalente à

$$(m + \ell) \circ (m + \ell) = 0.$$

On a donc les propriétés suivantes : m est de degré 1 et :

- (i) $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \kappa = -\kappa \circ m$ (κ -codérivation graduée)
- (ii) $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \Delta = \Delta \circ m$ (Δ -codérivation)
- (iii) $m \circ m = 0$ (associativité)

ℓ est de degré 1 et :

(iv) $(\ell \otimes id + id \otimes \ell) \circ \kappa = -\kappa \circ \ell$ (κ -codérivation graduée)

(v) $(\ell \otimes id + id \otimes \ell) \circ \Delta = \Delta \circ \ell$ (Δ -codérivation)

(vi) $\ell \circ \ell = 0$ (relation de Jacobi)

Enfin :

(vii) $\ell \circ m + m \circ \ell = 0$ (relation de Leibniz).

On pose donc :

DÉFINITION 6.2 (G_∞ -algèbre). — Soit $(G, \cdot, [\ , \], \kappa, \Delta)$ une algèbre de Gerstenhaber graduée. On appelle G_∞ -algèbre de G la bicogèbre de Lie et coassociative et cocommutative

$$(\oplus_{n \geq 1} S^n(\oplus_{p \geq 1} (\underline{\otimes^p G[1]}[1]), \kappa, \Delta)$$

munie de la codérivation $m + \ell$. On note cette algèbre

$$G_\infty(G) = (\oplus_{n \geq 1} S^n(\oplus_{p \geq 1} (\underline{\otimes^p G[1]}[1]), \kappa, \Delta, m + \ell).$$

La G_∞ -algèbre de G est donc un complexe d'homologie. Posons

$$C_N(G) = \sum_{r=1}^N \sum_{p_1 + \dots + p_r = N} \left(\underline{\otimes^{p_1} G[1]} [1] \right) \dots \left(\underline{\otimes^{p_r} G[1]} [1] \right),$$

le complexe est :

$$0 \xleftarrow{m+\ell} C_1(G) \xleftarrow{m+\ell} C_2(G) \xleftarrow{m+\ell} \dots \xleftarrow{m+\ell} C_{N-1}(G) \xleftarrow{m+\ell} \dots$$

DÉFINITION 6.3 (G -module). — Soit G une algèbre de Gerstenhaber. Un G -module M est un espace vectoriel gradué muni de deux lois externes :

$$\cdot : G \times M \longrightarrow M, \quad (a, m) \mapsto am,$$

telle que M devienne un bimodule symétrique pour la multiplication commutative de G ($ma = (-1)^{|a||m|}am$) et

$$\bullet : G[1] \times M[1] \longrightarrow M[1], \quad (a, m) \mapsto a \bullet m,$$

telle que M soit un module pour la structure d'algèbre de Lie de G . De plus les lois \cdot et \bullet sont compatibles entre elles, c'est-à-dire satisfont, pour tout a_1, a_2 de G et m de M ,

$$[a_1, a_2]m = a_1 \bullet (a_2 m) - (-1)^{|a_2| \deg(a_1)} a_2 (a_1 \bullet m)$$

et

$$(a_1 a_2) \bullet m = a_1 (a_2 \bullet m) + (-1)^{|m||a_2|} a_2 (a_1 \bullet m).$$

Soit G une algèbre de Gerstenhaber et M un G -module. Imitant les constructions des sections précédentes, on peut définir une nouvelle algèbre de Gerstenhaber, notée $G \times M$ en posant $G \times M = G \oplus M$ en tant qu'espace vectoriel et :

$$(a+u) \cdot (b+v) = ab+av+ub \text{ et } [a+u, b+v] = [a, b] + a \bullet v - (-1)^{\deg(b)\deg(u)} b \bullet u.$$

M est un G -module si et seulement si $G \times M$ est une algèbre de Gerstenhaber.

Pour définir l'homologie du G -module M , on construit la Bar résolution G_∞ de $G \times M$:

$$0 \xleftarrow{m+\ell} C_1(G \times M) \xleftarrow{m+\ell} C_2(G \times M) \xleftarrow{m+\ell} \dots \xleftarrow{m+\ell} C_{N-1}(G \times M) \xleftarrow{m+\ell} \dots$$

et on se restreint aux sous-espaces :

$$C_N(G, M) = \sum_{r=1}^N \sum_{p_1+\dots+p_r+p=N} \sum_{k=0}^p \left(\underline{\otimes^{p_1} G[1]} [1] \cdot \dots \cdot \underline{\otimes^{p_r} G[1]} [1] \cdot \underline{\left(\otimes^k G[1] \otimes M[1] \otimes \otimes^{p-k} G[1] \right)} [1], \right.$$

de $C_N(G \times M)$. On obtient un sous-complexe qu'on appelle le complexe de l'homologie de Chevalley-Harrison du G -module M :

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0(G, M) \xleftarrow{\partial_1} C_1(G, M) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{N-1}} C_{N-1}(G, M) \xleftarrow{\partial_N} \dots$$

PROPOSITION 6.4 (Expression du bord de Chevalley-Harrison). — *Le bord de l'homologie de Chevalley-Harrison du G -module M est donné explicitement ainsi.*

Soit $Y = \underline{a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes v \otimes \dots \otimes a_p}$ ($a_1, \dots, a_p \in G$, $v \in M$). On pose $m(Y) = \partial_p(Y)$ où ∂_p est défini dans la section 3, soit $X_i = \underline{a_1^i \otimes \dots \otimes a_{p_i}^i}$ ($a_1^i, \dots, a_{p_i}^i \in G$), on pose $X_i = \underline{b_1 \otimes \dots \otimes b_{p_i}}$, $Y = \underline{b_{p_i+1} \otimes \dots \otimes b_{p_i+p+1}}$ et :

$$\ell(X_i, Y) = \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p_i, p+1) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p_i < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_{\deg(b)}(\sigma^{-1}) b_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [b_{\sigma^{-1}(k)}, b_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} b_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Enfin, pour $X_1 \dots X_r \cdot Y \in C_N(G, M)$,

$$\begin{aligned} \partial_N(X_1 \dots X_r \cdot Y) &= (\ell + m)(X_1 \dots X_r) \cdot Y + (-1)^{\sum_i \deg(X_i)} (X_1 \dots X_r) \cdot m(Y) \\ &+ \sum_i (-1)^{\sum_{j \neq i} \deg(X_j)} \varepsilon_{\deg(X)} \begin{pmatrix} 1, \dots, \dots, r \\ 1, \dots, \hat{i}, \dots, r, i \end{pmatrix} X_1 \dots \hat{i} \dots X_r \cdot \ell(X_i, Y). \end{aligned}$$

De même, la cohomologie de Chevalley-Harrison du G -module M est définie en écrivant l'équation de morphisme de G_∞ algèbre. Plus précisément, on se donne une suite d'applications $F_N : C_N(G) \longrightarrow ((G \times M)[1])[1]$ de la forme :

$$F_1 = \iota + c_1, \quad F_N = c_N,$$

où ι est l'injection canonique de G dans $G \times M$ et les c_N sont des applications linéaires de $C_N(G)$ dans M , plus précisément,

$$c_N = \sum_{r=1}^N \sum_{p_1+\dots+p_r=N} c_{p_1\dots p_r}$$

avec :

$$c_{p_1\dots p_r} : \left(\underline{\otimes^{p_1} G[1]} \right) [1] \dots \left(\underline{\otimes^{p_r} G[1]} \right) [1] \longrightarrow M[N+r].$$

On construit le morphisme F de bicogèbres dont la série de Taylor est (F_N) :

$$F : (G_\infty(G), \kappa, \Delta) \longrightarrow (G_\infty(G \times M), \kappa, \Delta),$$

enfin on écrit que F est un morphisme pour la structure $(m_G + \ell_G)$, respectivement la structure $(m_{G \times M}, \ell_{G \times M})$. On trouve des conditions sur les c_N que l'on écrit $\partial_N c_N = 0$. On obtient (voir [AAC2]) :

$$\begin{aligned} C^N(G, M) &= \sum_{r=1}^N \sum_{p_1+\dots+p_r=N} C_{p_1, \dots, p_r}^N \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_{p_1+\dots+p_r=N} L \left(\left(\underline{\otimes^{p_1} G[1]} \right) [1] \dots \left(\underline{\otimes^{p_r} G[1]} \right) [1], M[N+r] \right), \end{aligned}$$

donc le complexe :

$$0 \xrightarrow{\partial^1} C^1(G, M) \xrightarrow{\partial^2} \dots \xrightarrow{\partial^{N-1}} C^{N-1}(G, M) \xrightarrow{\partial^N} \dots$$

PROPOSITION 6.5 (Expression du cobord de Chevalley-Harrison de M). — *Le cobord $\partial_N : C^N(G, M) \longrightarrow C^{N+1}(G, M)$ est de la forme $\partial_N = d_m + d_\ell$ avec $d_m : C_{p_1\dots p_n}^N \longrightarrow \sum_j C_{p_1\dots(p_j+1)\dots p_n}^{N+1}$, plus précisément, si*

$$X_1 \dots X_n \in \left(\underline{\otimes^{p_1} G[1]} \right) [1] \dots \left(\underline{\otimes^{p_j+1} G[1]} \right) [1] \dots \left(\underline{\otimes^{p_n} G[1]} \right) [1],$$

alors

$$\begin{aligned} (d_m c_{p_1\dots p_n}^{(N)})(X_1 \dots X_n) &= (d_m c)_{p_1\dots(p_j+1)\dots p_n}^{(N+1)}(X_1 \dots X_n) \\ &= (-1)^{\deg(a_j^1)} \sum_{i < j} \deg(X_i) a_1^j \otimes c_{p_1, \dots, p_j, \dots, p_n}^{(N)}(X_1, \dots, \underline{a_2^j \otimes \dots \otimes a_{p_j+1}^j}) \dots X_n) \\ &+ (-1)^{\deg(a_j^{p_j+1})} \sum_{i > j} \deg(X_i) c_{p_1, \dots, p_j, \dots, p_n}^{(N)}(X_1, \dots, \underline{a_1^j \otimes \dots \otimes a_{p_j}^j}) \dots X_n) a_{p_j+1}^j \\ &- (-1) \sum_{i < j} \deg(X_i) c_{p_1\dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots m(X_j) \dots X_n). \end{aligned}$$

De même, $d_\ell : C_{p_1 \dots p_n}^N \longrightarrow \sum_{j, q_1+q_2=p_j+1} C_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{N+1}$ s'écrit

$$(d_\ell c_{p_1 \dots p_n}^N) = \sum_{\substack{j \\ q_1+q_2=p_j+1}} (d_\ell c)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^N.$$

Avec (les notations sont celles utilisées dans la définition de κ)

1. Si $q_1 > 1$ et $q_2 > 1$, alors

$$\begin{aligned} & (d_\ell c)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)} (Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) = \\ & -\varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i < j} \deg(X_i)} c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n). \end{aligned}$$

2. Si $q_1 = 1$ et $q_2 = p_j > 1$, alors

$$\begin{aligned} & (d_\ell c)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)} (Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) = \\ & -\varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i < j} \deg(X_i)} c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n) \\ & + \varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ y_1 x_1 \dots y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) Y_1 \cdot c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots Y_2 \dots X_n). \end{aligned}$$

3. On a la même formule par symétrie si $q_2 = 1$ et $q_1 = p_j > 1$.

4. Enfin, si $q_1 = q_2 = 1$, alors

$$\begin{aligned} & (d_\ell c)_{1, 1, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)} (Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) = \\ & \varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ y_1 x_1 \dots y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) Y_1 \cdot c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots Y_2 \dots X_n) \\ & + \varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ y_2 x_1 \dots y_1 \dots x_n \end{matrix} \right) Y_2 \cdot c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots Y_1 \dots X_n) \\ & - (-1)^{\sum_{i < j} \deg(X_i)} \varepsilon \left(\begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) c_{p_1 \dots p_n}^{(N)} (X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n). \end{aligned}$$

On a une cohomologie : $(d_\ell + d_m) \circ (d_\ell + d_m) = 0$.

Bibliographie

- [AAC1] ALOULOU (W.), ARNAL (D.), CHATBOURI (R.). — Chevalley cohomology for linear graphs, *Lett. Math. Phys.* vol 80, p. 139-154 (2007).
- [AAC2] ALOULOU (W.), ARNAL (D.), CHATBOURI (R.). — Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologies associées, *Bull. Sci. math.* 133, p. 1-50 (2009).
- [AMM] ARNAL (D.), MANCHON (D.), MASMOUDI (M.). — Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich, *Pacific J of Math*, vol 203, no 1, p. 23-66 (2002).
- [BGHHW] BORDEMANN (M.), GINOT (G.), HALBOUT (G.), HERBIG (H.C.), WALDMANN (S.). — Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous variétés coïsootropes, *math.QA/0504276 v 1* 13 Apr 2005.
- [B] BOURBAKI (N.). — Groupes et algèbres de Lie, chapitre 1, *Algèbres de Lie, Actualités scientifiques et industrielles*, 1285, Hermann, Paris (1960).
- [G] GINOT (G.). — Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber, *Ann. Math. Blaise Pascal*, vol 11, no 1, p. 95-126 (2004).
- [L] LODAY (J.L.). — *Cyclic homology*, *Grundlehren des mathematischen Wissenschaften*, 301, Springer Verlag, Heidelberg (1998).