

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

MOHAMMAD DAHER

Propriétés géométriques de $h^p(\mathbb{D}, X)$ et généralisations

Tome XX, n° 2 (2011), p. 439-463.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_2_439_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Propriétés géométriques de $h^p(\mathbb{D}, X)$ et généralisations

DAHER MOHAMMAD⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Nous montrons que $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ admet une norme équivalente *LUR*, ce qui répond négativement à une question de Dowling, Hu et Smith. Puis nous obtenons une propriété de stabilité des opérateurs de Radon-Nikodym analytique. Motivés par l'identification entre $h^p(\mathbb{D}, X)$ et $VB^p(\mathbb{T}, X)$ où X est un espace de Banach, pour un groupe abélien compact métrisable G , son dual Γ , et $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$, nous prouvons que, si l'espace $VB_{\Lambda_1}^p(G, X)/VB_{\Lambda_2}^p(G, X)$ a la propriété *Kadec-Klee* $-\beta' - \omega$, alors il coïncide avec $L_{\Lambda_1}^p(G, X)/L_{\Lambda_2}^p(G, X)$, $1 \leq p < \infty$. Enfin, nous montrons que si $L_{\Lambda_2}^1(G)/L_{\Lambda_1}^1(G)$ a la propriété *I* $-(\Lambda_1 \setminus \Lambda_2)$ $-RNP$, alors il coïncide avec $M_{\Lambda_2}^c(G)/M_{\Lambda_1}^c(G)$.

ABSTRACT. — We show that $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ admits an equivalent *LUR* norm, which gives a negative answer to a problem mentioned by Dowling, Hu and Smith. Then we get a stability property for analytic Radon-Nikodym operators. Since, for every Banach space X , $h^p(\mathbb{D}, X)$ and $VB^p(\mathbb{T}, X)$ can be identified, for a metric compact abelian group G , its dual Γ , and $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$, we show that, if the space $VB_{\Lambda_1}^p(G, X)/VB_{\Lambda_2}^p(G, X)$ has the *Kadec-Klee* $-\beta' - \omega$ property, then it coincides with $L_{\Lambda_1}^p(G, X)/L_{\Lambda_2}^p(G, X)$, $1 \leq p < \infty$. Finally we show that, if $L_{\Lambda_2}^1(G)/L_{\Lambda_1}^1(G)$ has the *I* $-(\Lambda_1 \setminus \Lambda_2)$ $-RNP$, then it coincides with $M_{\Lambda_2}^c(G)/M_{\Lambda_1}^c(G)$.

(*) Reçu le 08/09/2010, accepté le 13/12/2010

⁽¹⁾ Département de mathématiques, Université de Paris VII
m.daher@orange.fr

1. Introduction

Dans la deuxième partie nous considérons le lien entre certaines propriétés de l'espace de Banach X et celles des espaces $h^p(\mathbb{D}, X)$ de fonctions harmoniques vectorielles, ou des sous espaces $H^p(\mathbb{D}, X)$ de fonctions analytiques.

D'après [DZS, theorem 3.8], si $h^2(\mathbb{D}, X)$ est localement uniformément convexe (LUR), alors X a la propriété de Radon-Nikodym. Ce n'est plus vrai si on suppose seulement que $h^2(\mathbb{D}, X)$ admet une norme équivalente LUR , ce qui répond négativement au problème posé à la fin de [DZS] : en effet nous vérifions que $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ admet une norme équivalente LUR ; or il est bien connu que $L^1(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

Nous étudions ensuite la stabilité des opérateurs de Radon-Nikodym analytique. Lorsque l'opérateur est l'identité, cela se réduit à la stabilité de la propriété de Radon-Nikodym analytique, dans le style de [RaS].

La troisième partie est consacrée aux propriétés de type Kadec-Klee. Rappelons [W] que l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{D})$ possède la propriété suivante : soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite dans la sphère unité de $H^1(\mathbb{D})$, convergeant uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{D}$ vers une fonction f de la sphère unité ; alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f en norme dans $H^1(\mathbb{D})$. [DL] et [DZS] étudient la géométrie des espaces X tels que $h^p(\mathbb{D}, X)$ vérifie la propriété dite de Kadec-Klee $\beta - \|\cdot\|$: soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite dans la sphère unité de $h^p(\mathbb{D}, X)$ telle que, pour tout compact $K \subset \mathbb{D}$, $\sup_{z \in K} \|f_n - f\|_X \rightarrow 0$, avec $\|f\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} = 1$; alors $\|f_n - f\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Cette propriété implique d'après [DL] l'identification entre $h^p(\mathbb{D}, X)$ et $L^p(\mathbb{T}, X)$, $1 < p < \infty$, c'est à dire que X a la propriété de Radon-Nikodym. Motivés par l'identification [Bl] entre $h^p(\mathbb{D}, X)$ et $VB^p(\mathbb{T}, X)$ $1 < p \leq \infty$, nous introduisons des propriétés de Kadec-Klee pour les espaces $VB^p(G, X)$ introduits dans [Din] et les quotients $W_p = VB_{\Lambda_1}^p(G, X)/VB_{\Lambda_2}^p(G, X)$. Nous montrons que, si W_p a la propriété de Kadec-Klee dite $\beta' - \omega$, alors W_p coïncide avec son sous espace $L_{\Lambda_1}^p(G, X)/L_{\Lambda_2}^p(G, X)$. Ici G est un groupe abélien compact métrisable, Γ le groupe dual et $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$.

Dans la quatrième partie, nous considérons les propriétés $I - \Lambda - RNP$ et $I - \Lambda - CCP$ d'un espace X , définies à l'aide des espaces $VB_{\Lambda}^{\infty}(G, X)$, et étudiées entre autres dans [E], [Do], [RS], [D2]. Nous les appliquons aux espaces $X = L_{\Lambda_1^c}^1(G)/L_{\Lambda_2^c}^1(G)$.

NOTATIONS. — Les espaces de Banach considérés ici sont complexes. Le dual d'un tel espace X est noté X^* . Pour un sous-espace fermé $Y \subset X$, et $x \in X$, on note $[x]$ l'image de x par l'application quotient dans X/Y . Dans

les parties 3 et 4, G désigne un groupe compact abélien métrisable. On note dt la mesure de Haar de G , en particulier la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore \mathbb{T} .

2. Stabilité des opérateurs de Radon-Nikodym analytique

Rappels sur les espaces de fonctions harmoniques à valeurs vectorielles

On note $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. La restriction au cercle $|z| = r$ d'une fonction $u : \mathbb{D} \rightarrow X$ est notée $u_r : \mathbb{T} \rightarrow X$.

Une fonction $u : \mathbb{D} \rightarrow X$ est *harmonique* s'il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dans X telle que

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\theta} x_k, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

cette série convergeant en norme dans X , uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . En particulier u est continue : $\mathbb{D} \rightarrow X$.

Une fonction $u : \mathbb{D} \rightarrow X$ est *holomorphe* si elle est harmonique et si $x_k = 0$ pour tout $k < 0$.

$h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 \leq p < \infty$, désigne l'espace des fonctions harmoniques $u : \mathbb{D} \rightarrow X$ telles que

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \|u(re^{it})\|_X^p dt < +\infty.$$

$h^\infty(\mathbb{D}, X)$ désigne l'espace des fonctions harmoniques $u : \mathbb{D} \rightarrow X$ telles que $\sup_{z \in \mathbb{D}} \|u(z)\|_X < \infty$.

$H^p(\mathbb{D}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, désigne le sous espace de $h^p(\mathbb{D}, X)$ formé des fonctions holomorphes.

$H^p(\mathbb{T}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, désigne le sous espace de $L^p(\mathbb{T}, X)$ des fonctions f telles que $\hat{f}(-k) = \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} f(t) dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Le *noyau de Poisson* P_z au point $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ est défini par

$$\begin{aligned} P_z(t) &= \operatorname{Re}(e^{it} + z/e^{it} - z) = 1 - r^2 / |1 - ze^{-it}|^2 \\ &= p_r(\theta - t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(\theta - t)}, t \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Rappelons *l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood* [HL, theorem 26]: Soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante C_p telle que, pour toute fonction v sous harmonique continue : $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant $\sup_{r < 1} \|v_r\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty$, on a

$$\left\| \sup_r v_r \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \sup_r \|v_r\|_{L^p(\mathbb{T})}. \quad (2.1)$$

Les faits suivants sont montrés dans le cas scalaire dans [HL], voir aussi [Ru, chapter 11,17] ; les preuves sont analogues dans le cas vectoriel.

a) Soit $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors

(i) $f * p_r \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} f$ en norme $L^p(\mathbb{T}, X)$ si $p < \infty$ ou si $p = \infty$ et f continue.

(ii) si $p = 1$, la fonction maximale $\sup_r \|f\|_X * p_r$ est dans L^1 -faible [Ru, theorem 11.23].

(iii) si $1 \leq p \leq \infty$, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\|f * p_r(t) - f(t)\|_X \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0. \quad (2.2)$$

(Il suffit de le voir pour $p = 1$ et cela résulte alors de la densité des points de Lebesgue de $f \in L^1(\mathbb{T}, X)$, cf [Ru, theorem 7.6]).

(iv) si $1 < p < \infty$, on déduit de (2.1) les inégalités de Hardy-Littlewood

$$\left\| \sup_{r < 1} \|f * p_r\|_X \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \left\| \sup_{r < 1} \|f\|_X * p_r \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \| \|f\|_X \|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad (2.3)$$

en notant que la fonction : $z = re^{i\theta} \rightarrow \|f\|_X * p_r(\theta)$ est sous harmonique.

Si $p = \infty$ la deuxième inégalité est clairement vraie avec constante 1.

(v) $L^p(\mathbb{T}, X)$ s'identifie isométriquement à un sous-espace fermé de $h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, via l'application $f \rightarrow u = (P \otimes I_X)f$ où

$$(P \otimes I_X)(f)(z) = \int_0^{2\pi} f(t) P_z(t) \frac{dt}{2\pi} = f * p_r(\theta), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

(On utilise (i)).

Rappelons que P est un isomorphisme isométrique : $L^p(\mathbb{T}) \rightarrow h^p(\mathbb{D})$, $1 < p \leq \infty$, et $H^p(\mathbb{T}) \rightarrow H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$, [Ru, theorem 11.30].

b) Si $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fonction $z \rightarrow \|u(z)\|_X$ est sous harmonique continue sur \mathbb{D} . En particulier

– la fonction $r \rightarrow \|u_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X)}$ est croissante, donc $\|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} = \lim_{r \rightarrow 1} \|u_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X)}$.

– si $1 < p \leq \infty$, on a l'inégalité de Hardy-Littlewood

$$\left\| \sup_{r < 1} \|u_r\|_X \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)}. \quad (2.4)$$

qui résulte de (2.1) si $p < \infty$, et de la définition si $p = \infty$ (avec $C_\infty = 1$).

c) Si $1 < p \leq \infty$, l'image de $L^p(\mathbb{T}, X)$ par $P \otimes I_X$ coïncide avec le sous espace $F \subset h^p(\mathbb{D}, X)$ formé des fonctions u telles que, pour presque tout t , $(u_r(t))_r$ converge en norme dans X vers une limite $f(t)$ lorsque $r \rightarrow 1^-$.

En effet, $P \otimes I_X$ envoie $L^p(\mathbb{T}, X)$ dans F d'après a) (v) et (iii), $1 \leq p \leq \infty$. Réciproquement, soit $u \in F$, associée à f . Alors f est fortement mesurable à valeurs dans X et f est dans $L^p(\mathbb{T}, X)$ par (2.4), $1 < p \leq \infty$. A nouveau par (2.4) et le théorème de convergence dominée, $\|f - u_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X)} \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 0$ si $1 < p < \infty$, tandis que $f - u_r \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 0$ pour la topologie de la convergence forte d'opérateur : $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow X$ si $p = \infty$. Par l'argument classique de semi-groupe [Ru, theorem 11.30], on a $u = (P \otimes I_X)f$. En effet, pour tout $r < 1$, $\|f * p_r - u_\rho * p_r\|_{L^p(\mathbb{T}, X)} \rightarrow_{\rho \rightarrow 1^-} 0$ si $1 < p < \infty$, tandis que $f * p_r - u_\rho * p_r \rightarrow_{\rho \rightarrow 1^-} 0$ pour la topologie de la convergence forte d'opérateur. D'autre part $u_\rho * p_r = u_{\rho r}$, et $\|u_{\rho r} - u_r\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T}, X)} \rightarrow_{\rho \rightarrow 1^-} 0$, donc, pour tout $r < 1$, $u_r = f * p_r$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, X)$.

d) Pour un espace de Banach Y , notons $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions préfaiblement mesurables $f : \mathbb{T} \rightarrow Y^*$ telles que $\|f\|_{Y^*}$ est mesurable et appartient à $L^p(\mathbb{T})$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$ est isomé triquement un sous espace fermé de $L^q(\mathbb{T}, Y)^*$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$, $L^q(\mathbb{T}, Y)$ est remplacé par l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}, Y)$).

Les applications $f \rightarrow f * p_r$ sont définies par dualité et $f * p_r \rightarrow f$ préfaiblement dans $L^q(\mathbb{T}, Y)^*$. Donc

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{T}, Y)^*} = \sup_r \|f * p_r\|_{L^q(\mathbb{T}, Y)^*}. \quad (2.5)$$

Pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$ on définit

$$[(P \otimes I_{Y^*})(f)](r.) = f * p_r, \quad r < 1.$$

L'application $P \otimes I_{Y^*}$ est une isométrie : $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*) \rightarrow h^p(\mathbb{D}, Y^*)$, $1 \leq p \leq \infty$, en particulier la deuxième inégalité de (2.3) reste vraie si $1 < p \leq \infty$.

En effet, pour tout $y \in Y$, on a $P \langle f, y \rangle \in h^p(\mathbb{D})$, donc

$$(P \langle f, y \rangle)(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\theta} a_k(y)$$

où les fonctions a_k sont des formes linéaires sur Y .. Comme

$$\|a_k\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|_Y=1} \left| \langle f, y \rangle * p_r(k) \right| \leq \|f\|_{Y^*} \|p_r\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

la fonction $u(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\theta} a_k$ est dans $\mathcal{C}(\mathbb{D}, Y^*)$ et coïncide avec $(P \otimes I_{Y^*})f$. Par (2.5) $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)} = \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, Y^*)}$.

e) Si Y est séparable, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$, $1 < p \leq \infty$, est le dual de l'espace séparable $L^q(\mathbb{T}, Y)$ [Die] et, pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$, la mesurabilité de $\|f\|_{Y^*}$ est automatique. Alors $P \otimes I_{Y^*}$ est surjective et permet d'identifier isométriquement $h^p(\mathbb{D}, Y^*)$ à $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$.

En effet, si $u \in h^p(\mathbb{D}, Y^*)$ et si f est une valeur d'adhérence préfaible de $(u_r)_{r < 1}$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$ on voit comme en c) que $u = (P \otimes I_{Y^*})f$, puisque $u_\rho * p_r \rightarrow_{\rho \rightarrow 1^-} f * p_r$ préfaiblement dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$.

On verra au lemme 2.10 que la même conclusion découle d'une hypothèse plus faible sur Y .

f) On a l'identification

$$h^p(\mathbb{D}, X) = (P \otimes I_X)L^p(\mathbb{T}, X)$$

pour un $p \in]1, +\infty]$ si et seulement si on l'a pour tout $p \in]1, +\infty]$ et cela est vérifié si et seulement si X a la propriété de Radon-Nikodym.

En effet, d'après c) l'identification pour un $p \in]1, +\infty]$ implique l'identification analogue pour tout $q \in]p, +\infty]$. Si elle a lieu pour $p = \infty$, alors X a la propriété de Radon-Nikodym [Bl, theorem 2.2] définie dans [DU, définition 3 p. 61, theorem 5 p. 63]. Réciproquement, si X a cette propriété, l'identification est vraie pour tout $p \in]1, +\infty]$ [BD, theorem 2, proposition 3].

De même, suivant la définition de [BD], X a la propriété de Radon-Nikodym analytique (cf définition 2.5 ci-dessous) si pour un (tout) $p \in [1, +\infty)$

$$H^p(\mathbb{D}, X) = (P \otimes I_X)H^p(\mathbb{T}, X).$$

Rappelons qu'un treillis de Banach a la propriété de Radon-Nikodym analytique si et seulement s'il ne contient pas c_0 isomorphiquement [BD, theorem 1].

DÉFINITION 2.1. — *Un opérateur borné $V : X \rightarrow Y$ est (resp. faiblement) localement uniformément convexe, ce qu'on note LUR (resp. $\omega - LUR$), si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans X telle que*

$$\|x_n\|^2/2 + \|x\|^2/2 - \|(x_n + x)/2\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

alors $Vx_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} Vx$ dans Y (resp. faiblement). Un espace X est LUR (resp. $\omega - LUR$) si l'identité de X est LUR (resp. $\omega - LUR$).

Par un raisonnement analogue à celui de [DGZ, proposition 1.2, p 42], on peut se limiter aux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ dans la sphère unité de X telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| = 2$, et $\|x\| = 1$.

Rappelons [DGL, corollary 1.3] qu'un treillis de Banach qui ne contient pas c_0 isomorphiquement admet une norme équivalente LUR.

PROPOSITION 2.2. — *L'espace $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ admet une norme équivalente LUR.*

Démonstration. — Il suffit de plonger isomorphiquement $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ dans un treillis \mathcal{T} qui ne contient pas c_0 isomorphiquement. Par [LT, theorem 1.c.4], il suffit de voir que toute suite croissante bornée en norme dans \mathcal{T} converge en norme.

Or $h^2(\mathbb{D}, L^1(\mathbb{T}))$ est un sous espace de $h^2(\mathbb{D}, M(\mathbb{T}))$, qui s'identifie par e) au treillis $\mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, M(\mathbb{T}))$, dual du treillis séparable $L^2(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}))$. Il est facile de voir que toute suite croissante bornée en norme dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, M(\mathbb{T}))$ converge en norme. \square

On peut aussi conclure en invoquant le théorème 2.11 ci-dessous : comme $M(\mathbb{T})$ a les propriétés de Radon-Nikodym analytique et de Radon-Nikodym préfaible, $h^2(\mathbb{D}, M(\mathbb{T}))$ a la propriété de Radon-Nikodym analytique, donc ne peut contenir c_0 isomorphiquement.

L'espace $L^1(\mathbb{T})$ n'ayant pas la propriété de Radon-Nikodym, la proposition 2.2 répond négativement au problème de [DZS, p 282]. Comme $L^1(\mathbb{T})$ a la propriété de Radon-Nikodym analytique, nous posons le problème suivant :

PROBLÈME 2.3. — *Si $H^p(\mathbb{D}, X)$, $p \geq 1$, admet une norme équivalente LUR, X a-t-il la propriété de Radon-Nikodym analytique ?*

Remarque 2.4. — Si X est un treillis de Banach la réponse est positive.

En effet, il suffit de montrer que X ne contient pas c_0 isomorphiquement. Si au contraire X contient c_0 , $H^p(\mathbb{D}, c_0)$ est isomorphe à un sous-espace fermé de $H^p(\mathbb{D}, X)$. Comme ℓ^∞ n'admet aucune norme équivalente LUR [DGZ, corollary 7.13], il suffit de montrer que $H^p(\mathbb{D}, c_0)$ contient ℓ^∞ isomorphiquement. Or l'opérateur $U : \ell^\infty \rightarrow H^p(\mathbb{D}, c_0)$, défini par

$$U((x_n)_{n \geq 0})(z) = (z^n x_n)_{n \geq 0}, \quad z \in \mathbb{D},$$

est isométrique. \square

Soit $V : X \rightarrow Y$ un opérateur borné. On note $I \otimes V : h^p(\mathbb{D}, X) \rightarrow h^p(\mathbb{D}, Y)$ l'opérateur défini par $(I \otimes V)(f)(z) = V(f(z))$, $z \in \mathbb{D}$.

DÉFINITION 2.5. — *Un opérateur borné $V : X \rightarrow Y$ est un opérateur de Radon-Nikodym (resp. de Radon-Nikodym analytique) si, pour toute $u \in h^2(\mathbb{D}, X)$ (resp. $u \in H^2(\mathbb{D}, X)$), $(I \otimes V)(u)$ admet presque partout sur \mathbb{T} une limite radiale (en norme) dans Y .*

L'espace X a la propriété de Radon-Nikodym analytique si l'identité de X vérifie la deuxième propriété ...

Notons que, d'après le rappel f), l'espace X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si l'identité de X vérifie la première propriété.

Remarque 2.6. — Comme $I \otimes V$ envoie $h^2(\mathbb{D}, X)$ dans $h^2(\mathbb{D}, Y)$, V est, d'après le rappel c), un opérateur de Radon-Nikodym si et seulement si

$$(I \otimes V)h^2(\mathbb{D}, Y) = (P \otimes I_Y)L^2(\mathbb{T}, Y).$$

De même V est un opérateur de Radon-Nikodym analytique dès que

$$(I \otimes V)H^2(\mathbb{D}, Y) = (P \otimes I_Y)H^2(\mathbb{T}, Y).$$

En particulier, si $T : Z \rightarrow X$ est borné, $V \circ T$ est un opérateur de Radon-Nikodym (analytique) dès que V l'est.

Comme dans le rappel f), on obtient une définition équivalente en remplaçant $p = 2$ par $1 < p \leq \infty$ dans le premier cas, par $1 \leq p \leq \infty$ dans le deuxième.

PROPOSITION 2.7. — *Soit $V : X \rightarrow Y$ un opérateur borné. Si V^* est un opérateur ω -LUR, alors c'est un opérateur de Radon-Nikodym.*

On retrouve ainsi un résultat de [DF] : si l'espace X^* est $\omega - LUR$, il a la propriété de Radon-Nikodym.

Démonstration. — Soit $u \in h^2(\mathbb{D}, Y^*)$; par la remarque 2.6 il suffit de montrer que $(I \otimes V^*)u = (P \otimes I_{X^*})(I \otimes V^*)f$ où $f \in L^2(\mathbb{T}, Y^*)$.

Soit une suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ dans $]0, 1[$ telle que $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On note

$$u_n(z) = u_{\rho_n}(z) = u(\rho_n z) = u_r * p_{\rho_n}(e^{i\theta}), z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, n \geq 1.$$

Il est clair que

$$\overline{\lim}_n \left\| \frac{u_n + u}{2} \right\|_{h^2(D, Y^*)} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{h^2(D, Y^*)} + \frac{1}{2} \sup_n \|u_n\|_{h^2(D, Y^*)} = \|u\|_{h^2(D, Y^*)}.$$

D'autre part, comme $u \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, Y^*)$, $\|u_n - u\|_{Y^*} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ uniformément sur les cercles $|z| = r$. Le lemme de Fatou implique alors

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_n \|(u_n + u)/2\|_{h^2(D, Y^*)}^2 &= \underline{\lim}_n \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \|[u_n(re^{it}) + u(re^{it})]/2\|_{Y^*}^2 dt \\ &\geq \sup_{0 < r < 1} \underline{\lim}_n \int_{\mathbb{T}} \|[u_n(re^{it}) + u(re^{it})]/2\|_{Y^*}^2 dt \\ &\geq \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \underline{\lim}_n \|[u_n(re^{it}) + u(re^{it})]/2\|_{Y^*}^2 dt \\ &= \|u\|_{h^2(D, Y^*)}^2. \end{aligned}$$

Cela entraîne

$$\|(u_n + u)/2\|_{h^2(D, Y^*)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|u\|_{h^2(D, Y^*)}^2,$$

ou encore, comme $\|u\|_{h^2(D, Y^*)} = \lim_n \|u_n\|_{h^2(D, Y^*)}$,

$$\frac{1}{2} \|u_n\|_{h^2(D, Y^*)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{h^2(D, Y^*)}^2 - \left\| \frac{u_n + u}{2} \right\|_{h^2(D, Y^*)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.6)$$

Supposons maintenant Y séparable. Par le rappel e) on a $u = (P \otimes I_{Y^*})f$ où $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, Y^*)$. Alors $u_n(z) = ((P \otimes I_{Y^*})f_n)(z)$ où $f_n(t) = f * p_{\rho_n}(t) = u_{\rho_n}(t)$. Par 2.6 et le rappel d)

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} \|f_n(t)\|_{Y^*}^2 + \frac{1}{2} \|f(t)\|_{Y^*}^2 - \left\| \frac{f_n(t) + f(t)}{2} \right\|_{Y^*}^2 \right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

L'expression à intégrer est positive car dans tout Banach $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$; il existe donc une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2} \|f_{n_k}(t)\|_{Y^*}^2 + \frac{1}{2} \|f(t)\|_{Y^*}^2 - \|(f_{n_k}(t) + f(t))/2\|_{Y^*}^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme V^* est $\omega - LUR$, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, $V^*(f_{n_k}(t)) \rightarrow V^*(f(t))$ faiblement dans X^* . Les fonctions $(I \otimes V^*)f_{n_k} = (I \otimes V^*)u_{\rho_{n_k}} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, X^*)$ prennent leurs valeurs dans un sous espace séparable $E \subset X^*$. Pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, $V^*(f(t))$ est aussi dans E . Comme $(I \otimes V^*)f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, X^*)$, $(I \otimes V^*)f$ est fortement mesurable à valeurs dans X^* [DU, Corollary 4, ch. II] et finalement $(I \otimes V^*)f$ est dans $L^2(\mathbb{T}, X^*)$. Or

$$(I \otimes V^*)u = (I \otimes V^*)(P \otimes I_{Y^*})f = (P \otimes I_{X^*})(I \otimes V^*)f.$$

Dans le cas général, comme $u \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, Y^*)$, $u(\mathbb{D})$ est séparable, ainsi que $V^*(u(\mathbb{D})) \subset X^*$. Il existe un sous-espace fermé séparable $X_1 \subset X$, normant pour $V^*(u(\mathbb{D}))$; donc $V^*(u(\mathbb{D}))$ se plonge isométriquement dans X_1^* . Soient Y_1 la fermeture de $V(X_1)$ dans Y et V_1 la restriction de $V : X_1 \rightarrow Y_1$. V_1^* est encore un opérateur $\omega - LUR$, et $u \in h^2(\mathbb{D}, Y_1^*)$ isométriquement. \square

Rappelons qu'un Banach Z est W.C.G si et seulement s'il existe un espace réflexif R et un opérateur borné d'image dense $T : R \rightarrow Z$ [DGZ, corollary 8.10]. Un espace dual X^* qui est WCG possède la propriété de Radon-Nikodym [DGZ, corollary 3.7]. La proposition suivante généralise cet énoncé.

PROPOSITION 2.8. — *Soit $V : X \rightarrow Y$ un opérateur borné. Supposons que la fermeture (en norme) de $V^*(Y^*)$ dans X^* est un espace W.C.G. Alors V^* est un opérateur de Radon-Nikodym.*

Démonstration. — Supposons d'abord X, Y séparables. Soit $u \in h^2(\mathbb{D}, Y^*)$. Par le rappel e) il existe $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, Y^*)$ telle que $u = (P \otimes I_{Y^*})f$, et, comme dans la preuve de la proposition 2.7, il suffit de voir que $\varphi = (I \otimes V^*)f$ est dans $L^2(\mathbb{T}, X^*)$. Par définition $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, X^*)$ prend ses valeurs dans $F = \overline{V^*(Y^*)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$.

Supposons montré que, pour tout $\xi \in F^*$, la fonction $\langle \varphi(\cdot), \xi \rangle$ est mesurable. Comme F est W.C.G, le résultat de D.R.Lewis [DU, p 88] entraîne l'existence d'une fonction $\tilde{\varphi}$ mesurable à valeurs dans F telle que, pour tout $\xi \in F^*$, en particulier tout $x \in X$, $\langle \varphi(\cdot), \xi \rangle = \langle \tilde{\varphi}(\cdot), \xi \rangle$ p.s. Comme X est séparable, $\varphi = \tilde{\varphi}$ p.s. dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, X^*)$. Donc φ est bien dans $L^2(\mathbb{T}, X^*)$.

Pour voir que φ est faiblement mesurable, posons

$$L = \{\xi \in F^*; \text{l'application } t \rightarrow (\varphi(t), \xi) \text{ est mesurable}\} \supset X.$$

Comme X est préfaiblement dense dans X^{**} , le sous espace L est préfaiblement dense dans F^* . Montrons que L est préfaiblement fermé dans F^* , ce qui impliquera $L = F^*$. D'après le théorème de Banach-Dieudonné, il suffit de montrer que la boule unité de L est préfaiblement fermé dans celle de F^* . Soient une suite généralisée $(x_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ dans la boule unité de L et x^* dans la boule unité de F^* , tels que $x_\alpha^* \rightarrow x^*$ préfaiblement dans F^* . Comme F est W.C.G, il existe un espace réflexif R et un opérateur $T : R \rightarrow F$ borné d' image dense. Donc $T^*(x_\alpha^*) \rightarrow T^*(x^*)$ faiblement dans R^* . Il existe alors une suite $(s_n^*)_{n \geq 0}$ dans l'enveloppe convexe de $(x_\alpha^*)_{\alpha \in I}$, donc dans la boule unité de L , telle que $T^*(s_n^*) \rightarrow T^*(x^*)$ fortement dans R^* . On conclut que $s_n^* \rightarrow x^*$ pour $\sigma(F^*, T(R))$, donc préfaiblement dans F^* .. Comme L est préfaiblement séquentiellement fermé dans F^* , on a bien $x^* \in L$.

Si X, Y ne sont pas séparables, on définit X_1, Y_1, V_1 comme à la fin de la preuve précédente et on note $\rho : X^* \rightarrow X_1^*$ la restriction à X_1 , $\pi : Y^* \rightarrow Y_1^*$ la restriction à Y_1 . Il est immédiat par dualité que $V_1^* \circ \pi = \rho \circ V^*$. Vérifions que $F_1 = \overline{(V_1^*)^*(Y_1^*)}^{\|\cdot\|_{X_1^*}}$ est encore W.C.G. Par hypothèse, il existe un espace réflexif R et un opérateur $T : R \rightarrow F = \overline{V^*(Y^*)}^{\|\cdot\|_{X^*}}$ borné d' image dense. Alors $\rho \circ T$ est borné $R \rightarrow X_1^*$. Vérifions que son image est dense dans F_1 : par hypothèse $\rho(F)$ est dense dans $\overline{\rho \circ T(R)}^{\|\cdot\|_{X_1^*}}$ et $\rho \circ V^*(Y^*) = V_1^* \circ \pi(Y^*)$ est dense dans $\rho(F)$, donc $F_1 = \overline{\rho \circ T(R)}^{\|\cdot\|_{X_1^*}}$. \square

Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 2.9. — *L'espace dual X^* a la propriété de Radon-Nikodym préfaible s'il existe un espace de Banach E et un opérateur borné d'image dense $V : E \rightarrow X$, tel que V^* soit un opérateur de Radon-Nikodym. Autrement dit, par la remarque 2.6, pour toute $u \in h^p(\mathbb{D}, X^*)$, $1 < p \leq \infty$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T}, E^*)$ telle que $(I \otimes V^*)u = (P \otimes I_{E^*})f$.*

Si X est un espace WCG, en particulier si X est séparable, X^* a la propriété de Radon-Nikodym préfaible : en effet on peut alors supposer E réflexif, donc E^* WCG, et appliquer la proposition 2.8.

LEMME 2.10. — *Soit X un espace de Banach tel que X^* a la propriété de Radon-Nikodym préfaible. Alors, pour $1 < p \leq \infty$, on a isométriquement*

$$h^p(\mathbb{D}, X^*) = (P \otimes I_{X^*})\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*).$$

Démonstration. — Par le rappel d) $P \otimes I_{X^*}$ est une isométrie : $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*) \rightarrow h^p(\mathbb{D}, X^*)$, $1 \leq p \leq \infty$. Il s'agit donc de voir que, pour toute $u \in h^p(\mathbb{D}, X^*)$, il existe $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*)$ telle que $u = (P \otimes I_{X^*})\varphi$.

Traitons d'abord le cas $p = \infty$. Soient E et $V : E \rightarrow X$ donnés par la propriété de Radon-Nikodym préfaible de X^* .

Soit $u \in h^\infty(\mathbb{D}, X^*)$. Comme V^* est un opérateur de Radon-Nikodym, il existe un ensemble $\Omega \subset \mathbb{T}$ de mesure 1 sur lequel $(I \otimes V^*)u$ admet des limites radiales en norme de E^* , notées $f(t)$ et $(I \otimes V^*)u = (P \otimes I_{E^*})f$. La fonction f est fortement mesurable : $\Omega \rightarrow E^*$ et, pour tout $y \in E$,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \langle u(re^{it}), Vy \rangle = \langle f(t), y \rangle = h_{Vy}(t) \leq \|u\|_{h^\infty(\mathbb{D}, X^*)} \|Vy\|_X, \quad t \in \Omega. \quad (2.7)$$

Soit $x \in X$, $\|x\|_X = 1$; comme $V(E)$ est dense dans X , il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ dans E telle que $Vy_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. D'après (2.7) la suite de fonctions mesurables $(h_{Vy_n})_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $l^\infty(\Omega)$, donc converge uniformément sur Ω vers une limite notée h_x , mesurable sur Ω , et vérifiant $\|h_x\|_{l^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{h^\infty(\mathbb{D}, X^*)} \|x\|_X$. Par définition, pour $t \in \Omega$, $x \rightarrow h_x(t)$ est dans X^* . On obtient ainsi une fonction $\varphi : \Omega \rightarrow X^*$, préfaiblement mesurable sur Ω , telle que $\langle \varphi(t), x \rangle = h_x(t)$, $t \in \Omega$, $x \in X$, donc, sur Ω , $\|\varphi(t)\|_{X^*} \leq \|u\|_{h^\infty(\mathbb{D}, X^*)}$. De plus $\langle \varphi(t), Vy \rangle = \langle f(t), y \rangle$, $t \in \Omega$, $y \in E$.

D'après le théorème d'Egoroff vectoriel [DU, p 41], la fonction f est en fait, pour tout $\varepsilon > 0$, continue sur un $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, de mesure $\geq 1 - \varepsilon$. En particulier les fonctions h_{Vy} , $y \in E$, sont continues sur Ω_ε .

Si $Vy_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, comme les h_{Vy_n} sont continues sur Ω_ε , h_x l'est aussi, c'est-à-dire φ est préfaiblement continue : $\Omega_\varepsilon \rightarrow X^*$. La fonction $\|\varphi(\cdot)\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |\langle \varphi(\cdot), x \rangle|$ est donc semi-continue inférieurement sur Ω_ε , et mesurable sur la réunion croissante des Ω_ε qui est de mesure 1. Finalement $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}, X^*)$ et $f = (I \otimes V^*)\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}, E^*) \subset L^1(\mathbb{T}, E^*)$.

Alors, pour $y \in E$, et $r < 1$,

$$\langle u_r(\cdot), Vy \rangle = \langle f * p_r(\cdot), y \rangle = \langle (I \otimes V^*)\varphi * p_r(\cdot), y \rangle = \langle \varphi * p_r, Vy \rangle,$$

d'où $u_r = \varphi * p_r$ dans $L^1(\mathbb{T}, X^*)$. On a donc bien $u = (P \otimes I_{X^*})\varphi$, d'où l'isométrie

$$h^\infty(\mathbb{D}, X^*) = (P \otimes I_{X^*})\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}, X^*). \quad (2.8)$$

Or l'espace $h^\infty(\mathbb{D}, X^*)$ est dense en norme dans $h^p(\mathbb{D}, X^*)$, $1 < p < \infty$, d'après [D₁, proposition 1] et l'identification du lemme 3.3 ci-dessous. Soient $u \in h^p(\mathbb{D}, X^*)$ et une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dans $h^\infty(\mathbb{D}, X^*)$ telle que $\|u - u_n\|_{h^p(\mathbb{D}, X^*)}$

$\rightarrow 0$. D'après (2.8) $u_n = (P \otimes I_{X^*})\psi_n$ où $\psi_n \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}, X^*)$. Par le rappel d) $\|u_n - u_m\|_{h^p(\mathbb{D}, X^*)} = \|\psi_n - \psi_m\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*)}$. Donc $(\psi_n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*)$ vers une fonction ψ et $u = (P \otimes I_{X^*})\psi$, ce qui achève la preuve. \square

THÉORÈME 2.11. — *Soient $V : X \rightarrow Y$ un opérateur borné et $1 < p < \infty$. Supposons que $V^* : Y^* \rightarrow X^*$ est un opérateur de Radon-Nikodym analytique. Alors*

a) *l'opérateur $I \otimes V^* : \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*) \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*)$ est aussi un opérateur de Radon-Nikodym analytique.*

b) *Si de plus Y^* a la propriété de Radon-Nikodym préfaible, l'opérateur $I \otimes V^* : h^p(\mathbb{D}, Y^*) \rightarrow h^p(\mathbb{D}, X^*)$, $1 < p < \infty$, est aussi un opérateur de Radon-Nikodym analytique.*

En particulier, si Y^ a la propriété de Radon-Nikodym analytique, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$ la conserve ; $h^p(\mathbb{D}, Y^*)$ la conserve si de plus Y^* a la propriété de Radon-Nikodym préfaible.*

On sait que si un Banach X a la propriété de Radon-Nikodym analytique, $L^p(\mathbb{T}, X)$, $1 \leq p < \infty$, la conserve [Do₁] [RaS].

Démonstration. — a) Soit $\varphi \in H^p(\mathbb{D}, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*))$. Il s'agit de montrer que $(I_{H^p} \otimes I \otimes V^*)\varphi$ admet pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$ une limite radiale α où $\alpha \in H^p(\mathbb{T}, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*))$. L'argument est similaire à celui du rappel c), en un peu plus compliqué.

Par les théorèmes de Fubini, Fatou et la croissance des moyennes des fonctions sous harmoniques,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H^p(D, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*))} &= \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} \|\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{Y^*}^p dt \right] d\theta \\ &= \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} \|\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{Y^*}^p d\theta \right] dt \\ &\geq \int_{\mathbb{T}} \liminf_r \left[\int_{\mathbb{T}} \|\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{Y^*}^p d\theta \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sup_r \left[\int_{\mathbb{T}} \|\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{Y^*}^p d\theta \right] dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour presque tout t , $\sup_r \left[\int_{\mathbb{T}} \|\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{Y^*}^p d\theta \right]$ est donc fini et ainsi $\varphi(\cdot, t)$ est dans $H^p(\mathbb{D}, Y^*)$.

Par l'hypothèse sur V^* , pour un tel t , pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, il existe $\alpha(\theta, t)$ tel que $\alpha(\cdot, t) \in H^p(d\theta, X^*)$ et

$$\|V^*\varphi(re^{i\theta}, t) - \alpha(\theta, t)\|_{X^*} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0. \quad (2.10)$$

La fonction $\|\alpha(\cdot, \cdot)\|_{X^*}$ est donc mesurable car limite p.s. sur \mathbb{T}^2 de $\|V^*\varphi(r, \cdot)\|_{X^*}$. D'autre part, (2.4) appliqué à $V^*\varphi(\cdot, t) \in H^p(\mathbb{D}, X^*)$ et (2.9) impliquent

$$\begin{aligned} \int \int \sup_r \|V^*\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{X^*}^p d\theta dt &= \int \int \sup_r \|V^*\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{X^*}^p d\theta dt \\ &\leq C_p^p \int \int \sup_r \|V^*\varphi(re^{i\theta}, t)\|_{X^*}^p d\theta dt \\ &\leq C_p^p \|V^*\|^p \|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D}, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*))}^p. \end{aligned}$$

Alors, par (2.10), la fonction $\|\alpha(\cdot, \cdot)\|_{X^*} \leq \sup_r \|V^*\varphi(r, \cdot)\|_{X^*}$ est dans $L^p(\mathbb{T}^2)$; par (2.10) et le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned} &\int \int \|V^*\varphi(re^{i\theta}, t) - \alpha(\theta, t)\|_{X^*}^p dt d\theta \\ &= \int \int \|V^*\varphi(re^{i\theta}, t) - \alpha(\theta, t)\|_{X^*}^p dt d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donc il existe une sous suite $r_n \rightarrow 1$ telle que, pour presque tout θ ,

$$\int \|V^*\varphi(r_n e^{i\theta}, t) - \alpha(\theta, t)\|_{X^*}^p dt \xrightarrow{n} 0.$$

Comme $(V^*\varphi)(r, \cdot) \in H^p(d\theta, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*))$, on en déduit que la fonction $\theta \rightarrow \alpha(\theta, \cdot)$ est fortement mesurable : $(\mathbb{T}, d\theta) \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*)$. Alors (2.11) implique que α est dans $H^p(d\theta, \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, X^*))$, et c'est bien la limite radiale cherchée.

b) Si Y^* a la propriété de de Radon-Nikodym préfaible, le lemme 2.10 permet de remplacer $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$ par $h^p(\mathbb{D}, Y^*)$ dans le résultat de a). \square

3. La propriété de Kadec-Klee- $\beta - \omega$ dans $VB^p(G, X)$

Dans [DL], la topologie sur $\mathcal{C}(\mathbb{D}, X)$ de la convergence en norme dans X , uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , est notée β . La remarque suivante est mentionnée sans preuve (et non exploitée) dans [DZS, p. 276].

LEMME 3.1. — *Sur les parties bornées de $h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 < p \leq \infty$, la topologie β coïncide avec la topologie de la convergence simple.*

Démonstration. — a) Toute $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$ peut être vue dans $h^p(\mathbb{D}, Y^*)$, où $Y \subset X^*$ est un sous espace fermé séparable, normant pour l'ensemble séparable $u(\mathbb{D}) \subset X$. Par le rappel e) il existe $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, Y^*)$, de même norme que u , telle que $u(z) = \int_{\mathbb{T}} f(t)P_z(t)dt$, d'où

$$\|u(z) - u(z')\|_X \leq \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} \|P_z - P_{z'}\|_{C(\mathbb{T})}. \quad (3.1)$$

b) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $\mathbb{D} \rightarrow X$, uniformément bornée par C en norme $h^p(\mathbb{D}, X)$, vérifiant $\|u_n(z) - u(z)\|_X \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{D}$.

Vérifions que $\|u_n(z) - u(z)\|_X \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{D}$.

L'application $z \rightarrow P_z$, $\mathbb{D} \rightarrow C(\mathbb{T})$ étant continue, l'image du compact K par cette application est compacte dans $C(\mathbb{T})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, cette image est recouverte par des boules $B_i = \{P_z; z \in K, \|P_z - P_{z_i}\|_{C(\mathbb{T})} < \varepsilon\}$, où $z_i \in K$, et $i \leq m$. D'autre part il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, et tout $i \leq m$ $\|u_n(z_i) - u(z_i)\| < \varepsilon$. Soit $z \in K$ tel que $P_z \in B_{i_0}$. Pour $n \geq n_0$, d'après (3.1),

$$\begin{aligned} & \|u_n(z) - u(z)\|_X \\ & \leq \|u_n(z_{i_0}) - u(z_{i_0})\|_X + \|u_n(z) - u_n(z_{i_0})\|_X + \|u(z_{i_0}) - u(z)\|_X \\ & \leq \varepsilon(1 + 2C). \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.2. — Soit X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. Si $h^p(\mathbb{D}, X)$ est un espace LUR, alors il a la propriété Kadec-Klee $-\beta - \|\cdot\|$.

Démonstration. — Il s'agit de voir que, si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers u , avec $\|u_n\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} = \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} = 1$ pour tout n , alors $\|u_n - u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Par définition de la propriété LUR il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n + u\|_{h^p(D, X)} = 2$. Comme $\|u_n + u\|_{h^p(D, X)} \leq 2$, il suffit de montrer que $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|u_n + u\|_{h^p(D, X)} \geq 2$.

Par le lemme 3.1, $u_n \rightarrow u$ uniformément sur $C_r = \{z \in \mathbb{D}, |z| \leq r\}$. Pour $r \in]0, 1[$, on a donc

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|u_n + u\|_{h^p(D, X)}^p & \geq \lim_n \int_{\mathbb{T}} \|u_n(re^{it}) + u(re^{it})\|^p dt \\ & = 2^p \int_{\mathbb{T}} \|u(re^{it})\|^p dt, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|u_n + u\|_{h^p(D, X)}^p \geq 2^p \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \|u(re^{it})\|^p dt = 2^p. \quad \square$$

Rappelons que

a) $h^p(\mathbb{D}, X)$ est un espace *LUR* si et seulement si X a les propriétés de Radon-Nikodym et *LUR* [DZS, theorem 3.8], c'est-à-dire si et seulement si $h^p(\mathbb{D}, X) = (P \otimes I)L^p(\mathbb{T}, X)$ et X est *LUR*.

b) $h^p(\mathbb{D}, X)$ a la propriété *Kadec – Klee – β – $\|\cdot\|$* si et seulement si X a la propriété de Radon-Nikodym et, pour tout point x de la sphère unité de X et tout ε , x n'est pas adhérent en norme à $Co(B_X \setminus \overline{B}(x, \varepsilon))$ [DZS, theorem 3.7], c'est-à-dire si et seulement si X a cette dernière propriété et $h^p(\mathbb{D}, X) = (P \otimes I)L^p(\mathbb{T}, X)$.

Soient G un groupe abélien compact métrisable, X un espace de Banach, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $L^{p+}(G)$ désigne le cône des fonctions de $L^p(G)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Alors [Din] $VB^p(G, X)$, $1 < p \leq +\infty$, désigne l'espace des opérateurs $T : L^q(G) \rightarrow X$, tels qu'il existe $g^T \in L^{p+}(G)$, vérifiant

$$\|Tf\|_X \leq \int_G |f(t)| g^T(-t) dt, f \in L^q(G), \quad (3.2)$$

avec la norme

$$\|T\|_{VB^p(G, X)} = \inf \{ \|g^T\|_{L^p} \}.$$

$VB^1(G, X)$ est défini de façon analogue en remplaçant $L^q(G)$ par $C(G)$.

$VB^\infty(G, X)$ coïncide avec l'espace des opérateurs bornés : $L^1(G) \rightarrow X$ et $VB^1(G, X)$ avec l'espace des opérateurs 1-sommant : $C(G) \rightarrow X$.

$L^p(G, X)$ s'identifie isométriquement à un sous espace fermé de $VB^p(G, X)$ [Bl₁, corollary 4].

$VB^p(G, X^*)$ est le dual de $L^q(G, X)$, $1 < p \leq \infty$ [Din], $VB^1(G, X^*)$ est le dual de $\mathcal{C}(G, X)$.

Le lemme suivant améliore [Bl, theorem 2.1] (qui obtient seulement un isomorphisme).

LEMME 3.3. — $VB^p(\mathbb{T}, X)$ est isométriquement isomorphe à $h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 < p \leq \infty$, par l'application : $T \rightarrow u^T$ où la fonction $u^T : \mathbb{D} \rightarrow X$ est définie par $u^T(z) = T(P_z)$, $z \in \mathbb{D}$.

Démonstration. — Soit $T \in VB^p(\mathbb{T}, X)$ associé à $g^T \in L^{p+}(G)$ vérifiant (3.2). La fonction u^T vérifie, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$\|u^T(z)\|_X \leq \int_{\mathbb{T}} P_z(t)g(t)dt = g * p_r(\theta).$$

De plus $u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} T(e^{-in \cdot})$ et $\|T(e^{-in \cdot})\|_X \leq \|\widehat{g^T}\|_{\infty} \leq \|g^T\|_{L^p(G)}$.

Donc u^T est harmonique et $\|u^T\|_{h^p(D, X)} \leq \|T\|_{VB^p(\mathbb{T}, X)}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Réciproquement, d'après (2.2) et l'identification entre $h^p(\mathbb{D})$ et $L^p(\mathbb{T})$, toute $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$, $1 < p \leq \infty$, vérifie, pour $x^* \in X^*$,

$$\langle u(z), x^* \rangle = \int_{\mathbb{T}} \lim_{r \rightarrow -1} \langle u(re^{it}), x^* \rangle P_z(t) dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Posons

$$T_u \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i P_{z_i} \right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i u(z_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, z_i \in \mathbb{D},$$

puis $g(t) = \underline{\lim}_r \|u(re^{it})\|_X$ si $1 < p < \infty$ et $g(t) = \sup_r \|u(re^{it})\|_X$ si $p = \infty$. Directement si $p = \infty$, par le lemme de Fatou sinon,

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sup_r \|u_r\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)}, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Alors, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned} \left\| T_u \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i P_{z_i} \right) \right\|_X &= \sup_{\|x^*\|=1} \left| \int_{\mathbb{T}} \sum_{i=0}^n \alpha_i P_{z_i}(t) \lim_{r \rightarrow -1} \langle u(re^{it}), x^* \rangle dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \left| \sum \alpha_i P_{z_i}(t) \right| g(t) dt. \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{P_z; z \in \mathbb{D}\}$ est total dans $L^q(\mathbb{T})$, on a $\|T_u\|_{VB^p(G, X)} \leq \|u\|_{h^p(\mathbb{D}, X)}$, ce qui termine la preuve. \square

Pour $\Lambda \subset \Gamma$ (le groupe dual de G) désignons par

$$L_{\Lambda}^p(G, X) = \left\{ f \in L^p(G, X); \int_G \overline{\lambda(t)} f(t) dt = 0, \forall \lambda \notin \Lambda \right\},$$

et par $VB_{\Lambda}^p(G, X)$ l'espace des éléments $T \in VB^p(G, X)$, tels que $T(\overline{\lambda}) = 0$, pour tout $\lambda \notin \Lambda$.

Rappelons qu'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 0}$ de norme 1 dans $L^1(G)$, telle que, pour toute $f \in C(G)$, la suite $(f * K_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans $C(G)$,

et pour toute $f \in L^p(G)$, on a la convergence dans $L^p(G)$, $p \in [1, +\infty[$. On peut choisir les K_n symétriques.

Pour $T \in VB^p(G, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, et $g \in L^1(G)$, on définit $T * g \in VB^p(G, X)$ par $(T * g)(f) = T(f * g)$, pour $f \in L^q(G)$ (resp. $C(G)$ si $p = 1$).

On aura besoin du lemme général suivant, qui est certainement bien connu :

LEMME 3.4. — Soient X un espace de Banach et E un sous espace fermé et préfaiblement dense de X^* . Alors il existe une constante C telle que

$$\|x\|_X \leq C \sup_{\|e\|_E=1} |\langle x, e \rangle| = C \|x\|_{E^*} \leq C \|x\|_X.$$

Démonstration. — L'isométrie $\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} |\langle x, x^* \rangle|$ implique immédiatement l'inégalité de droite. Soit $V : X \rightarrow \bar{E}^*$ la contraction canonique. Montrons que $V^* : E^{**} \rightarrow X^*$ est surjective. Par hypothèse, tout $x^* \in X^*$ est limite préfaible d'une suite généralisée $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ dans E . Par le théorème de Banach-Steinhaus, cette famille est bornée dans X^* donc dans E . Par le théorème de Banach-Alaoglu, elle admet une valeur d'adhérence préfaible e^{**} dans E^{**} , qui coïncide nécessairement avec x^* sur $V(X)$, donc $x^* = V^*(e^{**})$. Alors, par le théorème de l'application ouverte, il existe une constante $C > 0$ telle que tout x^* dans la boule unité de X^* provient d'un e^{**} dans la boule de rayon C de E^{**} . D'où

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} < 1} |\langle x, x^* \rangle| \leq \sup_{\|e^{**}\|_{E^{**}} < C} |\langle x, V^*(e^{**}) \rangle| \leq C \|V(x)\|_{E^*}. \quad \square$$

LEMME 3.5. — Soient $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$. On note

$$\begin{aligned} Y_p &= L_{\Lambda_1}^p(G, X) / L_{\Lambda_2}^p(G, X), \\ W_p &= VB_{\Lambda_1}^p(G, X) / VB_{\Lambda_2}^p(G, X), \\ Z_q &= L_{\Lambda_2^c}^q(G, X^*) / L_{\Lambda_1^c}^q(G, X^*), \end{aligned}$$

ces espaces étant munis des normes quotients. Alors

a) $[D_1]$ Y_p s'identifie isométriquement à un sous espace de W_p , $1 \leq p \leq \infty$.

b) W_p , $1 < p \leq \infty$, est isomorphe à un sous espace de

$$Z_q^* = VB_{\Lambda_1}^p(G, X^{**}) / VB_{\Lambda_2}^p(G, X^{**}), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Démonstration. — a) est prouvé dans [D₁, lemme 3] et, si $\Lambda_2 = \emptyset$, dans [Bl₁, corollary 4] .

b) D'après le lemme 3.4, il suffit de voir que Z_q est isométrique à un sous espace préfaiblement dense de W_p^* .

Comme $VB_{\Lambda_1}^p(G, X)$ est inclus isométriquement dans $VB_{\Lambda_1}^p(G, X^{**})$, l'injection canonique $W_p \rightarrow Z_q^*$ est contractante. Par dualité, pour $z \in Z_q$, $\|z\|_{W_p^*} \leq \|z\|_{Z_q}$. D'autre part, par a) appliqué à Z_q , Z_q s'identifie isométriquement à un sous espace de $VB_{\Lambda_2}^q(G, X^{**})/VB_{\Lambda_1}^q(G, X^{**}) = Y_p^*$, donc, pour $z \in Z_q$, $\|z\|_{Z_q} \leq \|z\|_{W_p^*}$.

Il reste à voir que si $[T] \in W_p$ est orthogonal à Z_q , alors $[T] = 0$. Soit $T \in VB_{\Lambda_1}^p(G, X)$ un représentant de $[T]$; il suffit de vérifier que $T \in VB_{\Lambda_2}^p(G, X)$. Soient un caractère χ dans Λ_2^c et $g = \chi \otimes x^* \in L_{\Lambda_2^c}^q(G, X^*)$. Or par hypothèse $0 = \langle [T], [g] \rangle = \langle T, g \rangle$, ce qui achève la preuve. \square

Pour $f \in L^1(G, X)$ et $t \in G$, on définit la fonction $f_t \in L^1(G, X)$ par $f_t(y) = f(y - t)$, pour presque tout $y \in G$. Pour $T \in VB^p(G, X)$, on définit $T_t \in VB^p(G, X)$ par $T_t(f) = T(f_{-t})$, où $f \in L^q(G)$.

On conserve dans la suite de cette partie les notations Y_p, W_p, Z_q du lemme 3.5

LEMME 3.6. — Soit $[T] \in W_p$. L'application $t \rightarrow [T_t]$, $G \rightarrow W_p$ est fortement mesurable si et seulement si elle est faiblement continue ; alors $[T] \in Y_p$, $1 \leq p < +\infty$.

La démonstration est analogue à celle de [D₁, théorème 2] qui traite le cas $\Lambda_2 = \emptyset$.

DÉFINITION 3.7. — a) La topologie β sur $VB^p(G, X)$, $1 < p \leq \infty$, est la topologie forte des opérateurs: $L^q(\mathbb{T}) \rightarrow X$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Si $p = 1$, on remplace $L^q(G)$ par $C(G)$.

b) On note β' la topologie sur W_p quotient de la topologie β sur $VB_{\Lambda_1}^p(G, X)$.

c) L'espace W_p , muni d'une norme $\|\cdot\|'$ équivalente à sa norme quotient naturelle, a la propriété de Kadec-Klee- $\beta' - \|\cdot\|'$ (resp. $\|\cdot\|' - \beta' - w$) si toute suite de W_p , de norme 1 pour $\|\cdot\|'$, qui converge pour β' vers un élément de W_p de norme 1 pour $\|\cdot\|'$, converge en norme (resp. faiblement).

Comme auparavant on peut montrer que, si $T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(f)$ pour toute $f \in L^q(\mathbb{T})$, alors $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T$ uniformément sur tout compact de $L^q(\mathbb{T})$.

La topologie β est métrisable sur les ensembles bornés de $VB^p(G, X)$.

D'après les lemmes 3.1 et 3.3, les propriétés de *Kadec – Klee – $\beta - \|\cdot\|$* (resp. *$\beta - \omega$*) pour $h^p(\mathbb{D}, X)$ et $VB^p(\mathbb{T}, X)$ se correspondent.

PROPOSITION 3.8. — *Si W_p a la propriété Kadec – Klee – $\|\cdot\|' - \beta' - \omega$ pour une norme équivalente $\|\cdot\|'$ invariante par translation, alors $W_p = Y_p, 1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que, si $T \in VB_{\Lambda_1}^p(G, X)$ et $\|[T]\|' = 1$, alors $[T] \in Y_p$. D'après le lemme 3.6, il suffit de montrer que l'application $t \rightarrow [T_t]$ est faiblement continue : $G \rightarrow W_p$. Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite dans G , convergeant vers $t \in G$. Comme $T_{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_t$ pour la topologie β , $[T_{t_n}] \rightarrow [T_t]$ pour la topologie β' . La propriété de *Kadec – Klee – $\|\cdot\|' - \beta' - \omega$* assure que $[T_{t_n}] \rightarrow [T_t]$ faiblement dans W_p . \square

On peut de la même façon définir un opérateur V de *Kadec – Klee – $\beta' - \omega$* : $W_{p,X} \rightarrow W_{p,Y}$ et montrer de même que son image est dans $L_{\Lambda_1}^p(G, Y)/L_{\Lambda_2}^p(G, Y)$.

COROLLAIRE 3.9. — *Si $h^p(\mathbb{D}, X), 1 < p < \infty$, a la propriété de Kadec – Klee – $\beta - \omega$, alors X a la propriété de Radon-Nikodym, c'est-à-dire $h^p(\mathbb{D}, X) = (P \otimes I)L^p(\mathbb{T}, X)$.*

Cela entraîne le résultat analogue de [DL, proposition 2.2] (complété dans [DZS, theorem 3.7] comme on l'a vu après la proposition 3.2) où $h^p(\mathbb{D}, X)$ est supposé avoir la propriété *Kadec – Klee – $\beta - \|\cdot\|$* .

Preuve. — Par la proposition 3.8 et le lemme 3.3, l'hypothèse implique $VB^p(\mathbb{T}, X) = L^p(\mathbb{T}, X)$. A nouveau par le lemme 3.3, pour toute $u \in h^p(\mathbb{D}, X)$ il existe $f \in L^p(\mathbb{T}, X)$ telle que $u = (P \otimes I_X)f$. On conclut par le rappel f). \square

On peut maintenant généraliser la proposition 3.2 :

PROPOSITION 3.10. — *Supposons que W_p , muni de la norme induite par Z_q^* , est LUR (resp. $\omega - LUR$), $1 < p < +\infty$. Alors*

i) W_p a la propriété de Kadec-Klee $\beta' - \|\cdot\|_{Z_q^}$ (resp. $\|\cdot\|_{Z_q^*} - \beta' - \omega$).*

ii) $W_p = Y_p$.

Démonstration. — D'après le lemme 3.5, W_p est bien un espace de Banach pour la norme (invariante par translation) induite par Z_q^* .

i) Soient $[T_n], [T]$ dans la sphère unité de $(W_p, \|\cdot\|_{Z_q^*})$ tels que $[T_n] \rightarrow [T]$ pour la topologie β' . En particulier, $[T_n] \rightarrow [T]$ préfaiblement dans Z_q^* . Donc, pour tout $z \in Z_q$, l'application : $[S] \rightarrow \langle [S], z \rangle$ est continue sur la sphère unité de W_p munie de β' . Donc l'application : $[S] \rightarrow \|[S]\|_{Z_q^*}$ est semi-continue inférieurement sur cette sphère munie de β' . Alors

$$\begin{aligned} 2 &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|[T_n] + [T]\|_{Z_q^*} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|[T_n] + [T]\|_{Z_q^*} \\ &\geq \|[T] + [T]\|_{Z_q^*} = 2 \|[T]\|_{Z_q^*} = 2. \end{aligned}$$

Donc $\|[T_n] + [T]\|_{Z_q^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$. Comme l'espace $(W_p, \|\cdot\|_{Z_q^*})$ est *LUR* (resp. ω -*LUR*), $[T_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [T]$ en norme (resp. faiblement), d'où la propriété annoncée.

ii) résulte de i) et de la proposition 3.8. \square

4. La propriété $I - \Lambda - CCP$ et la propriété $I - \Lambda - RNP$

Cette partie complète $[D_2]$. G désigne toujours un groupe abélien compact métrisable muni de sa mesure de Haar dt . Pour $g \in C(G)$, on note $\check{g}(t) = g(-t)$. La dualité entre $C(G)$ et l'espace $M(G)$ des mesures finies sur G est définie par

$$\langle g, \mu \rangle = \int_G g(-t) d\mu(t), g \in C(G).$$

$M(G, X)$ désigne l'espace des mesures ν définies sur les boréliens de G , à valeurs dans X , dont la variation $|\nu|$ est dans $M(G)$. Cet espace, normé par $\|\nu\|_{M(G)}$, s'identifie isométriquement à $VB^1(G, X)$ en posant $T(f) = \int f d\nu$, $f \in C(G)$ [DU, chap VI, theorem 3.3].

$M^\infty(G, X)$ est le sous espace de $M(G, X)$ formé des mesures ν telles que $\|\nu(A)\|_X \leq C_\nu \int_A dx$ pour tout borélien $A \subset G$. Cet espace, normé par $\|\nu\|_{M^\infty(G, X)} = \inf C_\nu$, s'identifie isométriquement à l'espace $VB^\infty(G, X)$ des opérateurs bornés : $L^1(G) \rightarrow X$ en posant $T(1_A) = \nu(A)$.

DÉFINITION 4.1. — [RS] *Un espace de Banach X a la propriété $I - \Lambda - CCP$ si, pour toute mesure $\nu \in M_\Lambda^\infty(G, X)$, l'ensemble $\{\nu(A) ; A \subset G \text{ borélien}\}$ est relativement compact dans X .*

Cette condition est équivalente à la suivante [DU, chap. VI, theorem 2-18] : tout opérateur $T \in VB^\infty_\Lambda(G, X)$ est compact : $C(G) \rightarrow X$.

PROPOSITION 4.2. — Soient $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$, tels que $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2 = \{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble infini. S'il existe $\mu \in M_{\Lambda_2^c}(G)$ vérifiant $\hat{\mu}(\lambda_j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$, alors $Z = L^1_{\Lambda_2^c}(G)/L^1_{\Lambda_1^c}(G)$ n'a pas la propriété $I - \Lambda_1 \setminus \Lambda_2 - CCP$.

Démonstration. — L'opérateur $T_\mu : C(G) \rightarrow Z$, défini par $T_\mu(g) = \left[\mu * \check{g} \right]$, se prolonge en opérateur : $L^1(G) \rightarrow Z$, de norme $\leq \|\mu\|_{M(G)}$. Donc T_μ est dans $VB^\infty(G, Z)$. Vérifions que $T_\mu(\bar{\lambda}) = 0$ si $\lambda \notin \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$. Soit $\lambda \in \Lambda_1^c \cup \Lambda_2$. Pour $\alpha \in \Lambda_1$

$$\int_G (\mu * \lambda(t)) \bar{\alpha}(t) dt = \left[\int_G \lambda(t) \bar{\alpha}(t) dt \right] \left[\int_G \bar{\lambda}(y) d\mu(y) \right] = 0,$$

donc $\mu * \lambda \in L^1_{\Lambda_1^c}(G)$ et $[\mu * \lambda] = 0$.

Supposons que Z a la propriété $I - \Lambda_1 \setminus \Lambda_2 - CCP$. Alors $T \in VB^\infty_{\Lambda_1 \setminus \Lambda_2}(G, Z)$ est compact : $C(G) \rightarrow Z$, donc la suite $T(\bar{\lambda}_j) = [\mu * \lambda_j] = \mu(\lambda_j) [\lambda_j]$ admet une sous suite convergente en norme dans Z . Cela implique $\mu(\lambda_j) \rightarrow_{j \rightarrow \infty} 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. \square

Le corollaire suivant correspond au cas $\Lambda_2 = \emptyset$, en prenant pour μ la mesure du Dirac en un point de G .

COROLLAIRE 4.3. — [RS, proposition 4.6] Si $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ a la propriété $I - \Lambda - CCP$, alors Λ est fini.

DÉFINITION 4.4. — $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble de Riesz si $M_\Lambda(G) = L^1_\Lambda(G)$.

On sait que Λ est un ensemble de Riesz si et seulement si $L^1_\Lambda(G)$ a la propriété de Radon-Nikodym ; si de plus l'espace X a la propriété de Radon-Nikodym, $M_\Lambda(G, X) = L^1_\Lambda(G, X)$ [LP].

DÉFINITION 4.5. — Un espace de Banach X a la propriété

- $I - \Lambda - RNP$ si $M^\infty_\Lambda(G, X) = L^\infty_\Lambda(G, X)$ [Do] [E].
- de Radon-Nikodym relative $RN - \Lambda_1 - \Lambda_2$ (où $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$) si

$$M^\infty_{\Lambda_1}(G, X)/M^\infty_{\Lambda_2}(G, X) = L^\infty_{\Lambda_1}(G, X)/L^\infty_{\Lambda_2}(G, X).$$

La propriété $I - \Lambda - RNP$ entraîne la propriété $I - \Lambda - CCP$. Les deux propriétés coïncident si Λ est un ensemble de Riesz et si X est un treillis ; X possède alors ces propriétés si et seulement s'il ne contient pas c_0 [RS, theorem 2.5].

PROPOSITION 4.6. — Soient $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 \subset \Gamma$. Si $Z = L_{\Lambda_2^c}^1(G)/L_{\Lambda_1^c}^1(G)$ a la propriété $I - (\Lambda_1 \setminus \Lambda_2) - RNP$, alors

$$M_{\Lambda_2^c}(G)/M_{\Lambda_1^c}(G) = L_{\Lambda_2^c}^1(G)/L_{\Lambda_1^c}^1(G).$$

Cette proposition est montrée à l'étape 1 de la preuve de [D₂, théorème 4.2] lorsque $\Lambda_2 = \emptyset$. La preuve ici est analogue en remplaçant $\mu \in M(G)$ par $\mu \in M_{\Lambda_2^c}(G)$ et Λ par Λ_1 .

COROLLAIRE 4.7. — Sous les hypothèses de la proposition 4.6,

- a) si Λ_1^c est un ensemble de Riesz, Λ_2^c est un ensemble de Riesz
- b) si Λ_2 est fini, Λ_1 est fini.

Si $\Lambda_2 = \emptyset$, b) n'est autre que [D₂, théorème 4.2].

Démonstration. — D'après la proposition 4.6 on a $Z = M_{\Lambda_2^c}(G)/M_{\Lambda_1^c}(G)$, en particulier ce dernier espace est séparable.

- a) Si Λ_1^c est un ensemble de Riesz

$$M_{\Lambda_2^c}(G)/M_{\Lambda_1^c}(G) = M_{\Lambda_2^c}(G)/L_{\Lambda_1^c}^1(G) = L_{\Lambda_2^c}^1(G)/L_{\Lambda_1^c}^1(G),$$

donc $M_{\Lambda_2^c}(G) = L_{\Lambda_2^c}^1(G)$.

b) Comme $C_{\Lambda_2}(G)$ est de dimension finie, $W = C_{\Lambda_1}(G)/C_{\Lambda_2}(G)$ est isomorphe à un sous espace de codimension finie de $C_{\Lambda_1}(G)$. Comme $W^* = M_{\Lambda_2^c}(G)/M_{\Lambda_1^c}(G)$ est séparable, $(C_{\Lambda_1}(G))^*$ l'est aussi, ce qui est impossible si Λ_1 est infini. En effet, il existe alors un ensemble de Sidon $\Lambda' \subset \Lambda_1$, donc $C_{\Lambda'}(G)^* = l^\infty$; or c'est un quotient de $C_{\Lambda_1}(G)^*$. \square

PROPOSITION 4.8. — L'hypothèse de la proposition 4.6 est satisfaite si Z a les propriétés $I - \Lambda_2 - RNP$ et de Radon-Nikodym relative $RN - (\Lambda_1 - \Lambda_2)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $M_{\Lambda_1}^\infty(G, Z) = L_{\Lambda_1}^\infty(G, Z)$.

Soit $T \in M_{\Lambda_1}^\infty(G, Z)$; comme Z a la propriété $RN - (\Lambda_1 - \Lambda_2)$, $[T] \in M_{\Lambda_1}^\infty(G, X)/M_{\Lambda_2}^\infty(G, X)$ est dans $W = L_{\Lambda_1}^\infty(G, Z)/L_{\Lambda_2}^\infty(G, Z)$. D'après [P, proposition 1.2] il existe une sélection continue

$$S : W \rightarrow L_{\Lambda_1}^\infty(G, Z),$$

telle que l'image par S de la boule unité de W est incluse dans deux fois la boule unité de $L_{\Lambda_1}^\infty(G, Z)$. Alors $S[T] - T$ appartient à $M_{\Lambda_2}^\infty(G, Z)$, donc à $L_{\Lambda_2}^\infty(G, Z)$ puisque Z a la propriété $I - \Lambda_2 - RNP$. Finalement $T \in L_{\Lambda_1}^\infty(G, Z)$. \square

Remerciement. — Je remercie chaleureusement F.Lust-Piquard pour le temps qu'elle m'a consacré lors de la réalisation de ce travail. Ses conseils m'ont permis d'en simplifier le contenu.

Bibliographie

- [BL] BENYAMINI (Y.), LINDENSTRAUSS (J.). — Geometric nonlinear functional analysis, Vol. 1, AMS Colloquium Publications 48, American Mathematical Society, Providence, RI (2000).
- [Bl₁] BLASCO (O.). — Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators, Studia-Math. 86, p. 21-33 (1987).
- [Bl] BLASCO (O.). — Boundary values of functions in vector valued Hardy spaces and geometry of Banach spaces, J. Funct. Anal. 78 n° 2, p. 346-364 (1988).
- [BD] BUKHVALOV (A. V.), DANILEVICH (A. A.). — Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, Math. Notes 31, 203-214; English translation Math. Notes 31, p. 104-110 (1982).
- [D₁] DAHER (M.). — Translations mesurables et ensembles de Rosenthal, Annales de la Fac. de Toulouse, vol. XIV, n° 1, p. 105-121 (2005).
- [D₂] DAHER (M.). — Ensembles de Rosenthal et propriété de Radon-Nikodym relative, Annales de la Fac. de Toulouse, vol. XVI, n° 3, p. 515-526 (2009).
- [DGL] DAVIS (W. J.), GHOUSSEUB (N.), LINDENSTRAUSS (J.). — A lattice renorming theorem and applications to vector-valued processes, Trans. Amer. Math. Soc. p. 531-540 (1981).
- [DGZ] DEVILLE (R.), GODEFROY (G.), ZIZLER (V.). — Smoothness and renormings in Banach spaces, Pitman Monographs and Surveys 64, (1993), Longman scientific.
- [DF] DIESTEL (J.), FAIRES (B.). — On vector measures, Trans. Amer. Math. Soc. 198, p. 253-271 (1974).
- [DU] DIESTEL (J.), UHL (J.). — Vector measures, Math. Surveys N° . 15, (1977), AMS.
- [Die] DIEUDONNÉ (J.). — Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V, Canad. J. Math. 3, p. 129-139 (1951).
- [Din] DINCULEANU (N.). — Linear operations on spaces of totally measurable functions, Re. Roum. Math. Pures, Appl. 10, 14931524 (1965).
- [Do₁] DOWLING (P. N.). — The analytic Radon-Nikodym property in Lebesgue-Bochner function spaces, Proc. AMS, 99, p. 119-121 (1987).

- [Do] DOWLING (P. N.). — Radon-Nikodym properties associated with subsets of countable discrete abelian group, *Trans. Amer. Math. Soc.* 327, p. 879-890 (1991).
- [DL] DOWLING (P. N.), LENNARD (J.). — Kadec-Klee properties of vector-valued Hardy spaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 111, p. 535-544 (1992).
- [DZS] DOWLING (P. N.), ZHIBAO (H.), SMITH (M. A.). — Geometry of spaces of vector-valued harmonic functions, *Can. J. Math.* Vol. 46(1), 274-283 (1994).
- [E] EDGAR (G. A.). — Banach spaces with the analytic Radon-Nikodym property and compact abelian groups, *Almost everywhere convergence* (Columbus, OH, 1988), 195-213, Academic Press, Boston, MA (1989).
- [HL] HARDY (C. H.), LITTLEWOOD (J. E.). — A maximal theorem with functions theoretic applications, *Acta. Math.* 54, p. 81-116 (1930).
- [L] LINDENSTRAUSS (J.). — Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate, *Ann. of Math. Studies* 69, p. 235-273 (1972).
- [LT] LINDENSTRAUSS (J.), TZAFFRIRI (L.). — *Classical Banach spaces*, vol. II, Springer (1977).
- [LP] LUST-PIQUARD (F.). — Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris* 282, p. 833-835 (1976).
- [P] PARTHASARATHY (T.). — *Selection theorems and their applications*, Lecture Notes in Math. 263, Springer-Verlag (1972).
- [RaS] RANDRIANATOANIA (N.), SAAB (E.). — Stability of some types of Radon-Nikodym properties, *Illin. J. Math.* 39, p. 416-430, (1995).
- [RS] ROBBERA (M.), SAAB (P.). — Complete continuity properties of Banach spaces associated with subsets of discrete abelian group, *Glasgow Math. J.* 43, p. 185-198 (2001).
- [Ru] RUDIN (W.). — *Real and complex analysis*, Mc-Graw Hill (1966).
- [W] WARSCHAWSKI (S.). — Über einige Konvergenzsätze aus der theorie konformen abbildungen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, p. 344-369 (1930).