ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Maximiliano Leyton-Alvarez

Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles

Tome XX, n° 3 (2011), p. 613-667.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_3_613_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XX, n° 3, 2011
pp. 613–667

Résolution du problème des arcs de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles

Maximiliano Leyton-Alvarez[1]

Résumé. — Le problème des arcs de Nash pour les singularités normales de surfaces affirme qu'il y aurait autant de familles d'arcs sur un germe de surface singulier (S, O) que de diviseurs essentiels sur (S, O). Il est connu que ce problème se réduit à étudier les singularités quasi-rationnelles. L'objet de cet article est de répondre positivement au problème de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles non rationnelles. On applique la même méthode pour répondre positivement à ce problème dans les cas de singularités de type $\mathbb{E}_6$ et $\mathbb{E}_7$ et pour fournir une nouvelle preuve dans le cas de singularités de type $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$.

Abstract. — **A solution to the Nash problem on arcs for a family of quasi-rational hypersurfaces**. The Nash problem on arcs for normal surface singularities states that there are as many arc families on a germ (S, O) of a singular surface as there are essential divisors over (S, O). It is known that this problem can be reduced to the study of quasi-rational singularities. In this paper we give a positive answer to the Nash problem for a family of non-rational quasi-rational hypersurfaces. The same method is applied to answer positively to this problem in the case of $\mathbb{E}_6$ and $\mathbb{E}_7$ type singularities, and to provide new proof in the case of $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$, type singularities.

[*] Reçu le 15/02/2011, accepté le 02/05/2011

[1] Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74, 38402 St. Martin d'Hères cédex, France
leyton@ujf-grenoble.fr

1. Introduction

Soient $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, V une variété algébrique normale sur $\mathbf{k}$ et $\pi : X \to V$ une désingularisation divisorielle de V, c'est-à-dire π est une désingularisation (π est un morphisme propre et birationnel tel que le morphisme $\pi : X \backslash \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, V) \to V \backslash \mathrm{Sing}\, V$ est un isomorphisme, où $\mathrm{Sing}\, V$ est le lieu singulier de V et X est lisse) telle que les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, V)$ sont de codimension 1 dans X. On sait, d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, que cette désingularisation existe.

Si $\pi' : X' \to V$ est une autre désingularisation de V, alors $(\pi')^{-1} \circ \pi : X \to X'$ est une application birationnelle. Soit E une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π. Comme E est un diviseur et X est une variété algébrique normale (X est une variété lisse), il existe un ouvert E^0 de E sur lequel l'application birationnelle $(\pi')^{-1} \circ \pi$ est bien définie. Le diviseur E est appelé *diviseur essentiel sur* V si pour toute désingularisation $\pi' : X' \to V$ de V l'adhérence de $(\pi')^{-1} \circ \pi(E^0)$ dans X' est une composante irréductible de la fibre exceptionnelle du morphisme π'. On note $\mathrm{Ess}(V)$ l'ensemble de diviseurs essentiels sur V.

On remarque que, si V est une surface algébrique normale sur $\mathbf{k}$, les diviseurs essentiels sur V sont les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la résolution minimale de V.

Soit K un corps d'extension de $\mathbf{k}$. Un morphisme $\mathrm{Spec} K[t]/(t^{m+1}) \to V$ (resp. $\mathrm{Spec} K[[t]] \to V$) est appelé (K,m)-jet (resp. K-arc).

Soit $\mathcal{S}ch/\mathbf{k}$ la catégorie des schémas sur $\mathbf{k}$ et $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. On considère le foncteur contravariant suivant :

$$F_m : \mathcal{S}ch/\mathbf{k} \longrightarrow \mathcal{E}ns,\ Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V).$$

Ce foncteur est représentable de forme canonique par un schéma V_m de type fini sur $\mathbf{k}$, c'est-à-dire on a :

$$\mathrm{Hom}(Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}), V) \cong \mathrm{Hom}(Y, V_m),$$

où Y est un schéma quelconque sur $\mathbf{k}$. Le schéma V_m est appelé *l'espace de* m*-jet sur* V.

L'homomorphisme surjectif canonique $\mathbf{k}[t]/(t^{m+1}) \to \mathbf{k}[t]/(t^m)$ induit un morphisme affine $\mathrm{p}_m : V_m \to V_{m-1}$. Les morphismes $\mathrm{p}_{m\, n} : V_m \to V_n$, où $n < m$ et $\mathrm{p}_{m\,n} := \mathrm{p}_{n+1} \circ \cdots \circ \mathrm{p}_m$, forment un système projectif. Comme les morphismes $\mathrm{p}_m : V_m \to V_{m-1}$ sont affines (voir [Ish07] ou [EM09]), la limite projective existe. On note V_∞ cette limite projective, c'est-à-dire $V_\infty := \lim\limits_{\leftarrow m} V_m$. La limite projective V_∞ est un schéma qui n'est pas en général de type fini sur $\mathbf{k}$. Le schéma V_∞ est appelé *l'espace d'arcs sur* V.

L'espace d'arcs V_∞ a *la propriété fonctorielle* suivante (voir [IK03]): Le foncteur $Y \to \mathrm{Hom}(Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}[[t]], V)$, où Y est un schéma quelconque sur $\mathbf{k}$ et $Y \widehat{\times}_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}[[t]]$ est le complété formel du schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}[[t]]$ le long du sous-schéma $Y \times_{\mathbf{k}} \mathrm{Spec}\mathbf{k}$, est représentable par le schéma V_∞.

D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞, les K-points de V_∞ sont en correspondance bijective avec les K-arcs sur V. Par abus de notation, pour $\alpha \in V_\infty$, on note α son $\mathbf{k}_\alpha$-arc correspondant, où $\mathbf{k}_\alpha$ est le corps résiduel du point α.

Soit $\mathrm{p}_\infty : V_\infty \to V$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\mathrm{Spec}\mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On note $V_\infty^s := \mathrm{p}_\infty^{-1}(\mathrm{Sing}\, V)$, où $\mathrm{Sing}\, V$ est le lieu singulier de V, et $\mathcal{CN}(V)$ l'ensemble de composantes irréductibles de V_∞^s.

Nash a démontré que l'application suivante est bien définie et injective (voir [Nas95]) :

$$\mathcal{N}_V : \mathcal{CN}(V) \to \mathrm{Ess}(V), C \mapsto \overline{\{\widehat{\alpha}(0)\}},$$

où le $\mathbf{k}_\alpha$-arc α est le point générique de $C \in \mathcal{CN}(V)$, le $\mathbf{k}_\alpha$-arc $\widehat{\alpha}$ est le relèvement à X du $\mathbf{k}_\alpha$-arc α, c'est-à-dire $\widehat{\alpha}$ est l'unique morphisme tel que $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$, et $\overline{\{\widehat{\alpha}(0)\}}$ est l'adhérence du point $\widehat{\alpha}(0)$. Cette application est appelée *l'application de Nash associée à* V.

Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de l'application de Nash $\mathcal{N}_V$.

Dans plusieurs cas la surjectivité de cette application a été prouvée. Par exemple pour les singularités $\mathbb{A}_n$ ([Nas95]), les singularités $\mathbb{D}_n$ ([Plé08]), les surfaces sandwichs ([LJRL99]), les variétés toriques ([IK03]), les hypersurfaces quasi-ordinaires ([GP07]), les variétés toriques stables ([Pet09]), et d'autres cas qu'on peut trouver dans les articles suivants ([Ish05], [Ish06], [GP07], [GSLJ97], [LJ80],[Mor08], [PPP06], [PPP08], [Reg95]).

Dans l'article [IK03] Ishii et Kollar montrent que l'application de Nash associée à l'hypersurface de $\mathbb{A}^5_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^6 = 0$ n'est pas surjective. Or, en dimension deux ou trois il n'y a pas d'exemple publié où l'application de Nash n'est pas surjective.

Soit E un diviseur essentiel sur V ($\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(V)$). On note N_{E} l'adhérence dans V_∞ de l'ensemble suivant :

$$\{\alpha \in V_\infty \backslash (\operatorname{Sing} V)_\infty \mid \widehat{\alpha}(0) \in E\},$$

où $(\operatorname{Sing} V)_\infty$ est le sous-ensemble fermé de V_∞ des arcs qui sont concentrés en $\operatorname{Sing} V$. L'ensemble N_{E} est irréductible et on a :

$$V_\infty^s = \bigcup\nolimits_{\mathrm{E}} N_{\mathrm{E}},$$

voir [Reg06]. On note α_{E} le point générique de N_{E}.

Un morphisme $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to V$ est appelé *K-wedge sur V*. D'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs V_∞, les K-wedges sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$-points de V_∞. L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\mathrm{Spec}K[[s]]$ dans V_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K-wedge ω.

Un K-wedge ω est appelé *K-wedge admissible centré en* N_{E} si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_{E} (resp. appartient à V_∞^s). Dans ce cas, par définition, le corps K est forcément un corps d'extension du corps résiduel $\mathbf{k}_{\alpha_{\mathrm{E}}}$ du point α_{E}. Le K-wedge ω peut être interprété comme une déformation à un paramètre des coefficients du comorphisme $\alpha_{\mathrm{E}}^\star$ de l'arc α_{E}.

Dans [Reg06] (dans le cas de surfaces voir [LJ80]) l'auteur montre que E appartient à l'image de l'application de Nash $\mathcal{N}_V$ si et seulement si tout K-wedge admissible ω centré en N_{E} se relève à X, où K est un corps d'extension quelconque du corps $K_{\alpha_{\mathrm{E}}}$, c'est-à-dire s'il existe un K-wedge $\widehat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \widehat{\omega} = \omega$.

On considère l'hypersurface $\mathrm{S(p,h_q)}$ de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $z^p + \mathrm{h_q}(x,y) = 0$, où $\mathrm{h_q}$ est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. Par exemple si $\mathrm{h_q}(x,y) = x^q + y^q$, $\mathrm{S(p,h_q)}$ est une surface de *Pham-Brieskorn*. Les surfaces $\mathrm{S(p,h_q)}$ sont toutes quasi-rationnelles (voir [FZ03]) et rationnelles si et seulement si $q = 2$ ou $(p,q) = (2,3)$. On remarque que $\mathrm{S(p,h_2)}$ est une singularité du type $\mathbb{A}_{p-1}$. Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

Théorème 1.1. — *Pour tous les entiers $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ premiers entre eux, l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathrm{S(p,h_q)}}$ associée à $\mathrm{S(p,h_q)}$ est bijective.*

Une note sur la preuve de ce résultat a été publiée dans [LA11].

On remarque que les critères de [Mor08] et [PPP06] ne s'appliquent pas en général aux familles $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 1.1 on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Si S est une singularité du type $\mathbb{E}_6$ ou $\mathbb{E}_7$, l'application de Nash $\mathcal{N}_S$ associée à S est bijective.*

On obtient aussi une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour plusieurs cas connus, par exemple $\mathbb{D}_n$, où n est un entier, $n \geqslant 4$ (voir [Plé08]).

Récemment sur ArXiv une preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type $\mathbb{E}_6$ (resp. pour les surfaces quotients) a été publiée, voir [PS10] (resp. voir [PP10])). Mais les méthodes de démonstration sont différentes de celle que nous utilisons.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans première section on prouve quelques résultats qui vont être utilisés dans toutes les sections de cet article et on démontre le Théorème 1.1 ; le Théorème 1.2 est le sujet de la deuxième section, on donne la preuve du cas $\mathbb{E}_6$ en détails et un résumé pour le cas $\mathbb{E}_7$; dans la dernière section on donne une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités du type $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$ différente de celle de l'article [Plé08].

2. Le problème Nash pour les hypersurfaces quasi-rationelles $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$

On rappelle que $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ est l'hypersurface de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $z^p + \mathrm{h_q}(x, y) = 0$, où $\mathrm{h_q}$ est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples et $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ sont deux entiers premiers entre eux.

Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_m}$ associée à la surface de type $\mathbb{A}_m$, $m \geqslant 2$, est bijective (voir [Nas95]). On suppose donc que $q \geqslant 3$, car l'hypersurface $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_2})$ est une singularité du type $\mathbb{A}_{p-1}$.

2.1. Désingularisation des hypersurfaces $\mathbf{S}(\mathbf{p}, \mathbf{h_q})$

Un système de coordonnées affines $\{x, y, z\}$ de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ étant fixé, notons O l'origine de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$. On décrit la désingularisation de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ en utilisant les constellations toriques de points infiniment voisins de O (voir [CGSLJ96]), les éventails de Newton (voir [GSLJ91]) et les *G-désingularisations* (voir [BGS95]).

Soient $\mathrm{N} = \mathbb{Z}^3$ muni de sa base standard $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ le dual de N. On note $\{\mathrm{e}_1^\star, \mathrm{e}_2^\star, \mathrm{e}_3^\star\}$ la base duale de $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$. On identifie la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\mathrm{M}]$ avec la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ par l'isomorphisme qui envoie le caractère $\chi^{\mathrm{e}_1^\star}$ (resp. $\chi^{\mathrm{e}_2^\star}$, $\chi^{\mathrm{e}_3^\star}$) sur x (resp. y, z).

Soit Σ un éventail en $\mathrm{N}_{\mathbb{R}} := \mathrm{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $X(\Sigma)$ la variété torique associée à l'éventail Σ et munie de l'action du tore algébrique $(\mathbf{k}^\star)^3 = \mathrm{Spec}\mathbf{k}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}]$.

Soit $X_0 = \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$. Une constellation torique de points infiniment voisins de O est un ensemble fini de points $\mathcal{C} = \{Q_0 = O, Q_1, ..., Q_m\}$, où chaque Q_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, est une orbite de dimension 0 de la variété torique X_i obtenue par l'éclatement $\varsigma_i : X_i \to X_{i-1}$ de centre Q_{i-1}. On note $X(\mathcal{C}) = X_{m+1}$.

On dit que Q_j se projette sur Q_i, noté $Q_j \geqslant Q_i$, si le point $Q_j \in X_j$ est obtenu à partir de $Q_i \in X_i$ par une suite d'éclatements de points. La relation $\geqslant$ est une relation d'ordre partiel sur les points de $\mathcal{C}$. Si $\geqslant$ est un ordre total, on dit que $\mathcal{C}$ est une constellation en chaîne.

Supposons que $\mathcal{C}$ est une constellation torique en chaîne de points infiniment voisins de O. Soient $\mathcal{B} := \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ la base ordonnée de N et $\Delta := \langle \mathcal{B} \rangle$ le cône régulier engendré par $\mathcal{B}$. Notons Σ_i l'éventail associé à la variété torique X_i. L'éventail Σ_1 est obtenu par la subdivision élémentaire de Δ centrée en $u = e_1 + e_2 + e_3$. Pour chaque entier j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, soit $\mathcal{B}_j$ la base ordonnée de N obtenue en remplaçant e_j par u en la base $\mathcal{B}$. Soit $\Delta_j := \langle \mathcal{B}_j \rangle$ le cône régulier engendré par $\mathcal{B}_j$, pour $1 \leqslant j \leqslant 3$. Le choix du point $Q_1 > Q_0$ équivaut à choisir un entier a_1, $1 \leqslant a_1 \leqslant 3$, qui détermine un cône Δ_{a_1} de l'éventail Σ_1. La subdivision Σ_2 de Σ_1 est obtenue en remplaçant Δ_{a_1} en Σ_1 par les cônes $\Delta_{a_1 j} := \langle \mathcal{B}_{a_1 j} \rangle$, où $\mathcal{B}_{a_1 j}$ est la base ordonnée de N obtenue en remplaçant le j-ième vecteur de $\mathcal{B}_{a_1}$ par $\sum_{u \in \mathcal{B}_{a_1}} u$. Le choix du point $Q_2 > Q_1$ équivaut à choisir un entier a_2, $1 \leqslant a_2 \leqslant 3$, qui détermine un cône $\Delta_{a_1 a_2}$ de l'éventail Σ_2. Par récurrence, on obtient une codification de la constellation en chaîne $\mathcal{C}$. Cette codification est notée $Q_j = Q_0(a_1 a_2 \cdots a_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$.

Soit $b_1, b_2, \cdots, b_k$ une suite d'entiers, où $1 \leqslant b_i \leqslant 3$, $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant m$, et telle que le cône $\Delta_{b_1 b_2 \cdots b_k}$ appartient à l'éventail Σ_{m+1}. Notons $U_{b_1 b_2 \cdots b_k}$ l'ouvert torique affine qui est en correspondance avec le cône $\Delta_{b_1 b_2 \cdots b_k}$.

Soit $\mathcal{C}_n = \{Q_0 = O, Q_1, ..., Q_{n-1}\}$, $n \geqslant 1$, une chaîne torique de points infiniment voisins de O donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ (j fois l'entier 3) pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$. On note $\sigma_n : X(\mathcal{C}_n) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ le morphisme torique induit par $\mathcal{C}_n$ et $S_{\mathcal{C}}$ le transformé strict de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

Proposition 2.1. — *Soient $p > q$ et $p = nq + r$ la division entière, $1 \leqslant r < q$. Si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de* $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ *et la fibre exceptionnelle $\sigma_n^{-1}(O) \cap S_{\mathcal{C}}$ est la réunion de nq courbes rationnelles. Si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier s, et de plus, $(S_{\mathcal{C}}, s)$ est isomorphe au germe* $(\mathrm{S}(\mathrm{r}, \mathrm{h_q}), O)$.

Démonstration. — La proposition se démontre par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. Mais d'abord démontrons le lemme suivant.

On considère l'éclatement de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ de centre O, $\varsigma_1 : X_1 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$. On note x_i, y_i, z_i les coordonnées canoniques de l'ouvert torique affine U_i, pour l'entier $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Soit S le transformé strict de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ induit par le morphisme $\varsigma_1 : X_1 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$. Par abus de notation, on note $\varsigma_1 : S \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ la restriction du morphisme $\varsigma_1 : X_1 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ à S.

Lemme 2.2. — *Les ouverts de S, $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses et $U_3 \cap S = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + \mathrm{h_q}(x_3, y_3) = 0\}$.*

La fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \to$ $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ *est la réunion de q courbes rationnelles. Les courbes ne s'intersectent qu'en le point fermé de U_3 fixé par l'action du tore algébrique $(\boldsymbol{k}^\star)^3$.*

Si $p - q = 1$, alors S est la résolution minimale de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

Démonstration. — Les restrictions du morphisme $\varsigma_1 : X_1 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ aux ouverts U_i sont données de la façon suivante :

$$U_1 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}},\ (x_1, y_1, z_1) \mapsto (x_1, x_1 y_1, x_1 z_1)\ ;$$

$$U_2 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}},\ (x_2, y_2, z_2) \mapsto (y_2 x_2, y_2, y_2 z_2)\ ;$$

$$U_3 \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}},\ (x_3, y_3, z_3) \mapsto (z_3 x_3, z_3 y_3, z_3).$$

Ainsi, on obtient que

$$U_1 \cap S = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + \mathrm{h_q}(1, y_1) = 0\}\ ;$$

$$U_2 \cap S = \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2^p y_2^{p-q} + \mathrm{h_q}(x_2, 1) = 0\}\ ;$$

$$U_3 \cap S = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3^{p-q} + \mathrm{h_q}(x_3, y_3) = 0\}.$$

Par un calcul direct, on montre que $U_1 \cap S$ et $U_2 \cap S$ sont lisses. Ceci achève la preuve de la première partie du lemme.

Soit F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \to \mathrm{S(p, h_q)}$. Alors on a

$$U_3 \cap F = \{(x_3, y_3, z_3) \in U_3 \mid z_3 = 0,\ \mathrm{h_q}(x_3, y_3) = 0\}.$$

Comme $\mathrm{h_q}$ est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples, l'ensemble $U_3 \cap F$ est la réunion de q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3.

On remarque que les deux ensembles suivants sont de cardinalité q.

$$(X_1 \backslash U_3) \cap F \cap U_1 = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1 = 0,\ x_1 = 0,\ \mathrm{h_q}(1, y_1) = 0\}\ ;$$

$$(X_1 \backslash U_3) \cap F \cap U_2 = \{(x_2, y_2, z_2) \in U_2 \mid z_2 = 0,\ y_2 = 0,\ \mathrm{h_q}(x_2, 1) = 0\}.$$

Par conséquent, la fibre exceptionnelle est la réunion d'exactement q courbes rationnelles qui s'intersectent en l'origine de U_3. Ceci achève la preuve de la deuxième parti du lemme.

Si $p - q = 1$, S est une surface lisse. On considère la fonction régulière de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, $g(x, y, z) = x$. Alors $g^\star = g \circ \varsigma_1$ est une fonction régulière de X_1.

Soit C le diviseur principal de $\mathrm{S(p, h_q)}$ associé à la restriction de g à $\mathrm{S(p, h_q)}$, c'est-à-dire $C := \mathrm{Div}(\mathrm{g} \mid_{\mathrm{S(p,h_q)}})$. On remarque que C est une courbe (l'intersection schématique de $\mathrm{Div(g)}$ et $\mathrm{S(p, h_q)}$ est irréductible et réduit). Notons C' le transformé strict de C par le morphisme $\varsigma_1 : S \to \mathrm{S(p, h_q)}$. Par un calcul direct, on peut montrer que C' intersecte F en l'origine de U_3.

On considère la restriction de $g^\star$ à l'ouvert U_3. Alors, on a

$$g^\star = z_3 x_3.$$

Par conséquent, le diviseur principal de S associé à la restriction de $g^\star$ à S est le suivant :

$$\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star \mid_{\mathrm{S}}) = C' + \textstyle\sum_{i=1}^{q} F_i,$$

où les F_i sont les composantes irréductibles de F. Comme $\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star \mid_{\mathrm{S}}) \cdot F_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., q\}$, on obtient :

$$F_i \cdot F_i = -C' \cdot F_i - \sum_{j \neq i} F_j \cdot F_i = -q \leqslant -3.$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Raisonnons par récurrence sur l'entier n.

Si $n = 1$, on a $p = q + r$ et $\mathcal{C}_1 = \{Q_0 = O\}$. La preuve de ce cas résulte du Lemme 2.2.

Maintenant, on suppose que $p = nq + r$.

D'après le Lemme 2.2, on a $U_3 \cap S = \mathrm{S}((\mathrm{n}-1)\mathrm{q}+\mathrm{r}, \mathrm{h_q})$ et la fibre exceptionnelle de $\varsigma_1 : S \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ est la réunion de q courbes rationnelles. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur $U_3 \cap S$, on montre :

> la fibre exceptionnelle de $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ est la réunion de nq courbes rationnelles ;
>
> si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier de type $\mathrm{S}(\mathrm{r}, \mathrm{h_q})$;
>
> si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est lisse.

Pour achever la preuve de la proposition, il faut montrer que si $r = 1$, alors le morphisme $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ est la résolution minimale de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

Soient F la fibre exceptionnelle du morphisme $\varsigma_1 : S \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ et F_i une composante irréductible de F, $1 \leqslant i \leqslant q$. On note F'_i le transformé strict de F_i dans $S_{\mathcal{C}}$ (on rappelle que le morphisme ς_1 factorise σ_n). En utilisant l'hypothèse de récurrence, pour montrer que $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, il suffit de montrer que $F'_i \cdot F'_i \leqslant -2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$.

Pour chaque $Q_i \in \mathcal{C}_n$, on note B_i le diviseur exceptionnel $\varsigma_i^{-1}(Q_i)$ en X_{i+1} et D_i (resp. $\mathrm{D}_i^\star$) le transformé strict (resp. total) de B_i dans $X(\mathcal{C}_n)$.

On rappelle que la constellation $\mathcal{C}_n$ est donnée par la codification $Q_j = Q_0(3^j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$. En vertu du lemme 1.3 de [CGSLJ96], on a

$$\mathrm{D}_i = \mathrm{D}_i^\star - \mathrm{D}_{i+1}^\star,$$

d'où $\mathrm{D}_i^\star = \sum_{j=i}^{n-1} \mathrm{D}_j$.

Avant d'achever la preuve de la Proposition 2.1, on introduit les notions suivantes.

Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{P}$ trois idéaux. Le $\star$-produit de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, noté $\mathcal{I} \star \mathcal{J}$, est la clôture intégrale du produit $\mathcal{I}\mathcal{J}$. On suppose que $\mathcal{P}$ est un idéal complet non-trivial. L'idéal $\mathcal{P}$ est $\star$-simple si $\mathcal{P}$ n'a pas de $\star$-factorisation non-triviale.

On suppose que $\mathcal{I}$ est un idéal tel que $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)}$ soit un faisceau d'idéaux inversible. On définit par récurrence le vecteur $\mathrm{m}(\mathcal{I}) = (\mathrm{m}_0, ..., \mathrm{m}_{n-1})$: $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$, $\mathrm{m}_0 = \mathrm{Ord}_{Q_0}\mathcal{I}_0$ et $\mathrm{m}_i = \mathrm{Ord}_{Q_i}\mathcal{I}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, où $\mathcal{I}_i = x^{-\mathrm{m}_{i-1}}\mathcal{I}_{i-1}\mathcal{O}_{X_i,Q_i}$ et $x = 0$ est l'équation locale de B_{i-1} en Q_i. Dans [Lip88] l'auteur montre qu'il existe un unique idéal $\star$-simple, noté $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$, tel que le vecteur $\mathrm{m}(\mathcal{P}_{Q_{n-1}})$ est minimal pour l'ordre lexicographique inverse et $\mathrm{m}_{n-1} = 1$. L'idéal $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ est appelé *l'idéal $\star$-simple spécial* associé à Q_{n-1}.

Reprenons la démonstration de la Proposition 2.1.

Soient $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ *l'idéal $\star$-simple spécial* associé à Q_{n-1} et D' le diviseur de $X(\mathcal{C}_n)$ tel que

$$\mathcal{P}_{Q_{n-1}}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)} = \mathcal{O}_{X(\mathcal{C}_n)}(-\mathrm{D}').$$

D'après le Lemme 2.16 de [CGSLJ96], on a

$$\mathrm{D}' = \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{D}_i^\star.$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{D}' = \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\mathrm{D}_i.$$

Soit g un élément général de l'idéal $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$. Alors $g^\star = g \circ \sigma_n$ est une fonction régulière de $X(\mathcal{C}_n)$. On note C le diviseur associé à g et C' le transformé strict de C dans $X(\mathcal{C}_n)$. Alors, on a :

$$\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star) = C' + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\mathrm{D}_i.$$

Pour un diviseur Z de $X(\mathcal{C}_n)$, tel que son support ne contienne pas $S_\mathcal{C}$, notons $Z{\cdot}S_\mathcal{C}$ le diviseur de $S_\mathcal{C}$ obtenu par la somme formelle des composantes irréductibles de $Z \cap S_\mathcal{C}$ pondérées par leurs multiplicités en $S_\mathcal{C}$. Comme g est un élément général de $\mathcal{P}_{Q_{n-1}}$ on peut supposer que le support de C' ne contient pas $S_\mathcal{C}$. Ainsi, on obtient que

$$\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star\, |_{\mathrm{S}_\mathcal{C}}) = C' \cdot S_\mathcal{C} + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\mathrm{D}_i \cdot S_\mathcal{C}.$$

On remarque que $\mathrm{D}_0 \cdot S_\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{q} F_i'$. En effet, il suffit de considérer l'ouvert affine U_1. On a donc $U_1 \cap S_\mathcal{C} = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid z_1^p x_1^{p-q} + \mathrm{h_q}(1, y_1) = 0\}$ et $\mathrm{D}_0 \cap U_1 = \{(x_1, y_1, z_1) \in U_1 \mid x_1 = 0\}$. Par conséquent, $(D_0 \cdot S_\mathcal{C}) \cap U_1 = \sum_{i=1}^{q}(F_i' \cap U_1)$, d'où $\mathrm{D}_0 \cdot S_\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{q} F_i'$.

On a donc

$$\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star\,|_{\mathrm{S}_{\mathcal{C}}}) = C' \cdot S_{\mathcal{C}} + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\mathrm{D}_i \cdot S_{\mathcal{C}} + \sum_{i=1}^{q} F'_i.$$

On remarque que l'intersection $\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star\,|_{\mathrm{S}_{\mathcal{C}}}) \cdot F'_i$ est nulle pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, car $\mathrm{Div}(\mathrm{g}^\star\,|_{\mathrm{S}_{\mathcal{C}}})$ est un diviseur principal. On remarque aussi que $(\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)\mathrm{D}_i \cdot S_{\mathcal{C}}) \cdot F'_i \geqslant 2$, car il existe au moins un $1 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $((i+1)\mathrm{D}_i \cdot S_{\mathcal{C}}) \cdot F'_i \geqslant (i+1) \geqslant 2$. Par conséquent, on obtient que $F'_i \cdot F'_i \leqslant -2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, d'où la proposition. □

Pour un polynôme $\mathrm{g} = \sum c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ dans $\mathbf{k}[x,y,z]$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $c_e \in \mathbf{k}$, on note $\mathcal{E}(\mathrm{g})$ l'ensemble des exposants $e \in \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}$ dont le coefficient c_e est non nul, c'est-à-dire $\mathcal{E}(\mathrm{g}) := \{e \in \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0} \mid c_e \neq 0\}$. Soient $\Gamma_+(\mathrm{g})$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{e + \mathbb{R}^3_{\geqslant 0} \mid e \in \mathcal{E}(\mathrm{g})\}$ et $\Gamma(\mathrm{g})$ la réunion des faces compactes de $\Gamma_+(\mathrm{g})$. On note $\mathcal{I}(\mathrm{g})$ l'idéal monomial de $\mathbf{k}[x,y,z]$ engendré par les monômes $x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ tels que $(e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(\mathrm{g}) \cap \mathbb{Z}^3$, c'est-à-dire $\mathcal{I}(\mathrm{g}) := (\{x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3} \mid (e_1, e_2, e_3) \in \Gamma(\mathrm{g}) \cap \mathbb{Z}^3\})$. L'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{g})$ associé à g est la subdivision de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ correspondant à l'éclatement normalisé de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ de centre l'idéal $\mathcal{I}(g)$. Pour plus de détails voir [GSLJ91] ou [KKMS73].

Remarque 1. — Dans toute la suite, à automorphisme linéaire de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ près, x et y ne divisent pas $\mathrm{h_q}(x,y)$.

La Figure 1 représente le polyèdre de Newton $\Gamma(\mathrm{f})$ associe à $\mathrm{f} := z^p + \mathrm{h_q}(x,y)$.

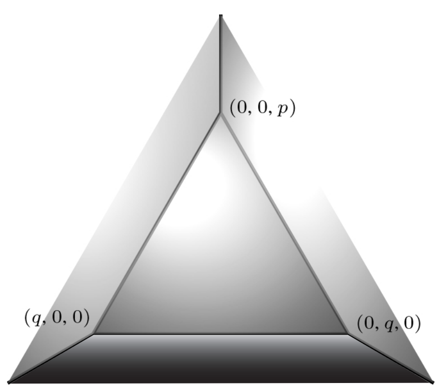

Figure 1. — Polyèdre de Newton $\Gamma(\mathrm{f})$.

Soit H un plan de $\mathbb{R}^3$ qui ne contient pas l'origine de $\mathbb{R}^3$ et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ soit un ensemble compact. La Figure 2 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* (autrement dit, vecteur primitif d'un cône de dimension 1 de l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{f})$) correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$) et (p,p,q).

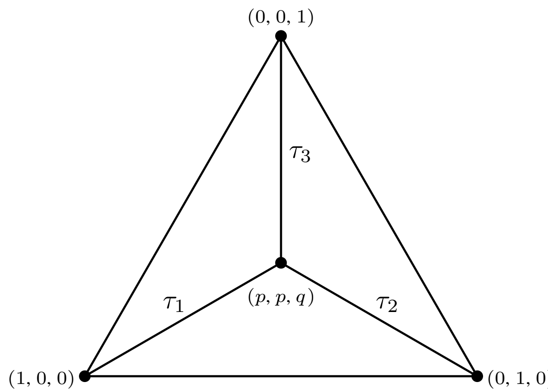

Figure 2. — Éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$.

La proposition suivante résulte d'un calcul direct.

Proposition 2.3. — *Le cônes τ_1 et τ_2 sont réguliers.*

Soit $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ une *G-subdivision régulière* de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$, c'est-à-dire une subdivision régulière de chaque cône $\tau \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$ n'ayant comme arêtes que celles qui portent les vecteurs du système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. D'après [BGS95], cette subdivision existe.

On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to X(\Gamma^\star(\mathrm{f}))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ (resp. $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de $\mathrm{S(p,h_q)}$ associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$ Par abus de notation, on note $\pi : S_{\mathcal{G}} \to \mathrm{S(p,h_q)}$ la restriction du morphisme $\pi : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ à $S_{\mathcal{G}}$.

Soit k, un entier $k \geqslant 1$. Pour un ensemble d'entiers $m_i \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, on note $[m_1; m_2; \cdots; m_k]$ la fraction continue définie de la façon suivante :

$$[m_k] := m_k,\ [m_{k-1}; m_k] := m_{k-1} - \frac{1}{m_k} \text{ et}$$
$$[m_1; m_2; \cdots; m_k] := m_1 - \frac{1}{[m_2; \cdots; m_k]}.$$

La proposition suivante est une application directe du Théorème 6.1 de [Oka87].

Proposition 2.4. — *$S_{\mathcal{G}}$ est une bonne résolution de* $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ *et son graphe dual pondéré est une étoile à q branches identiques. Le diagramme de chaque branche est le suivant :*

$$E_0^2 \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\underset{-m_k}{\bullet}\cdots\underset{-m_2}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\underset{-m_1}{\bullet},$$

où E_0 *le diviseur associé au sommet central du graphe et les entiers $m_i \geqslant 2$ (resp. l'entier k) sont définis (resp. est défini) de la façon suivante :*

si $q > p$ et $q = np + r$ la division entière, $1 \leqslant r < p$, alors on a

$$\frac{p}{p-r} = [m_1; m_2; \cdots; m_k];$$

si $p > q$ et $p = nq + r$, la division entière $1 \leqslant r < q$ (resp. $n \geqslant 1$), alors on a

$$\frac{p}{p-q} = [m_1; m_2; \cdots; m_k].$$

De plus, cette résolution est minimale si et seulement si $p \not\equiv 1 \bmod q$.

Corollaire 2.5. — *Si $p \equiv 1 \bmod q$, seul le diviseur* E_0 *n'est pas un diviseur essentiel sur* $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

Démonstration. — Soit $n \geqslant 1$ tel que $p = nq + 1$. En vertu de la Proposition 2.4, on a

$$\frac{p}{p-q} = \frac{nq+1}{(n-1)q+1} = 2 - \cfrac{1}{\ddots\, 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{q+1}}}.$$

En particulier l'entier k est égal à n, d'où le graphe dual de la résolution $\pi : \mathrm{S}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ a $nq + 1$ sommets. D'après la Proposition 2.1, il n'y a que un diviseur de la fibre exceptionnelle de π qui n'est pas un diviseur essentiel. D'après *le critère de contraction de Castelnuovo*, ce diviseur a une auto-intersection égale à -1.

Comme les branches du graphe dual de la résolution $\pi : \mathrm{S}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ sont identiques, forcement le diviseur E_0 a une auto-intersection égal à -1, d'où le corollaire. $\square$

Un polynôme $\mathrm{g} = \sum c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$, où $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $c_e \in \mathbf{k}$, est appelé *non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton* si pour toute face compacte γ de $\Gamma^\star(\mathrm{g})$ le polynôme $\mathrm{g}_\gamma := \sum_{e\in\gamma} c_e x^{e_1} y^{e_2} z^{e_3}$ est non singulier sur le tore $T := \mathrm{N} \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbf{k}$, c'est-à-dire les polynômes g_γ, $\partial_x \mathrm{g}_\gamma$, $\partial_y \mathrm{g}_\gamma$, $\partial_z \mathrm{g}_\gamma$ n'ont pas de zéro commun en dehors de l'ensemble $xyz = 0$.

Dans la proposition suivante on suppose que S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, donnée par l'équation $\mathrm{g} = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(\mathrm{g})$. De plus, on suppose que O est l'unique point singulier de S.

On considère une G-subdivision régulière $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ de l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{g})$. On note $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ du cône $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ et X le transformé strict de S dans $X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}})$. Par abus de notation, on note $\pi' : X \to S$ la restriction du morphisme $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ à X.

La proposition suivante résulte des Lemmes 10.2 et 10.3 de [Var76] (pour avoir plus de détails, voir [Mer80]) ou du Théorème principal et de la Remarque *a*) de la Section 4 de [GSLJ91].

Proposition 2.6. — *Le morphisme $\pi' : X \to S$ est une désingularisation de S.*

Si l'hypersurface S ne contient pas de T-orbite de dimension 1*, alors le morphisme $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\boldsymbol{k}}$ est une résolution plongée de S, c'est-à-dire $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\boldsymbol{k}}$ est un morphisme propre et birationnel, $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \backslash (\pi')^{-1}(O) \to \mathbb{A}^3_{\boldsymbol{k}} \backslash \{O\}$ est un isomorphisme et $(\pi')^{-1}(S)$ est un diviseur à croisements normaux.*

On remarque que le polynôme $\mathrm{f} := z^p + \mathrm{h_q}(x, y)$ est non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton et que l'hypersurface $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ ne contient pas de T-orbite de dimension 1 (voir la Remarque 1).

Corollaire 2.7. — *Le morphisme $\pi : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\boldsymbol{k}}$ est une résolution plongée de* $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$

La proposition suivante établit une relation entre le morphisme $\pi : \mathrm{S}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ et le morphisme $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ (voir les Propositions 2.1 et 2.4).

PROPOSITION 2.8. — *Si $p > q$, le morphisme $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ factorise le morphisme $\pi : \mathrm{S}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, c'est-à-dire il existe un morphisme $\pi_0 : \mathrm{S}_{\mathcal{G}} \to S_{\mathcal{C}}$ tel que $\pi = \sigma_n \circ \pi_0$.*

Démonstration. — Dans la preuve de cette proposition, on peut appliquer le Lemme 2.2 car ses hypothèses sont vérifiées.

On remarque que

$$(1,1,1) = \frac{(p,p,q) + (p-q)(0,0,1)}{p}$$

et que le cône engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ et $(1,1,1)$ est régulier. Par conséquent, le vecteur $(1,1,1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$, où τ_3 est le cône engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ et (p,p,q) (voir la Figure 2).

On remarque aussi que l'éventail obtenu par l'éclatement de Newton de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ associé à $\mathrm{f} = z^p + \mathrm{h_q}(x,y)$ suivi de la subdivision élémentaire centrée en $(1,1,1)$, coïncide avec celui obtenu par l'éclatement de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ de centre le point O suivi de l'éclatement de Newton de U_3 associé à $z_3^{p-q} + \mathrm{h_q}(x_3, y_3)$ (voir le Lemme 2.2).

Soit $p = nq + r$ la division entière, $1 \leqslant r < q$. En utilisant la remarque ci-dessus et le Lemme 2.2, la proposition résulte d'une récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$. $\square$

Dans la proposition suivante, on suppose que S est une hypersurface quasi-homogène de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $\mathrm{g} = 0$, où g est un polynôme quasi-homogène et irréductible, que O est l'unique point singulier de l'hypersurface S et que S ne contient pas de T-orbite de dimension 1.

D'après la proposition 2.6, le morphisme $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ est une résolution plongée de S. On note X le transformé strict de S dans $X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}})$. Par abus de notation, on note $\pi' : X \to S$ la restriction du morphisme $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ à X.

Pour ρ un *vecteur extrémal* de $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ (c'est-à-dire ρ est un vecteur primitif d'un cône de dimension 1 qui appartient à l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$), on note D_ρ l'orbite fermée associée à ρ. Notons $E\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des vecteurs extrémaux de $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$, et $S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$ le 2-squelette de $\Gamma^\star(\mathrm{g})$ (c'est-à-dire $S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$ est la réunion des cônes de dimension 2 qui appartiennent à l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})$).

La proposition suivante donne des équations locales pour les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de la désingularisation $\pi' : X \to S$.

Dans le cas $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, on rappelle que E_0 est le diviseur associé au sommet central du graphe induit par π.

PROPOSITION 2.9. — *Soit ρ un vecteur extrémal de $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ ($\rho \in E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$). Alors, on a :*

i) l'intersection $\mathrm{D}\rho \cap X$ n'est pas vide si et seulement si ρ appartient au 2-squelette de l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{g})$, c'est-à-dire $\rho \in S^2\Gamma^\star(\mathrm{g}) \cap E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$;

ii) les composantes irréductibles de $\mathrm{D}\rho \cap X$ sont diviseurs exceptionnels du morphisme $\pi' : X \to S$ si et seulement si de plus $\rho \in \mathbb{Z}^3_{>0}$;

iii) une composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de π' étant donnée, il existe un unique $\rho \in E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ tel que $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}\rho$;

iv) si $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, alors $\mathrm{E}_0 = \mathrm{D}(p,p,q) \cap \mathrm{S}_{\mathcal{G}}$;

v) si $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, alors l'ensemble formé par le vecteur $(0,0,1)$ et les vecteurs $\rho \in E\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ tels que les composantes irréductibles de $\mathrm{D}\rho \cap \mathrm{S}_{\mathcal{G}}$ sont diviseurs exceptionnels de π est le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ et (p,p,q).

Remarque 2. — Les résultats de l'article [Oka87] reposent sur la construction d'une subdivision régulière Σ de l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})$. Cette construction est longue à définir, or quand le polynôme g est quasi-homogène, on peut supposer que Σ est une G-subdivision régulière de l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})$.

Démonstration. — Les points *i),ii),iii)* et *iv)* de la proposition résultent de la Remarque 4.3 et du Lemme 4.7 de [Oka87]. Le point *v)* résulte des points *i)*, *ii)* et de la Proposition 2.3. $\square$

2.2. Preuve du Théorème 1.1.

Dans cette section, on montre la bijectivité de l'application de Nash pour les hypersurfaces quasi-rationnelles $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ (voir [Reg06]). Notre but, dans toute la suite de cette section, est de montrer que pour chaque diviseur essentiel E ($\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q}))$) tous les K-wedges admissibles centrés en N_{E} se relèvent à la résolution minimale de $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$.

De plus, on profite de démontrer quelques résultats qu'on utilise dans toutes les sections de cet article.

Avec le théorème suivant on réduit le nombre de cas à étudier. Une preuve de ce résultat, dans le cas des singularités de surfaces rationnelles, se trouve dans [Plé05].

THÉORÈME 2.10. — *Soient V une surface algébrique normale sur $\boldsymbol{k}$ et $\pi : Y \to V$ la résolution minimale de V. Supposons qu'il existe un morphisme propre et birationnel $\pi' : V' \to V$, où V' est une surface algébrique normale sur $\boldsymbol{k}$, tel que π' factorise π. Alors, si l'application de Nash $\mathcal{N}_V$ associée à V est bijective, l'application de Nash $\mathcal{N}_{V'}$ associée à V' l'est aussi.*

Démonstration. — On remarque que Y est la résolution minimale de V'. Si ω est un K-wedge sur V', alors $\pi' \circ \omega$ est un K-wedge admissible sur V. Par conséquent, $\pi' \circ \omega$ se relève à Y, d'où le Théorème. □

En vertu des résultats 2.1, 2.8 et 2.10, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.11. — *Si l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathrm{S(p,h_q)}}$ associée à l'hypersurface $\mathrm{S(p,h_q)}$ est bijective pour tous les entiers $p > q \geqslant 3$, premiers entre eux, alors l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathrm{S(p,h_q)}}$ est bijective pour tous les entiers $p \geqslant 2$ $q \geqslant 2$, premiers entre eux.*

Remarque 3. — Dans toute la suite, on suppose que $p > q \geqslant 3$.

Dans la proposition suivante, S désigne l'hypersurface de la Proposition 2.9, E désigne un diviseur essentiel sur S et α_{E} désigne le point générique de N_{E}. On pose

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(x), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(y), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(z)) \in \mathbb{Z}^3_{>0}.$$

PROPOSITION 2.12. — *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'intersection de l'ensemble $E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ des extrémaux de $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ avec le 2-squelette $S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$ de l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{g})$, c'est-à-dire $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}} \cap S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$.*

Démonstration. — Dans la démonstration, on utilise les notations usuelles de variétés toriques (voir [KKMS73]).

Soit $\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$. En vertu de la Proposition 2.9, il existe un unique vecteur extrémal ρ_1 appartenant à $S_2\Gamma^\star(\mathrm{g}) \cap E\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ tel que $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}_{\rho_1}$. Soient ρ_2 et ρ_3 deux vecteurs extrémaux de $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ adjacents à ρ_1, c'est-à-dire il existe un cône $\sigma \in \Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ de dimension 3 tel que les vecteurs ρ_1, ρ_2

et ρ_3 sont vecteurs extrémaux de σ. On remarque que le point générique de E n'est pas contenu dans D_{ρ_2} ou D_{ρ_3}.

Pour un vecteur $m = (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on note $\chi^m(t_1, t_2, t_3) = t_1^a t_2^b t_3^c$ le caractère associé à m. Soient U_σ l'ouvert torique de $X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_\mathcal{G})$ associé à σ et χ^{m_i} le caractère qui définit une équation de $\mathrm{D}_{\rho_i} \cap U_\sigma$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors, on a $m_i \cdot \rho_j = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Quitte à remplacer les vecteurs ρ_2, ρ_3, on peut supposer que $U_\sigma \cap E \neq \emptyset$.

On considère l'unique relèvement $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}$ à X du point générique α_E de N_E (on rappelle que X est le transformé strict de S dans $X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_\mathcal{G})$). On remarque que $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}(0)$ est le point générique de E et que le $\mathbf{k}_\alpha$-arc $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}$ est transverse à E, c'est-à-dire $\mathrm{Ord}_t f \circ \widehat{\alpha}_\mathrm{E} = 1$, où f est une équation locale de E.

D'après la Proposition 2.6, le morphisme $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_\mathcal{G}) \to \mathbb{A}^3_\mathbf{k}$ est une résolution plongée de S. En particulier X est transverse au diviseur D_{ρ_1}. Comme le $\mathbf{k}_\alpha$-arc $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}$ est transverse à E, le $\mathbf{k}_\alpha$-arc $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}$ est transverse à D_{ρ_1}. Par conséquent, on obtient que $m_i \cdot (\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \delta_{i1}$, car $\widehat{\alpha}_\mathrm{E}(0)$ n'est pas contenu dans D_{ρ_2} ou D_{ρ_3}. Ceci implique que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \rho_1$, d'où la proposition. □

Corollaire 2.13. — *On conserve les hypothèses et notations de la Proposition 2.12 et on suppose que $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$. Alors, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0, 0, 1)$ et (p, p, q). En particulier, on a $\mu_x = \mu_y \leqslant p$, $\mu_z \leqslant q$ et $p\mu_z - q\mu_x \geqslant 0$.*

Démonstration. — Le corollaire résulte des Propositions 2.9 et 2.12. □

Dans la proposition suivante on suppose que S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_\mathbf{k}$, donnée par l'équation $\mathrm{g} = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(\mathrm{g})$. De plus, on suppose que O est l'unique point singulier de S.

On considère un diviseur essentiel E sur S et un K-wedge admissible, $\omega : \mathrm{Spec}K[[s, t]] \to S$, centré en N_E. On pose

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\mathrm{Ord}_t \omega^\star(x), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(y), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^\star(x) = t^{\eta_x} \chi \; ; \; \omega^\star(y) = t^{\eta_y} \varphi \; ; \; \omega^\star(z) = t^{\eta_z} \psi,$$

où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s,t]]$ qui ne sont pas divisibles par t.

Maintenant, on donne la proposition clé pour la preuve du théorème 1.1.

PROPOSITION 2.14. — *Si les séries formelles χ,φ et ψ sont inversibles, alors le K-wedge admissible ω centré en N_{E} se relève à la résolution minimale de S.*

Démonstration. — On considère une G-subdivision régulière $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ de l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{g})$ et on note $\pi' : X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ du cône $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. On note X le transformé strict de S dans $X(\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}})$. D'après la proposition 2.6, le morphisme $\pi' : X \to S$ est une désingularisation de X.

En vertu de la *version torique du Lemme de Chow* (voir [Sum74]), il existe une subdivision Σ d'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})_{\mathcal{G}}$ tel que le morphisme torique $\pi'' : X(\Sigma) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$, (le morphisme π'' est induit par la subdivision Σ du cône $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$) est un morphisme projectif, la variété $X(\Sigma)$ est quasi-projective et π' factorise π''. Par conséquent, il existe un idéal monomial $\mathcal{I} \subset \mathbf{k}[x,y,z]$ tel que $X(\Sigma)$ est l'éclatement de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ de centre l'idéal $\mathcal{I}$.

Comme les séries formelles χ,φ et ψ sont inversibles et l'idéal $\mathcal{I}$ est monomial, l'idéal $\omega^{-1}\mathcal{I} \cdot K[[s,t]]$ est inversible. En vertu de la *propriété universelle de l'éclatement*, le morphisme ω se relève à $X(\Sigma)$. Par conséquent ω se relève à X. Ceci implique que le K-wedge ω se relève à résolution minimale de S. $\square$

Maintenant, on donne quelques notions et résultats techniques qui nous permettent de montrer, dans le cas $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$, que les séries formelles χ,φ et ψ sont inversibles.

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1,e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1,e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$\nu : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, v \mapsto \nu_v \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}$, où $\mathcal{E}(\phi) = \{(e_1,e_2) \mid c_{(e_1,e_2)} \neq 0\}$;

$\mathrm{PPr} : \mathbb{R}^2_{>0} \to K[s,t], v \mapsto \phi_v := \sum\limits_{e \,\cdot\, v \,=\, \nu_v \phi} c_{(e_1,e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$;

$\mathrm{FI} : K[[s,t]] \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, où $\mathrm{FI}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Un vecteur $v \in \mathbb{R}^2_{>0}$ définit une graduation positive sur l'anneau $K[[s,t]]$. Cette graduation est appelée *v-graduation*. Pour une série formelle ϕ, le polynôme ϕ_v est la partie principale de ϕ pour la v-graduation. Le polynôme ϕ_v est appelé la *v-partie principale* de ϕ.

Soient $\phi, \phi' \in K[[s,t]]$ deux séries formelles non nulles. Les séries formelles ϕ et ϕ' sont associées (resp. non associées) s'il existe (resp. s'il n'existe pas) une série formelle $I \in K[[s,t]]$ inversible tel que $\phi = I\phi'$.

Proposition 2.15. — *On conserve les hypothèses et notations de la Proposition 2.14. Alors, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ tel que :*

$$\mathrm{FI}(\chi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\chi_v = \nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\varphi_v = \nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\psi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\psi_v = \nu_v\psi = \mu_z - \eta_z.$$

De plus, χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0$, $\mu_z - \eta_z = 0$).

Démonstration. — Soit $\phi \in K[[s,t]]$ une série formelle non nulle et on suppose que

$$\phi = I\phi_1^{m_1}\cdots\phi_n^{m_n},\ n \geqslant 1,$$

où les entiers m_i sont strictement positifs et les ϕ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées. Alors, on a :

$$\phi_v = ((\phi_1)_v)^{m_1}\cdots((\phi_n)_v)^{m_n}, \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^2_{>0}.$$

Par conséquent $\mathrm{FI}(\phi) \leqslant \mathrm{FI}(\phi_v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2_{>0}$. On remarque que les $(\phi_i)_v$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas nécessairement irréductibles.

Dans la suite on cherche un vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ tel que

$$\mathrm{FI}(\chi_v) = \mathrm{Deg}_t\chi_v = \nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\varphi_v) = \mathrm{Deg}_t\varphi_v = \nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\psi_v) = \mathrm{Deg}_t\psi_v = \nu_v\psi = \mu_z - \eta_z.$$

On rappelle les notations suivantes :

- $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to S$ est un K-wedge admissible centré en N_{E} ;
- α_{E} est le point générique de N_{E} et $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t\alpha^\star_{\mathrm{E}}(x), \mathrm{Ord}_t\alpha^\star_{\mathrm{E}}(y), \mathrm{Ord}_t\alpha^\star_{\mathrm{E}}(z))$;

- $\omega^\star(x) = t^{\eta_x}\chi$; $\omega^\star(y) = t^{\eta_y}\varphi$; $\omega^\star(z) = t^{\eta_z}\psi$, où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s,t]]$ qui ne sont pas divisibles par t.

On remarque qu'on peut écrire le comorphisme du K-wedge ω de la façon suivante :

$$(\star)\begin{cases} \omega^\star(x) &= \displaystyle\sum_{\eta_x \leqslant i < \mu_x} a_i s^{l_i} t^i + \sum_{\mu_x \leqslant i} a_i t^i; \\ \omega^\star(y) &= \displaystyle\sum_{\eta_y \leqslant j < \mu_y} b_j s^{m_j} t^j + \sum_{\mu_y \leqslant j} b_j t^j; \\ \omega^\star(z) &= \displaystyle\sum_{\eta_z \leqslant k < \mu_z} c_k s^{n_k} t^k + \sum_{\mu_x \leqslant k} c_k t^k, \end{cases}$$

où les exposants l_i (resp. m_j, n_k) sont strictement positifs et les séries formelles $a_i, b_j, c_k \in K[[s]]$ sont inversibles pour $(i,j,k) \in \{(\eta_x, \eta_y, \eta_z), (\mu_x, \mu_y, \mu_z)\}$ et inversibles ou nulles pour $\eta_x < i < \mu_x$, $\eta_y < j < \mu_y$, $\eta_z < k < \mu_z$. En effet, soit $\lambda_0 : \mathrm{Spec}K[[t]] \to \mathrm{Spec}K[[s,t]]$ le morphisme induit par l'homomorphisme canonique $K[[s,t]] \to K[[s,t]]/(s) = K[[t]]$. On pose $\alpha := \omega \circ \lambda_0$. Comme ω est un K-wedge admissible centré en N_{E} et d'après la propriété fonctorielle de l'espace d'arcs S_∞, on a $\alpha = \alpha_{\mathrm{E}} \circ \lambda_1$, où $\lambda_1 : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to \mathbf{k}_{\alpha_{\mathrm{E}}}[[s,t]]$ est un morphisme induit par une inclusion $\mathbf{k}_{\alpha_{\mathrm{E}}} \hookrightarrow K$. Comme $\alpha = \alpha_{\mathrm{E}} \circ \lambda_1$, on a $(\mathrm{Ord}_t \alpha^\star(x), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star(y), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star(z)) = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$, d'où les séries formelles $(\star)$.

Soit $v = (u, 1) \in \mathbb{Q}^2_{>0}$. Si u est « assez grand », alors $\chi_v = a t^{\mu_x - \eta_x}$, $\varphi_v = b t^{\mu_y - \eta_y}$ et $\psi_v = c t^{\mu_z - \eta_z}$, où a, (resp. b , c) est le terme constant de la série formelle inversible a_{μ_x} (resp. b_{μ_y}, c_{μ_z}). Ceci achève la preuve de la Proposition 2.15.

On remarque que les série formelle χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\chi_v \in K\backslash\{0\}$ (resp. $\varphi_v \in K\backslash\{0\}$, $\phi_v \in K\backslash\{0\}$). Par conséquent χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0$, $\mu_z - \eta_z = 0$). $\square$

Dans la proposition suivante, on considère l'hypersurface $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ et on majore, en termes des entiers p et q, le nombre des facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ qui sont associées au K-wedge admissible $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ centré en N_{E}.

Proposition 2.16. — *On conserve les hypothèses et notations des Propositions 2.14 et 2.15. De plus, on suppose que* $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$. *Alors, on a :*

$$\mu_x - \eta_x \leqslant p - 1, \quad \mu_y - \eta_y \leqslant p - 1 \quad \text{et} \quad \mu_z - \eta_z \leqslant q - 1.$$

En particulier, on a $\mathrm{FI}(\chi) \leqslant p - 1$, $\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant p - 1$ *et* $\mathrm{FI}(\psi) \leqslant q - 1$.

Démonstration. — D'après la Proposition 2.15, si $\mu_x - \eta_x \leqslant p-1$, $\mu_y - \eta_y \leqslant p-1$ et $\mu_z - \eta_z \leqslant q-1$, alors $\mathrm{FI}(\chi) \leqslant p-1$, $\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant p-1$ et $\mathrm{FI}(\psi) \leqslant q-1$.

En vertu du Corollaire 2.13, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ et (p,p,q). Par conséquent, on a $\mu_x \leqslant p$, $\mu_y \leqslant p$ et $\mu_z \leqslant q$.

Comme ω est un K-wedge admissible centré en N_{E}, l'arc générique du K-wedge ω appartient à $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})^s_\infty$. Par conséquent, on obtient que $\eta_x \geqslant 1$, $\eta_y \geqslant 1$ et $\eta_z \geqslant 1$, d'où $\mu_x - \eta_x \leqslant p-1$, $\mu_y - \eta_y \leqslant p-1$ et $\mu_z - \eta_z \leqslant q-1$. $\square$

Dans la proposition suivante, S est l'hypersurface de la Proposition 2.14, c'est-à-dire S est une hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ ayant O comme unique point singulier et qui est donnée par l'équation $\mathrm{g} = 0$, où g est un polynôme irréductible non-dégénéré par rapport à la frontière de Newton $\Gamma(\mathrm{g})$.

On considère un diviseur essentiel E sur S et un K-wedge $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to S$ admissible centré en N_{E}. On note

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\mathrm{Ord}_t \omega^\star(x), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(y), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(z)).$$

Proposition 2.17. — *Le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intersection de $\mathbb{Z}^3_{>0}$ avec le 2-squelette $S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$ de l'éventail $\Gamma^\star(\mathrm{g})$.*

Démonstration. — Comme ω est un K-wedge admissible centré en N_{E}, l'arc générique de ω appartient à S^s_∞. Par conséquent, (η_x, η_y, η_z) appartient à $\mathbb{Z}^3_{>0}$. Il suffit donc de montrer que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2\Gamma^\star(\mathrm{g})$.

Pour un réel $u \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur suivant :

$$\nu_{(u,1)}\omega = (\nu_{(u,1)}\omega^\star(x), \nu_{(u,1)}\omega^\star(y), \nu_{(u,1)}\omega^\star(y)) \in \mathbb{R}^3_{>0}.$$

Ce vecteur définit une graduation sur l'anneau $\mathbf{k}[x,y,z]$. Soit $\mathrm{g}_u \in \mathbf{k}[x,y,z]$ la partie principale de g, par rapport à cette graduation.

Le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $\mathrm{g} = 0$, c'est-à-dire on a

$$\mathrm{g}(\omega^\star(x), \omega^\star(y), \omega^\star(z)) = 0,$$

ce qui implique que

$$\mathrm{g}_u((\omega^\star(x))_{(u,1)}, (\omega^\star(x))_{(u,1)}, (\omega^\star(x))_{(u,1)}) = 0.$$

Par conséquent, g_u n'est pas un monôme. Ceci implique que le vecteur $\nu_{(u,1)}\omega$ appartient au 2-squelette $S^2\Gamma^\star(\mathrm{g})$.

On remarque que $\lim\limits_{u\to 0} \nu_{(u,1)}\omega = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$. Soit $n >> 0$ un entier « assez grand » tel que $\eta_x < n,\ \ \eta_y < n,\ \ \eta_z < n$. Il existe alors un réel $u_0 > 0$ tel que

$$\nu_{(u,1)}\omega \in K_n := S_2\Gamma^\star(\mathrm{g}) \cap \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3_{\geqslant 0} \mid \ \lambda_j \leqslant n \text{ pour } j \in \{1,2,3\}\},$$

pour tout $u \leqslant u_0$. Comme K_n est compact, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2\Gamma^\star(\mathrm{f})$. $\square$

Corollaire 2.18. — *On conserve les hypothèses et notations des Propositions 2.15 et 2.17. De plus, on suppose que $S = \mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$. Alors, le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3_{\geqslant 0}$, où τ est le cône engendré par les vecteurs $(0,0,1)$ et (p,p,q). En particulier $\eta_x = \eta_y$ et $p\eta_z - q\eta_x \geqslant 0$. De plus, si les séries formelles χ,φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors on a $p\eta_z - q\eta_x > 0$.*

Démonstration. — Soit $S_2\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ le 2-squelette du cône $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. On rappelle que $\tau_1 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$ (resp. $\tau_2 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$, $\tau_3 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$) est le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (rep. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$) et (p,p,q) (voir la Figure 2). Remarquons que $S_2\Gamma^\star(\mathrm{f}) = \bigcup_{i=1}^3 \tau_i \cup S_2\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. En vertu de la Proposition 2.17, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2\Gamma^\star(\mathrm{f}) \cap \mathbb{Z}^3_{>0}$. Ce qui implique que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^3 \tau_i$.

D'après la Proposition 2.3, le cône τ_1 (resp. τ_2) est régulier. Par conséquent, le semi-groupe $\tau_1 \cap \mathbb{Z}^3$ (resp. $\tau_2 \cap \mathbb{Z}^3$) est engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$) et (p,p,q). En particulier, si $(a,b,c) \in \tau_1 \cap \mathbb{Z}^3_{>0}$ (resp. $(a,b,c) \in \tau_2 \cap \mathbb{Z}^3_{>0}$), alors $p \leqslant a$, $p \leqslant b$ et $q \leqslant c$.

On rappelle que le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$ (voir le Corollaire 2.13). Par conséquent, on a $\mu_x \leqslant p$, $\mu_y \leqslant p$ et $\mu_z \leqslant q$. Comme $\eta_x \leqslant \mu_x \leqslant p$, $\eta_y \leqslant \mu_y \leqslant p$ et $\eta_z \leqslant \mu_z \leqslant p$, on obtient que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient au cône $\tau = \tau_3$.

Si les séries formelles χ,φ et ψ ne sont pas simultanément inversibles, alors $p\eta_z - q\eta_x \neq 0$, car si $p\eta_z - q\eta_x = 0$, alors $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p,p,q)$, d'où les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (voir la Proposition 2.15). $\square$

Dans toute la suite de cette section, on se restreint au cas des hypersurfaces $\mathrm{S(p, h_q)}$, où les entiers $p > q \geqslant 3$ (voir la Remarque 3) sont premiers entre eux, c'est-à-dire, dans toute la suite, on a :

- E est un diviseur essentiel de $\mathrm{S(p, h_q)}$, $p > q \geqslant 3$;
- $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to \mathrm{S(p, h_q)}$ est un K-wedge admissible centré en N_{E} ;
- α_{E} est le point générique de N_{E} et $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t \alpha_{\mathrm{E}}^\star(x), \mathrm{Ord}_t \alpha_{\mathrm{E}}^\star(y), \mathrm{Ord}_t \alpha_{\mathrm{E}}^\star(z))$;
- $\omega^\star(x) = t^{\eta_x}\chi$; $\omega^\star(y) = t^{\eta_y}\varphi$; $\omega^\star(z) = t^{\eta_z}\psi$, où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s,t]]$ qui ne sont pas divisibles par t.

Soit $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$ (resp. $\Gamma_{(p,q)}$) l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}^2_{>0}$, où τ' est le cône engendré par $(0,1)$ et (μ_x, μ_z) (resp. $(0,1)$ et (p,q)). La figure suivante donne une idée intuitive de la forme du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$.

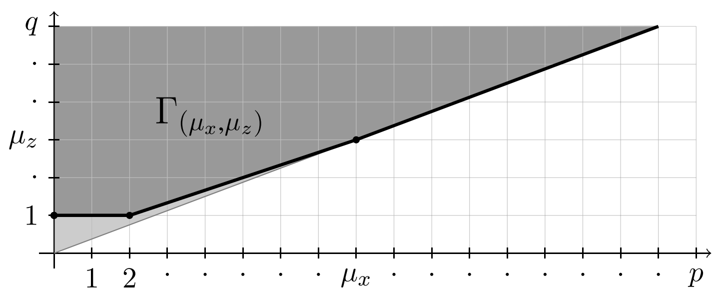

Figure 3. — Polyèdre $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$.

Proposition 2.19. — *Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2), $a_1 \leqslant a_2$, les coordonnés des sommets d'une face compacte du polyèdre $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$ et L la droite qui joint les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2). Alors la pente de la droite L est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$. De plus $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p,q)}$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0,1)$ et (μ_x, μ_z).*

Démonstration. — D'abord on suppose que $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$. On note $\Gamma = \Gamma_{(p,q)}$. Comme $p > q$, le vecteur $(1,1)$ appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$, où τ'' est le cône engendré par $(0,1)$ et (p,q) (voir la Figure 3). En particulier le vecteur $(1,1)$ appartient à une face compacte du polyèdre Γ. Comme la pente de la droite qui joint les points $(0,1)$ et $(1,1)$ est nulle et $1 < q$, on obtient que la pente de la droite L est un nombre réel positif, car Γ est convexe.

En raisonnant par l'absurde, on suppose que

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \geqslant \frac{q}{p},$$

d'où $p(b_2 - b_1) - q(a_2 - a_1) \geqslant 0$. Ceci implique que le vecteur $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ appartient au cône τ''. Or $(a_2, b_2) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) + (a_1, b_1)$, d'où une contradiction, car le vecteur (a_2, b_2) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau'' \cap \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$.

On a $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)} = \tau' \cap \Gamma_{(p,q)}$, car la pente de la droite qui joint les points $(0,0)$ et (μ_x, μ_z) est plus grande que $\frac{q}{p}$ et les pentes des droites qui définissent les faces compactes de $\Gamma_{(p,q)}$ sont strictement plus petites que $\frac{q}{p}$. $\square$

On définit l'application suivante :

$$\mathrm{m} : \Gamma_{(\mu_x,\mu_z)} \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto pv - qu.$$

Proposition 2.20. — *Il existe un vecteur $(u_0, v_0) \in \Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$ tel que*

$$\mathrm{m}(u_0, v_0) = \inf\{\mathrm{m}(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}\}.$$

De plus on a :

i) si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors (u_0, v_0) appartient au rayon engendré par le vecteur (p, q) ;

ii) si $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$, alors $(u_0, v_0) = (\mu_x, \mu_z)$.

Démonstration. — Le vecteur (μ_x, μ_z) étant fixé, on note $\Gamma = \Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$.

Géométriquement, lorsque c croît depuis $-\infty$, les droites $L_c := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (-q, p) \cdot (u, v) = c\}$ finissent par toucher le bord du polyèdre Γ en un point (u_0, v_0). On remarque que $\mathrm{m}(u_0, v_0) = \inf\{\mathrm{m}(u, v) \mid (u, v) \in \Gamma\}$ et que l'ensemble $M := \{(u, v) \in \Gamma \mid \mathrm{m}(u, v) = \mathrm{m}(u_0, v_0)\}$ est une face ou un sommet de Γ.

On rappelle que pour tout vecteur $(u, v) \in \Gamma$ on a $pv - qu \geqslant 0$. Si $(\mu_x, \mu_z) = (p, q)$, alors $L_0 \cap \Gamma$ est la face non compacte engendrée par le vecteur (p, q), d'où le point $i)$ de la proposition. Maintenant, on suppose que $(\mu_x, \mu_z) \neq (p, q)$. La pente de la droite L' qui joint les points $(0, 0)$ et (μ_x, μ_z) est strictement plus grande que $\frac{q}{p}$, donc toute droite L_c pour $c \in \mathbb{R}$

intersecte en exactement un point la droite L'. Par conséquent, le couple (u_0, v_0) appartient à une face compacte de Γ. D'après la Proposition 2.19, si L est une droite engendrée par une face de Γ, alors la pente de L est strictement plus petite que $\frac{q}{p}$. Comme la pente des droites L_c, $c \in \mathbb{R}$, est $\frac{q}{p}$, on obtient que l'ensemble M est un sommet de Γ.

Soit n_Γ le nombre de faces compactes de Γ. On rappelle que Γ est l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}^2_{>0}$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0,1)$ et (μ_x, μ_z). Alors, il existe deux suites d'entiers

$$0 = a_0 < a_1 \cdots < a_{n_\Gamma} = \mu_x \text{ et } 1 = b_0 < b_1 \cdots < b_{n_\Gamma} = \mu_z,$$

tels que les couples (a_i, b_i), $0 \leqslant i \leqslant n_\Gamma$, sont les coordonnées des sommets consécutifs de Γ.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n_\Gamma$, on note L_i la droite qui joint les points (a_{i-1}, b_{i-1}) et (a_i, b_i) et posons c_i (resp c_0) le réel tel que la droite L_{c_i} (resp. L_{c_0}) intersecte la droite L_i (resp. L_1) en le point (a_i, b_i) (resp. $(0,1)$).

En vertu de la Proposition 2.19, on a $c_i < c_{i-1}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n_\Gamma$ (la pente de la droite L_i, $0 \leqslant i \leqslant n_\Gamma$, est positive et strictement plus petite que $\frac{q}{p}$). Comme $\mathrm{m}(a_i, b_i) = c_i$, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n_\Gamma$, on obtient que $\mathrm{m}(\mu_x, \mu_z) < \mathrm{m}(a_i, b_i)$, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n_\Gamma - 1$. Ceci achève la preuve de la proposition. $\square$

Proposition 2.21. — *Le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$.*

Démonstration. — En vertu du Corollaire 2.18 le vecteur (η_x, η_z) appartient au cône τ'' engendré par les vecteurs $(0,1)$ et (p,q). Par conséquent, le vecteur (η_x, η_z) appartient au polyèdre $\Gamma_{(p,q)}$.

En raisonnant par l'absurde si le vecteur (η_x, η_z) n'appartient pas au polyèdre $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$, alors ce vecteur appartient à l'intersection Ω du cône τ'' et l'intérieur du triangle définit par les vecteurs $(0,0)$, (μ_x, μ_z) et $(\mu_x, 0)$ car $\eta_x \leqslant \mu_x$, $\eta_z \leqslant \mu_z$ et $\Gamma_{(\mu_x, \mu_z)}$ est l'enveloppe convexe de $\tau' \cap \mathbb{Z}^2_{>0}$, où τ' est le cône engendré par les vecteurs $(0,1)$ et (μ_x, μ_z). Mais d'après la Proposition 2.19, l'intersection du polyèdre $\Gamma_{(p,q)}$ et l'ensemble Ω est vide, d'où une contradiction. $\square$

On rappelle qu'on veut montrer que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (Proposition 2.14). Le résultat suivant est une réduction du problème.

Proposition 2.22. — *Si χ ou φ est une série formelle inversible, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles*

Démonstration. — D'après les résultats 2.13, 2.15 et 2.18, on obtient que la série χ est inversible si et seulement si φ est inversible. Supposons que χ soit inversible, on a donc $\mu_x = \eta_x$ (Proposition 2.15). Comme on a $\eta_z \leqslant \mu_z$ et $\eta_x = \mu_x$, on a $p\eta_z - q\eta_x \leqslant p\mu_z - q\mu_x$. En vertu des Propositions 2.20 et 2.21, on obtient que $\mu_z = \eta_z$. La proposition résulte de la Proposition 2.15. $\square$

Soit $\mathrm{h_q}(x,y) = \prod_{i=1}^{q}(a_i x + b_i y)$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathrm{h_q}$. Le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $z^p = -\mathrm{h_q}(x,y)$ donc :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\psi^p = -\mathrm{h_q}(\chi,\varphi) = -\textstyle\prod_{i=1}^{q}\gamma_i,\text{ où } \gamma_i := a_i\chi + b_i\varphi.$$

Les combinaisons linéaires de χ et φ données par les γ_i plus l'hypothèse sur les facteurs irréductibles de $\mathrm{h_q}$ permettent de montrer le lemme suivant.

Lemme 2.23. — *Soit* $\lambda := \mathrm{p.g.c.d}(\gamma_1,\gamma_2)$. *Alors* $\mathrm{p.g.c.d}(\gamma_\mathrm{i},\gamma_\mathrm{j}) = \lambda I_{ij}$, *où* I_{ij} *est inversible pour tous les entiers* $1 \leqslant i < j \leqslant q$. *De plus, si* λ *est inversible, alors* χ, φ *et* ψ *sont inversibles.*

Démonstration. — Soit $\lambda_0 := \mathrm{p.g.c.d}(\gamma_{\mathrm{i_0}},\gamma_{\mathrm{j_0}})$, où i_0 et j_0 sont deux entiers tels que $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant q$. Si λ_0 n'est pas inversible, alors λ_0 divise χ et φ. Par conséquent, λ_0 divise $\mathrm{p.g.c.d}(\gamma_\mathrm{i},\gamma_\mathrm{j})$ pour tous les entiers i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant q$. Ce qui achève la première partie du lemme.

Pour la deuxième partie de la proposition on suppose que la série formelle λ est inversible.

Raisonnons par l'absurde. En vertu de la Proposition 2.22, les séries χ et φ ne sont pas inversibles. Par conséquent, la série γ_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, n'est pas inversible. On rappelle que les séries formelles χ, φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\psi^p = -\mathrm{h_q}(\chi,\varphi) = -\textstyle\prod_{i=1}^{q}\gamma_i,\text{ où } \gamma_i := a_i\chi + b_i\varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t, t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i, on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1. Soit $\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma_1'$.

Comme $\mathrm{p.g.c.d}(\gamma_\mathrm{i},\gamma_\mathrm{j})$ est inversible pour tout $2 \leqslant i < j \leqslant q$, la série formelle $\gamma_1' \prod_{i=2}^{q}\gamma_i$ a au moins $q-1$ facteurs irréductibles deux à deux non associés.

Comme $\psi^p = \gamma_1' \prod_{i=2}^{q}\gamma_i$, la série formelle $\gamma_1' \prod_{i=2}^{q}\gamma_i$ est le produit de $q-1$ puissances de séries formelles irréductibles deux à deux non-associées, car $\mathrm{FI}(\psi) \leqslant q-1$ (Proposition 2.16). Par conséquent, on obtient que γ_1' est inversible, que la série γ_i, $2 \leqslant i \leqslant q$, est une puissance d'une série formelle irréductible et que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées. Par conséquent, on peut supposer que $\gamma_{i+1} = \psi_i^p I_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant q-1$, où les séries formelles I_i sont inversibles. Comme $\gamma_i = a_i\chi + b_i\varphi$, $1 \leqslant i \leqslant q$, et $q \geqslant 3$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma_1' = aI_1\psi_1^p + bI_2\psi_2^p.$$

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s,t]]$ est inversible si et seulement si elle l'est dans $\overline{K}[[s,t]]$, où $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K. Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles dans $\overline{K}[[s,t]]$ telles que $J_1^p = aI_1$ et $J_2^p = bI_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma_1' = \prod_{i=1}^{p}(J_1\psi_1 + w_i J_2\psi_2),$$

où les w_i sont les racines p-ièmes de l'unité. Mais γ_1' est inversible et $p\eta_z - q\eta_x > 0$ (Proposition 2.18), donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t, ce qui est absurde. $\square$

La proposition suivante achève la preuve du Théorème 1.1 (voir la Proposition 2.14).

Proposition 2.24. — *Les séries formelles χ, φ, ψ sont inversibles.*

Démonstration. — En raisonnant par l'absurde, on suppose les séries formelles χ, φ et ψ non toutes inversibles. D'après le corollaire 2.18, on a $p\eta_z - q\eta_x > 0$.

On rappelle que les séries formelles χ, φ et ψ satisfont la relation suivante :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\psi^p = -\mathrm{h_q}(\chi,\varphi) = -\textstyle\prod_{i=1}^{q}\gamma_i, \text{ où } \gamma_i := a_i\chi + b_i\varphi.$$

Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t, t divise γ_i si et seulement si t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i, on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1.

D'après le Lemme 2.23, il existe des séries formelles γ_i' telles que :

$$\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma_1'\lambda \text{ et } \gamma_i = \gamma_i'\lambda \text{ pour } 2 \leqslant i \leqslant q,$$

où λ n'est pas inversible et $\mathrm{p.g.c.d}(\gamma_{\mathrm{i}}', \gamma_{\mathrm{j}}')$ est inversible pour $1 \leqslant i < j \leqslant q$.

Le lemme suivant est le résultat clé pour la preuve de la Proposition 2.24.

Dans toute la suite v, désigne le vecteur de la Proposition 2.15.

Lemme 2.25. — *Le v-ordre de λ est $\mu_x - \eta_x$, c'est-à-dire $\nu_v\lambda = \mu_x - \eta_x$.*

D'abord finissons la preuve de la Proposition 2.24. On rappelle que $\eta_y = \eta_x \leqslant \mu_x = \mu_y \leqslant p$, $\eta_z \leqslant \mu_z \leqslant q$ (voir le Corollaire 2.13) et que (η_x, η_z) appartient à l'enveloppe convexe $\Gamma_{(\mu_x,\mu_z)}$ (voir la Proposition 2.21) de l'ensemble $\tau' \cap \mathbb{Z}^2_{>0}$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z). Soit $\gamma' = \prod_{i=1}^{q} \gamma'_i$, d'où $\psi^p = \gamma'\lambda^q$. D'après le Lemme 2.25, on a $\nu_v\gamma' = p\mu_z - q\mu_x - (p\eta_z - q\eta_x)$. Par définition $\nu_v\gamma' \geqslant 0$. Or $\nu_v\gamma' \geqslant 0$ si et seulement si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$ (Proposition 2.20), d'où une contradiction. En effet, si $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (voir les Propositions 2.15 et 2.22).

Démonstration du Lemme 2.25. — On rappelle que $\gamma_i = a_i\chi + b_i\varphi$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Alors, il existe au plus un $1 \leqslant i_0 \leqslant q$ tel que les v-parties principales χ_v, φ_v satisfont la relation $a_{i_0}\chi_v + b_{i_0}\varphi_v = 0$. En particulier on a $\nu_v\gamma_i = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$ tel que $i \neq i_0$. Par conséquent, $\nu_v\lambda \leqslant \mu_x - \eta_x$.

Si $\nu_v\lambda < \mu_x - \eta_x$, alors $\nu_v\gamma'_i > 0$, pour tout $2 \leqslant i \leqslant q$. Ceci implique que les γ'_i, pour $2 \leqslant i \leqslant q$, ne sont pas inversibles.

Comme p.g.c.d$(\gamma'_{\mathrm{i}}, \gamma'_{\mathrm{j}})$ est inversible pour tous les entiers i, j tels que $2 \leqslant i < j \leqslant q$, la série formelle $\gamma' = \prod_{i=1}^{q} \gamma'_i$ a au moins $q - 1$ facteurs irréductibles deux à deux non associés. Comme on a $\psi^p = \gamma'\lambda^q$, la série formelle γ' est le produit de $q-1$ puissances de séries formelles irréductibles non-associées, car $\mathrm{FI}(\psi) \leqslant q - 1$ (Proposition 2.16). Par conséquent, on obtient que γ'_1 est inversible, que la série γ'_i, $2 \leqslant i \leqslant q$, est une puissance d'une série formelle irréductible, que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont des séries formelles irréductibles deux à deux non associées, et que $\mu_z - \eta_z = q - 1$. De plus, on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$. Ceci implique que $p \not\equiv 1 \bmod q$, car si $p \equiv 1 \bmod q$, alors le diviseur $\mathrm{E}_0 = \mathrm{D}_{(p,p,q)} \cap \mathrm{S}_{\mathcal{G}}$ n'est pas un diviseur essentiel (voir la Proposition 2.9 et le Corollaire 2.5).

On rappelle qu'une série formelle dans $K[[s, t]]$ est inversible si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s, t]]$, où $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K. Dans la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

On fixe un entier $1 \leqslant i \leqslant q - 1$ quelconque. On peut donc supposer que $\psi_i^p = \gamma'_{i+1}\lambda_i^q$, où $\xi\lambda = \prod_{j=1}^{q-1} \lambda_j$, $\xi^q = \gamma'_1$ et p.g.c.d$(\lambda_{\mathrm{j}}, \lambda_{\mathrm{j'}})$ est inversible pour tous les entiers j, j' tels que $1 \leqslant j < j' \leqslant q-1$. Comme ψ_i est irréductible et γ'_{i+1} n'est pas inversible, il existe deux entiers $l_i \geqslant 1$ et $m_i \geqslant 0$ tels que $\gamma'_{i+1} = I_i\psi^{l_i}$ et $\lambda_i = I_i^{-1}\psi_i^{m_i}$, où I_i est une série formelle inversible. Comme $\nu_v\psi_i = 1$, on a $\nu_v\lambda_i = m_i$, $\nu_v\gamma'_{i+1} = l_i$ et $l_i + qm_i = p$.

Comme $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, on a $t^{p\eta_z - q\eta_x}\psi_v = -\mathrm{h}_{\mathrm{q}}(\chi_v, \varphi_v)$ (Proposition 2.15), d'où $\nu_v\gamma_j = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$. Par conséquent, pour tout $1 \leqslant j \leqslant q-1$, on a $l_j = \nu_v\gamma'_{j+1} = \nu_v\gamma'_2 = l_1$, car $\gamma_{j+1} = \gamma'_{j+1}\lambda$. En particulier, on a $m_j = m_1$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant q-1$, car $l_1 + qm_j = p$. Ainsi, on obtient que $\gamma_{j+1} = I_j\psi_j^{p-m_1q}\lambda$, pour $1 \leqslant j \leqslant q-1$, où les I_j sont inversibles. Comme $q \geqslant 3$ et $\gamma_j := a_j\chi + b_j\varphi$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma'_1 = aI_1\psi_1^{p-m_1q} + bI_2\psi_2^{p-m_1q}.$$

Soient J_1 et J_2 deux séries formelles inversibles telles que $J_1^{p-m_1q} = aI_1$ et $J_2^{p-m_1q} = bI_2$. Ainsi, on obtient que :

$$t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma'_1 = \textstyle\prod_{i=1}^{p-m_1q}(J_1\psi_1 + w_iJ_2\psi_2),$$

où les w_i sont les racines $(p-m_1q)$-ièmes de l'unité. Mais γ'_1 est inversible, $p\eta_z - q\eta_x > 0$ et $p \not\equiv 1 \bmod q$, donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t, ce qui est absurde. $\square$

3. Preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type $\mathbb{E}_6$ et $\mathbb{E}_7$

3.1. La singularité de type $\mathbb{E}_6$

Dans cette section, on démontre la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type $\mathbb{E}_6$, ce qui équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de $\mathbb{E}_6$ (voir [Reg06]).

Soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $x^2+y^3+z^4 = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type $\mathbb{E}_6$ à l'origine de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$.

Notons $\mathrm{f} = x^2+y^3+z^4$; on considère l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ associé à f. Soit H un plan de $\mathbb{R}^3$ qui ne contient pas l'origine de $\mathbb{R}^3$ et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ soit un ensemble compact. La Figure 4 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$) et $(6,4,3)$.

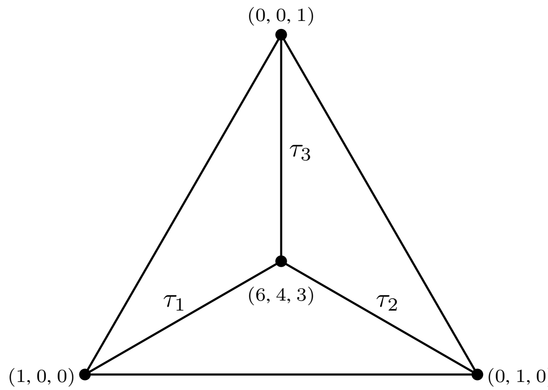

Figure 4. — Éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$.

Soit $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ une *G-subdivision régulière* de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to X(\Gamma^\star(\mathrm{f})))$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ (resp. $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.4.

Proposition 3.1. — *$S_{\mathcal{G}}$ est la résolution minimale de S.*

Soient E un diviseur essentiel sur S ($\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$) et α_{E} le point générique de N_{E}. On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(x), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(y), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(z)),$$

où $\alpha^\star_{\mathrm{E}}$ est le comorphisme de α_{E}.

Pour un cône τ dans $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 2.13.

Proposition 3.2. — *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union de $G\tau_2$ et $G\tau_3$, où τ_2 (resp. τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(0,1,0)$ (resp. $(0,0,1)$) et $(6,4,3)$ (voir la figure 4). Autrement dit, $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2,2,1),$ $(3,2,2), (4,3,2), (6,4,3)\}$.*

Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K-wedges admissibles centrés en N_{E} se relèvent à la résolution minimale de S.

Soit $\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$ et on considère un K-wedge $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to S$ admissible centré en N_{E}. On pose :

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\mathrm{Ord}_t\omega^\star(x), \mathrm{Ord}_t\omega^\star(y), \mathrm{Ord}_t\omega^\star(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^\star(x) = t^{\eta_x}\chi,\ \omega^\star(y) = t^{\eta_y}\varphi,\ \omega^\star(z) = t^{\eta_z}\psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t. On rappelle que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \mathbb{Z}^3_{>0}$, car ω est un K-wedge admissible.

Remarque 4. — En vertu de la Proposition 3.2, on a $\mu_x \leqslant 6$, $\mu_y \leqslant 4$ et $\mu_z \leqslant 3$. En particulier, on a $\eta_x \leqslant 6$, $\eta_y \leqslant 4$ et $\eta_z \leqslant 3$, car $\eta_x \leqslant \mu_x$, $\eta_y \leqslant \mu_y$ et $\eta_z \leqslant \mu_z$.

Le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y^3 + z^4 = 0$, d'où la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi^2 + t^{3\eta_y}\varphi^3 + t^{4\eta_z}\psi^4 = 0.$$

Ce qui implique que $2 \leqslant \eta_x \leqslant 6$, $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$ et $1 \leqslant \eta_z \leqslant 3$.

Remarque 5. — D'après la Proposition 2.14, si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K-wedge admissible ω centré en N_{E} se relève à la résolution minimale de S. En raisonnant par l'absurde, si au moins l'une d'elles n'est pas inversible on obtient deux cas pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) (voir la Proposition 3.3), ensuite on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions (voir les Propositions 3.7 et 3.10), d'où le cas $\mathbb{E}_6$ du Théorème 1.2.

On rappelle les définitions suivantes :

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1,e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, où $c_{(e_1,e_2)} \in K$, on définit les applications suivantes :

$\nu : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, v \mapsto \nu_v\phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}$, où $\mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1,e_2)} \neq 0\}$;

$\mathrm{PPr} : \mathbb{R}^2_{>0} \to K[s,t], v \mapsto \phi_v := \sum_{e \,\cdot\, v \,=\, \nu_v\phi} c_{(e_1,e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$;

FI : $K[[s,t]]\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, où FI($\phi$) est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Le réel $\nu_v\phi$ (resp. Le polynôme ϕ_v) est appelé le *v-ordre* (resp. la *v-partie principale*) de ϕ.

D'après la Proposition 3.2 et la Remarque 4, on a :

$$\mu_x - \eta_x \leqslant 4,\ \mu_y - \eta_y \leqslant 2 \text{ et } \mu_z - \eta_z \leqslant 2.$$

En vertu de la Proposition 2.15, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ à l'aide des v-ordres. Plus précisément, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ tel que :

$$\mathrm{FI}(\chi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\chi_v = \nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \leqslant 4\ ;$$

$$\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\varphi_v = \nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leqslant 2\ ;$$

$$\mathrm{FI}(\psi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\psi_v = \nu_v\psi = \mu_z - \eta_z \leqslant 2.$$

Sauf mention du contraire, dans toute la suite le vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ satisfait la propriété ci-dessus.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s,t]]$ est inversible dans $K[[s,t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s,t]]$, où $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K. Dans toute la suite on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Maintenant, on prouve la première des trois propositions qu'on a anticipé dans la Remarque 5.

PROPOSITION 3.3. — *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \mathbb{Z}^3_{>0}$ satisfait une des relations suivantes :*

i) $2\eta_x = 3\eta_y$ *et* $\eta_x < 2\eta_z$ *;*

ii) $\eta_x = 2\eta_z$ *et* $2\eta_x < 3\eta_y$.

Démonstration. — Soit $S_2\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ le 2-squelette du cône $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. On rappelle que $\tau_1 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$ (resp. $\tau_2 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$, $\tau_3 \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$) est le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$) et $(6,4,3)$ (voir la Figure 4. Remarquons que $S_2\Gamma^\star(\mathrm{f}) = \bigcup_{i=1}^3 \tau_i \cup S_2\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$.

En vertu de la Proposition 2.17, on a $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in S_2\Gamma^\star(\mathrm{f}) \cap \mathbb{Z}^3_{>0}$. Ce qui implique que le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^3 \tau_i$.

On remarque que $(\eta_x,\eta_y,\eta_z)\neq(6,4,3)$. En effet, si $(\eta_x,\eta_y,\eta_z)=(6,4,3)$ alors $(\eta_x,\eta_y,\eta_z)=(\mu_x,\mu_y,\mu_z)$ (voir la Remarque 4), d'où les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles (Proposition 2.15). Ceci rentre en contradiction avec les hypothèses de la Proposition 3.3. Par conséquent, le vecteur (η_x,η_y,η_z) appartient à l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{3}\tau_i^0$, où τ_i^0 est l'intérieur relatif du cône τ_i, $1\leqslant i\leqslant 3$.

Par un calcul direct, on montre que le cône τ_1 est régulier. Par conséquent, le semi-groupe $\tau_1\cap\mathbb{Z}^3$ est engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(6,4,3)$. En particulier, si $(a,b,c)\in\tau_1\cap\mathbb{Z}^3_{>0}$, alors $6\leqslant a$, $4\leqslant b$ et $3\leqslant c$. Ce qui implique que le vecteur (η_x,η_y,η_z) appartient à l'ensemble $\tau_2^0\cup\tau_3^0$.

Si (η_x,η_y,η_z) appartient à l'ensemble τ_2^0 (resp. τ_3^0), alors $\eta_x=2\eta_z$ et $2\eta_x<3\eta_y$ (resp. $2\eta_x=3\eta_y$ et $\eta_x<2\eta_z$), d'où la proposition. □

Maintenant, on démontre quelques résultats techniques.

On rappelle que le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2+y^3+z^4=0$, d'où la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi^2+t^{3\eta_y}\varphi^3+t^{4\eta_z}\psi^4=0. \tag{3.1}$$

Cette relation est utilisée dans plusieurs endroits de la démonstration du Théorème 1.2.

Lemme 3.4. — *Si le vecteur (μ_x,μ_y,μ_z) est égal au vecteur (6,4,3), alors les v-ordres des séries formelles $t^{\eta_x}\chi+it^{2\eta_z}\psi^2$ et $t^{\eta_x}\chi-it^{2\eta_z}\psi^2$ sont égaux à 6, c'est-à-dire on a :*

$$\nu_v(t^{\eta_x}\chi+it^{2\eta_z}\psi^2)=\nu_v(t^{\eta_x}\chi-it^{2\eta_z}\psi^2)=6.$$

Démonstration. — Dans ce cas, on a $\nu_v(t^{2\eta_x}\chi^2)=\nu_v(t^{3\eta_y}\varphi^3)=\nu_v(t^{4\eta_z}\psi^4)=12$, donc les v-parties principales χ_v, φ_v et ψ_v satisfont la relation suivante (voir la Relation (3.1)) :

$$t^{3\eta_y}\varphi_v^3+(t^{\eta_x}\chi_v+it^{2\eta_z}\psi_v^2)(t^{\eta_x}\chi_v-it^{2\eta_z}\psi_v^2)=0.$$

La relation ci-dessus implique que $(t^{\eta_x}\chi_v+it^{2\eta_z}\psi_v^2)(t^{\eta_x}\chi_v-it^{2\eta_z}\psi_v^2)\neq 0$ et par conséquent, on obtient que les v-ordres des séries formelles $t^{\eta_x}\chi+it^{2\eta_z}\psi^2$ et $t^{\eta_x}\chi-it^{2\eta_z}\psi^2$ sont égaux à 6, car les v-parties principales $t^{\eta_x}\chi_v+it^{2\eta_z}\psi_v^2$ et $t^{\eta_x}\chi_v-it^{2\eta_z}\psi_v^2$ sont différentes de zéro et les v-ordres des séries formelles $t^{\eta_x}\chi$ et $t^{2\eta_z}\psi^2$ sont égaux à 6. □

Lemme 3.5. — *S'il existe une série formelle irréductible λ qui divise χ,φ, et ψ, alors λ^2 divise φ.*

Démonstration. — On suppose que λ divise χ, φ, et ψ. Soient $\chi = \lambda\chi_1$, $\varphi = \lambda\varphi_1$ et $\psi = \lambda\psi_1$. Alors au moyen de la Relation (3.1) on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi_1^2 + t^{3\eta_y}\lambda\varphi_1^3 + t^{4\eta_z}\lambda^2\psi_1^4 = 0,$$

ce qui implique que λ divise χ_1. En particulier λ divise φ_1. □

Lemme 3.6. — *Si la série formelle φ est inversible, alors les séries formelles χ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. On suppose que φ est inversible et que χ ou ψ n'est pas inversible.

D'après la Proposition 3.3, on a deux possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z) :

1) $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$;

2) $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Cas 1). On suppose que : $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

D'après la Relation (3.1), on a :

$$t^{3\eta_y-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi+i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi-i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ. On peut donc sans perte de généralité supposer que $t^{3\eta_y-2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ est inversible, alors la relation $t^{3\eta_y-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^{3\eta_y-2\eta_x}I_1 = \chi + i\psi^2,\ I_2 = -\chi + i\psi^2,$$

où I_1, et I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s,t]]$ telles que $I_1 I_2 = \varphi^3$. Alors, les séries formelles χ et ψ sont inversibles, d'où la contradiction.

Cas 2). On suppose que : $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$.

Comme $2\eta_x = 3\eta_y$, on obtient que η_x (resp. η_y) est divisible par 3 (resp. 2). Par conséquent, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3, 2)$ et $2 \leqslant \eta_z \leqslant 3$, car $2 \leqslant \eta_x \leqslant 6$, $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$, $1 \leqslant \eta_z \leqslant 3$ (voir la Remarque 4) et $\eta_x < 2\eta_z$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2,2,1),(3,2,2),(4,3,2),(6,4,3)\}$. Comme la série formelle χ ou la série formelle ψ n'est pas inversible, le v-ordre $\nu_v\chi$ ou le v-ordre $\nu_v\psi$ n'est pas nul (voir Proposition 2.15). Alors, on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4,3,2),(6,4,3)\}$, d'où $1 \leqslant \mu_y - \eta_y \leqslant 2$. Par conséquent, la série formelle φ n'est pas inversible, ce qui est une contradiction. □

Maintenant, on considère le cas i) de la Proposition 3.3.

Proposition 3.7. — *On suppose que $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$. Alors, les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.6 on suppose que φ n'est pas inversible. D'après la Proposition 2.15, on a $\mu_y - \eta_y \geqslant 1$.

Comme $2\eta_x = 3\eta_y$, on obtient que η_x (resp. η_y) est divisible par 3 (resp. 2). Par conséquent, on a $(\eta_x, \eta_y) = (3,2)$ et $2 \leqslant \eta_z \leqslant 3$, car $2 \leqslant \eta_x \leqslant 6$, $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$, $1 \leqslant \eta_z \leqslant 3$ (voir la Remarque 4) et $\eta_x < 2\eta_z$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2,2,1),(3,2,2),(4,3,2),(6,4,3)\}$. Comme $\eta_y = 2$ et $\mu_y - \eta_y \geqslant 1$, on obtient que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4,3,2),(6,4,3)\}$. En particulier, $1 \leqslant \mu_y - \eta_y \leqslant 2$.

D'après la Proposition 2.15, le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité de φ est inférieur ou égal à 2.

Au moyen de la Relation (3.1) on obtient la relation suivante :

$$\varphi^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2) = 0.$$

On remarque que la série formelle $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2$ est inversible si et seulement si la série formelle $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2$ l'est. Par conséquent, si $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2$ est inversible, alors φ l'est. On obtient donc que les séries formelles $\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2$ et $\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2$ ne sont pas inversibles.

La série formelle φ n'est pas irréductible, car si φ est irréductible, alors φ divise χ et ψ, ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.5. On a donc $\mu_y - \eta_y = 2$ (voir la Proposition 2.15), ce qui implique que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6,4,3)$, car $\eta_y = 2$. On rappelle que $2 \leqslant \eta_z \leqslant 3$ et $\mu_z = 3$, d'où la série formelle ψ est irréductible ou inversible, parce que $\mu_z - \eta_z \leqslant 1$ (voir la Proposition 2.15).

Comme φ n'est pas irréductible, le nombre de facteurs irréductibles de φ est égal à 2. On a donc deux cas :

Cas 1). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles associées.

Cas 2). La série formelle φ est le produit de deux séries formelles irréductibles non associées.

Maintenant, on va montrer que dans ces deux cas on arrive à des contradictions, ce qui démontre que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.

Cas 1). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1 = \varphi_2$.

D'après la Relation (3.1), on a :

$$\varphi_1^6 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2) = 0,$$

ce qui équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2, \;\; \varphi_1^3 I^{-1} = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2,$$

où I est une série formelle inversible de $K[[s,t]]$. En effet, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) est égal à $(6,4,3)$, donc le v-ordre $\nu_v(\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2)$ est égal au v-ordre $\nu_v(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2)$ (voir le Lemme 3.4), ce qui implique le système de relations ci-dessus. Par conséquent, on a la relation suivante :

$$2it^{2\eta_z - \eta_z}\psi^2 = -(I + I^{-1})\varphi_1^3.$$

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible, parce que $\mu_z - \eta_z \leqslant 1$. Alors, la série formelle irréductible φ_1 divise $t^{2\eta_y - \eta_z}$, d'où une contradiction.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont séries formelles irréductibles non associées.

D'après la Relation (3.1), on a :

$$\varphi_1^3 \varphi_2^3 + (\chi + it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2)(\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2) = 0.$$

Au moyen des Lemmes 3.4 et 3.5 on obtient que cette relation équivaut au système de relations suivant :

$$\varphi_1^3 I_1 = -\chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2, \;\; \varphi_2^3 I_2 = \chi - it^{2\eta_z - \eta_x}\psi^2,$$

où I_1, I_2 sont deux séries formelles inversibles de $K[[s,t]]$ telles que $I_1 I_2 = 1$, d'où

$$-2it^{2\eta_z-\eta_x}\psi^2 = \varphi_1^3 I_1 + \varphi_2^3 I_2 = \textstyle\prod_{i=1}^3(\varphi_1 J_1 + w_i\varphi_2 J_2),$$

où les w_i sont les racines 3-ièmes de l'unité et J_1, J_2 sont deux séries formelles inversibles telles que $J_1^3 = I_1$ et $J_2^3 = I_2$.

On rappelle que la série formelle ψ est irréductible ou inversible. Si ψ est inversible, alors les séries formelles φ_1 et φ_2 sont inversibles ou divisibles par t. On a donc une contradiction dans les deux cas. Ainsi, on obtient que la série formelle ψ est irréductible.

Comme t ne divise pas φ_1 et φ_2, la série formelle ψ divise φ_1 et φ_2. Par conséquent, la série ψ divise t, d'où une contradiction. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Les deux lemmes suivants sont très importants dans la démonstration.

Lemme 3.8. — *On suppose que* $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (4,3,2)$. *Alors, les séries formelles* χ, φ *et* ψ *sont inversibles.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.6 on suppose que φ n'est pas inversible. Par conséquent, $\mu_y - \eta_y \geqslant 1$ (voir la Proposition 2.15).

En vertu de la Proposition 3.3, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \qquad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la proposition 3.7, si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. En particulier, 2 divise η_x. Ainsi, on obtient que $\eta_x \in \{2,4\}$, car $2 \leqslant \eta_x \leqslant \mu_x = 4$ (voir la Remarque 4). On rappelle que $\mu_y - \eta_y \geqslant 1$. Comme on a $\eta_y \geqslant 2$ (Remarque 4) et $\mu_y = 3$, on obtient que $\eta_y = 2$. On a donc $\eta_x < 3$, car $2\eta_x < 3\eta_y$. Ainsi, on obtient que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2,2,1)$. Par conséquent, on a les v-ordres suivants :

$$\nu_v\chi = 2,\ \nu_v\varphi = 1,\ \text{et } \nu_v\psi = 1.$$

Comme les v-ordres $\nu_v\chi$, $\nu_v\varphi$ et $\nu_v\psi$ sont strictement positifs, les séries formelles χ, φ et ψ ne sont pas inversibles. De plus, les séries formelles φ et ψ sont irréductibles (voir la Proposition 2.15).

D'après la Relation (3.1), on a :

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi+i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi-i\psi^2$, car t ne divise pas χ et φ. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Si la série formelle φ divise $\chi + i\psi^2$ et $\chi - i\psi^2$, alors φ divise χ et ψ, ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.5. Comme les séries formelles χ et ψ ne sont pas inversibles et par hypothèse t^2 divise $\chi + i\psi^2$, la relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$t^2 I = \chi + i\psi^2,\ \varphi^3 I^{-1} = -\chi + i\psi^2,$$

où $I \in K[[s,t]]$ est un série formelle inversible. Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$2i\psi^2 = t^2 I + \varphi^3 I^{-1}.$$

Le corps K est algébriquement clos, donc il existe $I_1 \in K[[s,t]]^\star$ tel que $I_1^2 = I$. On a donc :

$$(\kappa\psi - tI_1 t)(\kappa\psi + tI_1) = \varphi^3 I^{-1},$$

où $\kappa^2 = 2i$. Comme les séries formelles $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ne sont pas inversibles et la série formelle φ est irréductible, φ divise $\kappa\psi - tI_1$ et $\kappa\psi + tI_1$ ce qui implique que φ divise la série formelle tI_1, d'où une contradiction car φ n'est pas divisible par t. $\square$

Lemme 3.9. — *On suppose que* $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (6, 4, 3)$*, alors les séries formelles* χ*,* φ *et* ψ *sont inversibles.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.6 on suppose que φ n'est pas inversible.

En vertu de la Proposition 3.3, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :

$$\eta_x = 2\eta_z \text{ et } 2\eta_x < 3\eta_y; \qquad 2\eta_x = 3\eta_y \text{ et } \eta_x < 2\eta_z.$$

D'après la Proposition 3.7, si on a $2\eta_x = 3\eta_y$ et $\eta_x < 2\eta_z$, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. Par conséquent, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait la relation $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$.

On rappelle que $2 \leqslant \eta_x \leqslant 6$, $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$ et $1 \leqslant \eta_z \leqslant 3$ (voir la Remarque 4). Comme la série formelle φ n'est pas inversible, on a $2 \leqslant \eta_y \leqslant 3$, car $\eta_y < \mu_y = 4$ (voir la Proposition 2.15).

Si on a $\eta_y = 3$, alors on a $\mu_y - \eta_y = 1$. Par conséquent, la série formelle φ est irréductible.

D'après la Relation (3.1), on a :

$$t^{9-2\eta_x}\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi+i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi-i\psi^2$, car t ne divise pas χ et ψ. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $t^{9-2\eta_x}$ divise $\chi + i\psi^2$. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x}\varphi^j I = \chi + i\psi^2, \;\; \varphi^{3-j} I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leqslant j \leqslant 3$ et I est un élément inversible de $K[[s,t]]$.

Si on a $j = 3$, alors la série formelle $\chi - i\psi^2$ est inversible, d'où on a $\nu_v(\chi - i\psi^2) = 0$. Le Lemme 3.4 et la propriété multiplicative du v-ordre montrent que le v-ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ est égal à zéro, ce qui implique que le v-ordre de $t^{9-2\eta_x}\varphi^3$ est égal à zéro, d'où une contradiction.

Si on a $1 \leqslant j \leqslant 2$, alors φ divise les séries formelles χ et ψ ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.5. On a donc le système de relations suivant :

$$t^{9-2\eta_x} I = \chi + i\psi^2, \;\; \varphi^3 I^{-1} = \chi - i\psi^2.$$

Par conséquent, le v-ordre $\nu_v(\chi + i\psi^2)$ (resp. le v-ordre $\nu_v(\chi - i\psi^2)$) est égal à $9-2\eta_x$ (resp. est égal à 3). Le Lemme 3.4 et la propriété multiplicative du v-ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi+i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $\eta_x = 3$, d'où la contradiction car $\eta_x = 2\eta_z$. Forcément, on a donc $\eta_y = 2$.

Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$ et $\eta_y = 2$, on obtient que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) = (2, 2, 1)$, d'où

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

Comme on a $\nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y = 2$, la série formelle φ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptés avec multiplicité, voir la Proposition 2.15.

Alors, pour la série formelle φ on obtient les trois cas suivants :

Cas 1). la série formelle φ est irréductible ;

Cas 2). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles non associées ;

Cas 3). la série formelle φ est le produit de deux séries formelles associées.

Maintenant, on va montrer que dans chaque cas ci-dessus on obtient une contradiction, ce qui implique que φ est inversible, d'où le lemme.

On rappelle que dans le trois cas on a la relation suivante :

$$t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0.$$

On remarque que t divise $\chi + i\psi^2$ si et seulement si t ne divise pas $\chi - i\psi^2$ car t ne divise pas χ et φ. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que t^2 divise $\chi + i\psi^2$.

Cas 1). On suppose que φ est une série formelle irréductible.

Si la série formelle φ est irréductible, alors la relation $t^2\varphi^3 + (\chi + i\psi^2)(\chi - i\psi^2) = 0$ équivaut au système de relations suivant :

$$-t^2\varphi^j I = \chi + i\psi^2, \ \ \varphi^{3-j}I^{-1} = \chi - i\psi^2,$$

où $0 \leqslant j \leqslant 3$ et I est une série formelle inversible de $K[[s,t]]$.

Le Lemme 3.4 et la propriété multiplicative du v-ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2(1 + j) = 2(3 - j)$ (on rappelle que le v-ordre $\nu_v\varphi$ est égal à 2), d'où $j = 1$. Alors, la série formelle φ divise les séries formelles χ et ψ, ce qui rentre en contradiction avec le Lemme 3.5.

Cas 2). On suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont deux séries formelles irréductibles non associées.

Dans ce cas, les v-ordres $\nu_v\varphi_1$ et $\nu_v\varphi_2$ sont égaux à 1, car $\nu_v\varphi = 2$.

De la même façon que dans le cas précédent, on a le système de relations suivant :

$$t^2\varphi_1^j\varphi_2^k I = -(\chi + i\psi^2), \ \ \varphi_1^{3-j}\varphi_2^{3-k}I^{-1} = (\chi - i\psi^2),$$

où $0 \leqslant j \leqslant 3$, $0 \leqslant k \leqslant 3$ et I est un élément inversible de $K[[s,t]]$.

Le Lemme 3.4 et la propriété multiplicative du v-ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi + i\psi^2) = \nu_v(\chi - i\psi^2)$, ce qui implique que $2 + j + k = 6 - j - k$, d'où

$j+k=2$. Pour tous les j et k tels que $j+k=2$, on rentre en contradiction avec le Lemme 3.5.

Cas 3). On suppose que $\varphi=\varphi_1\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont des séries formelles irréductibles associées.

Comme le corps K est algébriquement clos, on peut supposer que $\varphi_1=\varphi_2$. Dans ce cas, le v-ordre $\nu_v\varphi_1$ est égal à 1.

La relation $t^2\varphi^3+(\chi+i\psi^2)(\chi-i\psi^2)=0$ équivaut à la relation :

$$t^2\varphi_1^6+(\chi+i\psi^2)(\chi-i\psi^2)=0,$$

et par conséquent, on obtient le système de relations suivant :

$$-t^2\varphi_1^jI=\chi+i\psi^2,\ \ \varphi_1^{6-j}I^{-1}=\chi-i\psi^2,$$

où $0\leqslant j\leqslant 6$ et I est un élément inversible de $K[[s,t]]$. Le Lemme 3.4 et la propriété multiplicative du v-ordre montrent qu'on a $\nu_v(\chi+i\psi^2)=\nu_v(\chi-i\psi^2)$, ce qui implique que $2+j=6-j$, d'où $j=2$. On a donc :

$$2i\psi^2=-(t^2I+\varphi_1^2I^{-1})\varphi_1^2.$$

Comme K est algébriquement clos, il existe une série formelle inversible I_1 appartenant à $K[[s,t]]$ telle que $I_1^2=I$. Alors, on a :

$$2i\psi^2=-(tI_1+i\varphi_1I_1^{-1})(tI_1-i\varphi_1I_1^{-1})\varphi_1^2.$$

Soient $r:=(tI_1+i\varphi_1I_1^{-1})$ et $q:=(tI_1-i\varphi_1I_1^{-1})$. Les séries formelles r et q ne sont pas inversibles car les séries formelles tI_1 et φ_1 ne le sont pas.

Comme on a $(\eta_x,\eta_y,\eta_z)=(2,2,1)$ et $(\mu_x,\mu_y,\mu_z)=(6,4,3)$, le v-ordre $\nu_v\psi$ est égal à 2 (on remarque que $\mu_z-\eta_z=2$), ce qui implique que ψ est au plus le produit de deux séries formelles irréductibles comptées avec multiplicité (voir la Proposition 2.15). Par conséquent, la série formelle ψ^2 est au plus le produit de quatre séries formelles irréductibles comptées avec multiplicité, ce qui implique que les séries formelles r et q sont irréductibles.

Les séries formelles r et q ne sont pas associées à la série formelle φ_1 parce que t ne divise pas φ_1.

On obtient donc :

$$(tI_1+i\varphi_1I_1^{-1})=J(tI_1-i\varphi_1I_1^{-1}),$$

où J est une série formelle inversible. En effet, la série formelle r divise ψ^2, alors r divise ψ, d'où r^2 divise ψ^2. Comme r ne divise pas φ_1, r divise q. Par conséquent r et q sont deux séries irréductibles associées.

Ainsi, on obtient la relation suivante :

$$t(J-1)I_1 = i\varphi_1(J+1)I_1^{-1}.$$

On remarque que $J-1$ ou $J+1$ est inversible. Si $J-1$ est inversible, alors la série φ_1 est inversible ou t divise φ_1 ; ce qui est absurde. Si $J+1$ est inversible, alors t divise φ_1, ce qui est aussi une contradiction. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Maintenant, on considère le cas *ii*) de la proposition 3.3.

Proposition 3.10. — *On suppose que $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. En vertu du Lemme 3.6, on suppose que φ n'est pas inversible.

On rappelle que $2 \leqslant \eta_x \leqslant 6$, $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$ et $1 \leqslant \eta_z \leqslant 3$ (voir la Remarque 4). Comme on a $\eta_x = 2\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $(\eta_x, \eta_z) \in \{(2,1),(4,2)\}$ et que $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$.

On rappelle que $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(2,2,1),(3,2,2),(4,3,2),(6,4,3)\}$. Comme φ n'est pas inversible et $2 \leqslant \eta_y \leqslant 4$, le vecteur $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(4,3,2),(6,4,3)\}$. En vertu des Lemmes 3.8 et 3.9, si le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'ensemble $\{(4,3,2),(6,4,3)\}$, alors les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, d'où une contradiction. □

La démonstration de la bijectivité de l'application de Nash pour la singularité de type $\mathbb{E}_6$ résulte des propositions 2.14, 3.3, 3.7 et 3.10.

3.2. La singularité de type $\mathbb{E}_7$

La preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour le cas de la singularité de type $\mathbb{E}_7$ (Théorème 1.2) repose sur la construction d'une G-désingularisation de l'éventail de Newton et sur des propriétés, pour $\mathbb{E}_7$, des séries formelles χ, φ et ψ analogues aux séries définies pour $\mathrm{S}(\mathrm{p}, \mathrm{h_q})$ ou $\mathbb{E}_6$. Dans la suite, on donne un résumé de la preuve.

Soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type $\mathbb{E}_7$ à l'origine de $\mathbb{A}^3$.

On considère l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ associé à $\mathrm{f} := x^2 + y(y^2 + z^3)$ et on note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(1,2,0)$, $(0,0,1)$) et $(9,6,4)$ (voir la Figure 5).

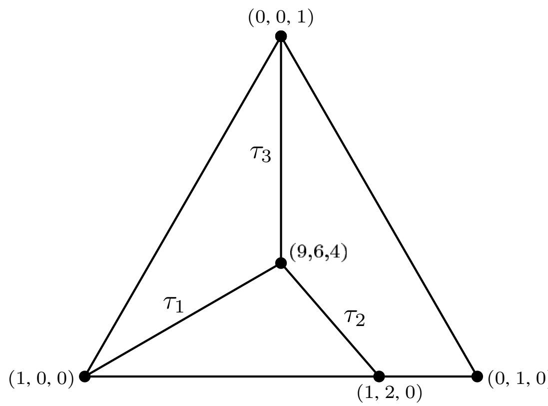

Figure 5. — Éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$.

Soit $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ une *G-subdivision régulière* de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to X(\Gamma^\star(\mathrm{f})))$ le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ (resp. $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

De manière analogue à la Proposition 4.2, le morphisme $\pi : S_{\mathcal{G}} \to S$ est la résolution minimale de S.

Montrer la bijectivité de l'application de Nash $\mathcal{N}_S$ équivaut à montrer que, pour chaque diviseur essentiel E, tous les K-wedges admissibles centrés en N_{E} se relèvent à la résolution minimale de S. Dans la suite, on donne une idée de pourquoi un K-wedge admissible centré en N_{E} se relève à $\mathrm{S}_{\mathcal{G}}$.

Soient $\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$ et $\omega : \mathrm{Spec} K[[s,t]] \to S$ un K-wedge admissible centré en N_{E}. On rappelle que α_{E} est le point générique de N_{E}. On considère les vecteurs suivants :

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(x), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(y), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(z));$$

$$(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\mathrm{Ord}_t \omega^\star(x), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(y), \mathrm{Ord}_t \omega^\star(z)),$$

où $\alpha^\star_{\mathrm{E}}$ (resp. $\omega^\star$) est le comorphisme de α_{E} (resp. de ω). On peut donc écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^\star(x) = t^{\eta_x}\chi,\ \omega^\star(y) = t^{\eta_y}\varphi,\ \omega^\star(z) = t^{\eta_z}\psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t. Le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + y(y^2 + z^3) = 0$, d'où la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi^2 + t^{3\eta_y}\varphi^3 + t^{\eta_y+3\eta_z}\varphi\psi^3 = 0. \tag{3.2}$$

En vertu des Propositions 2.14, si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K-wedge admissible ω centré en N_{E} se relève à $\mathrm{S}_{\mathcal{G}}$.

D'après la Proposition 2.15, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ à l'aide des v-ordres de la façon suivante :

$$\mathrm{FI}(\chi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\chi_v = \nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \leqslant 6 \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\varphi_v = \nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leqslant 4 \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\psi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\psi_v = \nu_v\psi = \mu_z - \eta_z \leqslant 3.$$

La proposition suivante est une propriété importante du vecteur (μ_x, μ_y, μ_z). Pour un cône τ dans $\Gamma^\star(\mathrm{f})$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$.

Proposition 3.11. — *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient à l'union $G\tau_1 \cup G\tau_2 \cup G\tau_3$, où τ_1 (resp. τ_2 τ_3) est le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(1,2,0)$, $(0,0,1)$) et $(9,6,4)$ (voir la figure 5). Autrement dit,* $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \in \{(3,2,2), (6,4,3), (9,6,4), (7,5,3), (5,4,2), (3,3,1), (5,3,2)\}$.

Si on suppose les séries χ, φ et ψ non simultanément inversibles, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.12. — *S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait une des relations suivantes :*

i) $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ *et* $2\eta_x < 3\eta_y$ *;*

ii) $2\eta_x = 3\eta_y$ *et* $2\eta_y < 3\eta_z$ *;*

iii) $2\eta_y = 3\eta_z$ *et* $3\eta_y < 2\eta_x$.

La Proposition 3.12 donne trois possibilités pour le vecteur (η_x, η_y, η_z). Dans la suite, on considère chaque cas séparément pour obtenir des contradictions.

Dans chaque cas du vecteur (η_x, η_y, η_z), on peut simplifier la Relation (3.2) et on peut la récrire comme la somme de deux termes. Ceci permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des décompositions possibles des séries χ, φ et ψ. L'idée est de trouver des contradictions dans les différents cas de décomposition obtenus.

D'abord, énonçons le lemme suivant qui est obtenu en utilisant la Relation (3.2).

Lemme 3.13. — *Si on suppose que $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, où φ_1 est une série formelle irréductible, alors la série formelle φ_1 divise la série formelle φ_2. En particulier, la série formelle φ n'est pas irréductible.*

Maintenant, on considère le premier cas de la Proposition 3.12.

Proposition 3.14. — *On suppose que $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$. Alors, les séries χ, φ, ψ sont inversibles.*

Démonstration. — [Idée de la démonstration] On remarque que d'après la relation (3.2), on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + t^{3\eta_y - 2\eta_x}\varphi^3 + \varphi\psi^3 = 0. \tag{3.3}$$

D'abord, on montre que la série φ est inversible, ce qui équivaut à montrer que $\mu_y - \eta_y = 0$. En utilisant les relations $2\eta_x = \eta_y + 3\eta_z$ et $2\eta_x < 3\eta_y$, on obtient que $\eta_y \geqslant 3$. En vertu du Lemme 3.13 et la Proposition 3.11, on obtient que $\mu_y - \eta_y \in \{0, 2, 3\}$.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 2$, on obtient que $3\eta_y - 2\eta_x \in \{2, 3\}$. D'après le lemme 3.13, on a $\varphi = \varphi_1^2$, où φ_1 est irréductible.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 2$, on peut écrire la Relation (3.3) comme la somme de deux termes qui nous permet d'établir des relations entre les facteurs irréductibles des séries χ, φ et ψ et de trouver une contradiction.

Dans le cas $3\eta_y - 2\eta_x = 3$, on ne peut pas écrire de façon évidente la Relation (3.3) comme la somme de deux termes. Cependant, on peut considérer le changement de variable $t = u^2$ et étudier la Relation (3.3) dans l'anneau $K[[s, u]]$. Dans cet anneau, on peut écrire cette relation comme la somme de deux termes et on traite ce cas comme le précédent.

Si on suppose que $\mu_y - \eta_y = 3$, on obtient $3\eta_y - 2\eta_x = 3$. D'après le lemme 3.13, on a $\varphi = \varphi_1^3$, où φ_1 est irréductible. Dans ce cas, on peut écrire la Relation (3.3) comme la somme de deux termes et on le traite comme les cas précédents.

D'après la Proposition 3.11, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait une des relations suivantes :

i) $2\mu_x = 3\mu_y$ et $2\mu_y < 3\mu_z$;

ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ et $3\mu_y < 2\mu_x$;

iii) $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leqslant 3\mu_y$.

En utilisant que $\mu_y - \eta_y = 0$, on obtient le lemme suivant :

LEMME 3.15. — *Le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) ne satisfait pas les relations suivantes :*

i) $2\mu_x = 3\mu_y$ *et* $2\mu_y < 3\mu_z$ *;*

ii) $2\mu_x = 3\mu_z$ *et* $3\mu_y < 2\mu_x$.

En vertu du Lemme 3.15, on peut supposer que le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) satisfait la relation suivante : $2\mu_x = \mu_y + 3\mu_z$ et $2\mu_x \leqslant 3\mu_y$.

Maintenant, en raisonnant par l'absurde, on suppose que la série χ ou la série ψ n'est pas inversible. On peut donc établir une liste de cas possibles pour les vecteurs (μ_x, μ_y, μ_z) et (η_x, η_y, η_z). En utilisant la Relation (3.3), la Proposition 3.11 et les majorants du nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ et ψ, on obtient une contradiction dans chaque cas de la liste, d'où la proposition. □

La preuve des propositions suivantes est analogue à celle de la proposition 3.14.

PROPOSITION 3.16. — *On suppose que* $2\eta_x = 3\eta_y$ *et* $2\eta_y < 3\eta_z$*. Alors, les séries χ, φ, ψ sont inversibles.*

PROPOSITION 3.17. — *On suppose que* $2\eta_y = 3\eta_z$ *et* $3\eta_y < 2\eta_x$*. Alors, les séries χ, φ, ψ sont inversibles.*

La démonstration du cas $\mathbb{E}_7$ du Théorème 1.2 résulte des propositions 3.12, 3.14, 3.16 et 3.17.

4. Une nouvelle preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type $\mathbb{D}_n$

Dans l'article [Plé08] l'auteur démontre la bijectivité de l'application de Nash $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ associée à une singularité de type $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$. Dans cette section, en utilisant les mêmes méthodes que dans les preuves des Théorèmes 1.1 et 1.2, on donne une démonstration de la bijectivité de l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{D}_n}$ différente de celle de [Plé08].

L'entier $n \geqslant 4$ étant fixé, soit S l'hypersurface normale de $\mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ donnée par l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$. L'hypersurface S a un unique point singulier de type $\mathbb{D}_n$.

Comme dans la preuve des Théorèmes 1.1 ou 1.2 pour prouver la bijectivité de l'application de Nash associée à S, on a besoin de quelques résultats sur la résolution minimale de S.

On considère l'éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ associé à $\mathrm{f} := x^2 + z(y^2 + z^{n-2})$. Soit H un plan de $\mathbb{R}^3$ qui ne contient pas l'origine de $\mathbb{R}^3$ et tel que l'intersection de H et $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ soit un ensemble compact. La Figure 6 représente l'intersection de H avec la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$. Chaque sommet du diagramme est identifié avec le *vecteur extrémal* correspondant. On note τ_1 (resp. τ_2, τ_3) le cône engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ (resp. $(0,1,0)$, $(0,0,1)$) et $(n-1, n-2, 2)$.

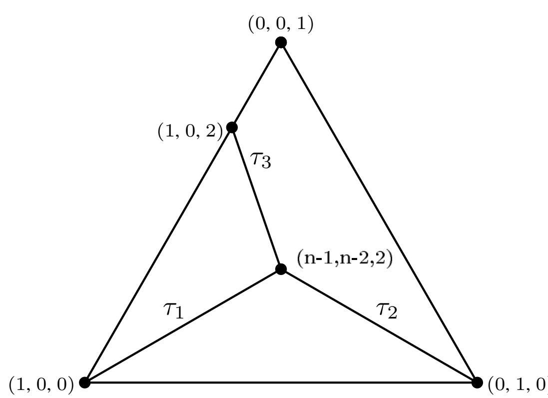

Figure 6. — Éventail de Newton $\Gamma^\star(\mathrm{f})$.

Pour un cône τ dans $\Gamma^\star(\mathrm{f})$, on note $G\tau$ le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. Par un calcul direct, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1. — *Le système générateur minimal du semi-groupe* $\tau_3 \cap \mathbb{Z}^3$ *est l'ensemble* $G\tau_3 = \{(j, j-1, 2) \mid j \in \{1, 2, ..., n-1\}\}$. *De plus, soit* $k \geqslant 2$ *un entier, on a :*

i) Si $n = 2k$, *alors le système générateur minimal du semi-groupe* $\tau_1 \cap \mathbb{Z}^3$ *est l'ensemble* $G\tau_1 = \{(1,0,0), (k, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ *et* τ_2 *est un cône régulier.*

ii) Si $n = 2k-1$, *alors le système générateur minimal du semi-groupe* $\tau_2 \cap \mathbb{Z}^3$ *est l'ensemble* $G\tau_2 = \{(0,1,0), (k-1, k-1, 1), (n-1, n-2, 2)\}$ *et* τ_1 *est un cône régulier.*

Soit $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ une *G-subdivision régulière* de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})) \to \mathbb{A}^3_{\mathbf{k}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}) \to X(\Gamma^\star(\mathrm{f}))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^\star(\mathrm{f})$ de $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ (resp. $\Gamma^\star(\mathrm{f})_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^\star(\mathrm{f})$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de S associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

La proposition suivante est un analogue de la Proposition 2.4.

Proposition 4.2. — $S_{\mathcal{G}}$ *est la résolution minimale de* S.

Soient E un diviseur essentiel sur S ($\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$) et α_{E} le point générique de N_{E}. On note

$$(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(x), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(y), \mathrm{Ord}_t \alpha^\star_{\mathrm{E}}(z)),$$

où $\alpha^\star_{\mathrm{E}}$ est le comorphisme de α_{E}.

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 2.13.

Proposition 4.3. — *Soit* k *un entier,* $k \geqslant 2$.

Si $n = 2k$, *alors le vecteur* (μ_x, μ_y, μ_z) *appartient à l'union de* $G\tau_1$ *et* $G\tau_3$.

Si $n = 2k-1$, *alors le vecteur* (μ_x, μ_y, μ_z) *appartient à l'union de* $G\tau_2$ *et* $G\tau_3$.

Démontrer que l'application de Nash bijective pour les singularités de type $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$, équivaut à montrer que tous les wedges admissibles se relèvent à la résolution minimale de $\mathbb{D}_n$ (voir [Reg06]). Dans la suite, on montre que pour chaque diviseur essentiel E tous les K-wedges admissibles centrés en N_{E} se relèvent à la résolution minimale de S.

Soit $\mathrm{E} \in \mathrm{Ess}(S)$ et on considère un K-wedge $\omega : \mathrm{Spec}K[[s,t]] \to S$ admissible centré en N_{E}. On pose :

$$(\eta_x,\eta_y,\eta_z) := (\mathrm{Ord}_t\omega^\star(x),\mathrm{Ord}_t\omega^\star(y),\mathrm{Ord}_t\omega^\star(z)).$$

On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$$\omega^\star(x) = t^{\eta_x}\chi,\ \omega^\star(y) = t^{\eta_y}\varphi,\ \omega^\star(z) = t^{\eta_z}\psi,$$

où les séries formelles χ, φ, ψ ne sont pas divisibles par t.

La proposition suivante est un analogue du Corollaire 2.18. On note τ^0 l'intérieur du cône $\tau \in \Gamma^\star(\mathrm{f})$.

Proposition 4.4. — *Soit k un entier, $k \geqslant 2$. S'il existe au moins une série formelle parmi les séries χ, φ, ψ qui n'est pas inversible, alors on a :*

i) si $n = 2k$, alors le vecteur (η_x,η_y,η_z) appartient à l'union de τ_1^0 et τ_3^0 ;

ii) si $n = 2k-1$, alors le vecteur (η_x,η_y,η_z) appartient à l'union de τ_2^0 et τ_3^0.

En vertu de la Proposition 4.3, on a $\mu_x \leqslant n-1$, $\mu_y \leqslant n-2$ et $\mu_z \leqslant 2$. Comme $\eta_x \geqslant 1$, $\eta_y \geqslant 1$ et $\eta_z \geqslant 1$, on a $\mu_x - \eta_x \leqslant n-2$, $\mu_y - \eta_y \leqslant n-3$ et $\mu_z - \eta_z \leqslant 1$.

D'après la Proposition 2.14, si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K-wedge admissible ω centré en N_{E} se relève à la résolution minimale de S.

En vertu de la Proposition 2.15, on peut majorer le nombre de facteurs irréductibles comptés avec multiplicité des séries formelles χ, φ et ψ à l'aide des v-ordres. Plus précisément, il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ tel que :

$$\mathrm{FI}(\chi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\chi_v = \nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \leqslant n-2 \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\varphi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\varphi_v = \nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leqslant n-3 \ ;$$

$$\mathrm{FI}(\psi) \leqslant \mathrm{Deg}_t\psi_v = \nu_v\psi = \mu_z - \eta_z \leqslant 1.$$

Sauf mention du contraire, dans toute la suite le vecteur $v \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ satisfait la propriété ci-dessus. Le résultat suivant est un corollaire de la Proposition 2.15

Corollaire 4.5. — *La série formelle ψ est irréductible ou inversible.*

Maintenant, on donne notre preuve de la bijectivité de l'application de Nash pour les singularités de type $\mathbb{D}_n$.

THÉORÈME 4.6. — *L'application de Nash $\mathcal{N}_S$ associée à S est bijective.*

Démonstration. — En vertu de la Proposition 2.14, pour montrer que le K-wedge admissible ω se relève à la résolution minimale de S, il suffit de montrer que les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles. En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il y a au moins l'une d'elles n'est pas inversible.

On remarque qu'une série formelle $\phi \in K[[s,t]]$ est inversible dans $K[[s,t]]$ si et seulement si elle est inversible dans $\overline{K}[[s,t]]$, où $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K. Dans toute la suite, on suppose que le corps K est algébriquement clos.

Le K-wedge ω doit satisfaire l'équation $x^2 + z(y^2 + z^{n-2}) = 0$, d'où la relation suivante :

$$t^{2\eta_x}\chi^2 + t^{2\eta_y+\eta_z}\varphi^2\psi + t^{(n-1)\eta_z}\psi^{n-1} = 0 \tag{4.4}$$

En vertu de la Proposition 4.4, on a les cas suivants :

Cas 1). le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_3^0 du cône τ_3 ;

Cas 2). l'entier n est égal à $2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_1^0 du cône τ_1 ;

Cas 3). l'entier n est égal à $2k-1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, et le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur τ_2^0 du cône τ_2.

Dans chaque cas ci-dessus, on va obtenir une contradiction, ce qui achève la preuve du Théorème.

Cas 1). On suppose que $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_3^0$. Dans ce cas, on a $\eta_z = 2$ et $\eta_x = \eta_y + 1$. Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + \varphi^2\psi = -t^{2(n-2-\eta_y)}\psi^{n-1}.$$

On remarque que $n - 2 - \eta_y > 0$, car le vecteur (η_x, η_y, η_z) appartient à l'intérieur du cône τ_3.

D'après les Propositions 4.1 et 4.3, on a $\mu_z \leqslant 2$. Par conséquent, $\mu_z - \eta_z = 0$, ce qui implique que la série formelle ψ est inversible (voir la proposition 2.15).

Comme ψ est inversible et K algébriquement clos, il existe une série formelle inversible ψ_0 tel que $\psi = -\psi_0^2$, d'où

$$(\chi + \psi_0\varphi)(\chi - \psi_0\varphi) = (\text{-}1)^n t^{2(n-2-\eta_y)}\psi_0^{2(n-1)}.$$

Par conséquent, t divise χ et φ ou χ et φ sont inversibles. Ce sont des contradictions.

Cas 2). On suppose que $n = 2k$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_1^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_1^0 et $n = 2k$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k-1)\eta_z = \eta_y \text{ et } 2\eta_x > (2k-1)\eta_z.$$

Comme $1 \leqslant \eta_x \leqslant \mu_x \leqslant 2k-1$ (voir les Propositions 4.1 et 4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_y = 2k-1$ et $\eta_x \geqslant k$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k, k-1, 1)$. D'après la Proposition 2.15, les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction, car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n}\chi^2 + \varphi^2\psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v\psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Proposition 2.15 et le Corollaire 4.5) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0\psi^k$ et $\varphi = \varphi_0\psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$t^{2\eta_x+1-n}\chi_0^2\psi + \varphi_0^2 = -1.$$

Comme $\nu_v\psi = 1$, on obtient que $\nu_v\chi = \nu_v\chi_0\psi^k = \nu_v\chi_0 + k$. Comme $\mu_x \leqslant 2k-1$ et $\eta_x \geqslant k$, on a $\nu_v\chi = \mu_x - \eta_x \leqslant k-1$ (voir la Proposition 2.15). Par conséquent, on a $\nu_v\chi_0 \leqslant -1$, ce qui est une contradiction.

La preuve du Cas 3) est analogue à celle du Cas 2).

Cas 3). On suppose que $n = 2k-1$, où k est un entier supérieur ou égal à 2 et $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) \in \tau_2^0$.

Comme (η_x, η_y, η_z) appartient à τ_2^0 et $n = 2k-1$, le vecteur (η_x, η_y, η_z) satisfait les relations suivantes :

$$(k-1)\eta_z = \eta_x \text{ et } 2\eta_y > (2k-3)\eta_z.$$

Comme $1 \leqslant \eta_y \leqslant \mu_y \leqslant 2k-3$ (voir les Propositions 4.1 et 4.3), on obtient que $\eta_z = 1$, $\eta_x = k-1$ et $\eta_y \geqslant k-1$. On a donc $\mu_z = 2$. En effet, si $\mu_z = 1$, alors $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (k-1, k-1, 1)$. D'après la Proposition 2.15, les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, ce qui est une contradiction car on a supposé que parmi ces séries formelles il y en a au moins une qui n'est pas inversible.

Au moyen de la Relation (4.4), on obtient la relation suivante :

$$\chi^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi^2\psi = -\psi^{n-1}.$$

On remarque que ψ est irréductible car $\nu_v\psi = \mu_z - \eta_z = 1$ (voir la Proposition 2.15 et le Corollaire 4.5) Au moyen de la relation ci-dessus, on obtient que $\chi = \chi_0\psi^{k-1}$ et $\varphi = \varphi_0\psi^{k-1}$, où χ_0 et φ_0 sont deux séries formelles qui satisfont la relation suivante :

$$\chi_0^2 + t^{2\eta_y+2-n}\varphi_0^2\psi = -1.$$

Comme $\nu_v\psi = 1$, on obtient que $\nu_v\varphi = \nu_v\varphi_0\psi^{k-1} = \nu_v\varphi_0 + k - 1$. Comme $\mu_y \leqslant 2k-3$ et $\eta_y \geqslant k-1$, on a $\nu_v\varphi = \mu_y - \eta_y \leqslant k-2$ (voir la Proposition 2.15). Par conséquent, on a $\nu_v\varphi_0 \leqslant -1$, ce qui est une contradiction.

Dans le trois cas précédent, on a obtenu une contradiction, d'où le théorème. $\square$

Remerciements. — Je tiens à remercier Gérard Gonzalez-Sprinberg pour les nombreuses discussions et son constant encouragement. Je remercie également Marcel Morales pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Bibliographie

[BGS95] Bouvier (C.) and Gonzalez-Sprinberg (G.). — Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. Tohoku Math. J. (2), 47(1) p. 125-149 (1995).

[CGSLJ96] Campillo (A.), Gonzalez-Sprinberg (G.), and Lejeune-Jalabert (M.). Clusters of infinitely near points. Math. Ann., 306(1) p. 169-194 (1996).

[EM09] Ein (L.) and Mustaţă (M.). — Jet schemes and singularities. In Algebraic geometry-Seattle 2005. Part 2, volume 80 of Proc. Sympos. Pure Math., pages 505-546. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2009).

[FZ03] Flenner (H.) and Zaidenberg (M.). — Rational curves and rational singularities. Math. Z., 244(3) p. 549-575 (2003).

[GP07] González Pérez (P. D.). — Bijectiveness of the Nash map for quasi-ordinary hypersurface singularities. Int. Math. Res. Not. IMRN, (19) :Art. ID rnm076, 13 (2007).

[GSLJ91] Gonzalez-Sprinberg (G.) and Lejeune-Jalabert (M.). — Modèles canoniques plongés. I. Kodai Math. J., 14(2) p. 194-209 (1991).

[GSLJ97] Gonzalez-Sprinberg (G.) and Lejeune-Jalabert (M.). — Families of smooth curves on surface singularities and wedges. Ann. Polon. Math., 67(2) p. 179-190, 1997.

[IK03] Ishii (S.) and Kollár (J.). — The Nash problem on arc families of singularities. Duke Math. J., 120(3) p. 601-620 (2003).

[Ish05] Ishii (S.). — Arcs, valuations and the Nash map. J. Reine Angew. Math., 588 p. 71-92 (2005).

[Ish06] Ishii (S.). — The local Nash problem on arc families of singularities. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 56(4) p. 1207-1224 (2006).

[Ish07] Ishii (S.). — Jet schemes, arc spaces and the Nash problem. C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., 29(1) p. 1-21 (2007).

[KKMS73] Kempf (G.), Knudsen (F.), Mumford (D.), and Saint-Donat (B.). Toroidal embeddings. I. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin (1973).

[LA11] Leyton-Alvarez (M.). — Une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles avec application de nash bijective. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 349(5-6) p. 323-326 (2011).

[Lip88] Lipman (J.). — On complete ideals in regular local rings. In Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, p. 203-231. Kinokuniya, Tokyo (1988).

[LJ80] Lejeune-Jalabert (M.). — Arcs analytiques et resolution minimale des singularites des surfaces quasi homogenes. In Séminaire sur les Singularités des Surfaces, volume 777 of Lecture Notes in Mathematics, p. 303-336. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam (1980).

[LJRL99] Lejeune-Jalabert (M.) and Reguera-López (A.J.). — Arcs and wedges on sandwiched surface singularities. Amer. J. Math., 121(6) p. 1191-1213 (1999).

[Mer80] Merle (M.). — Polyèdre de newton, éventails et désingularisation, d'après a. n. varchenko. In Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Palaiseau, France, 1976-1977, volume 777 of Lecture Notes in Mathematics, pages 289-294. Springer Berlin / Heidelberg, Amsterdam (1980).

[Mor08] Morales (M.). — Some numerical criteria for the Nash problem on arcs for surfaces. Nagoya Math. J., 191 p. 1-19 (2008).

[Nas95] Nash (J.F.) Jr. — Arc structure of singularities. Duke Math. J., 81(1) p. 31-38 (1996), 1995. A celebration of John F. Nash, Jr.

[Oka87] Oka (M.). — On the resolution of the hypersurface singularities. In Complex analytic singularities, volume 8 of Adv. Stud. Pure Math., pages 405-436. North-Holland, Amsterdam (1987).

[Pet09] Petrov (P.). — Nash problem for stable toric varieties. Math. Nachr., 282(11) p. 1575-1583 (2009).

[Plé05] Plénat (C.). — À propos du problème des arcs de Nash. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 55(3) p. 805-823 (2005).

[Plé08] Plénat (C.). — The Nash problem of arcs and the rational double points Dn. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 58(7) p. 2249-2278 (2008).

[PP10] Pe-Pereira (M.). — Nash problem for quotient surface singularities. Preprint, arXiv :1011.3792v1 [math.AG] (2010).

[PPP06] Plénat (C.) and Popescu-Pampu (P.). — A class of non-rational surface singularities with bijective Nash map. Bull. Soc. Math. France, 134(3) p. 383-394 (2006).

[PPP08] Plénat (C.) and Popescu-Pampu (P.). — Families of higher dimensional germs with bijective Nash map. Kodai Math. J., 31(2) p. 199-218 (2008).

[PS10] Plénat (C.) and Spivakovsky (M.). — The nash problem of arcs and the rational double point E6. Preprint, arXiv :1011.2426v1 [math.AG] (2010).

[Reg95] Reguera (A.-J.). — Families of arcs on rational surface singularities. Manuscripta Math., 88(3) p. 321-333, 1995.

[Reg06] Reguera (A.-J.). — A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map. Compos. Math., 142(1) p. 119-130 (2006).

[Sum74] Sumihiro (H.). — Equivariant completion. J. Math. Kyoto Univ., 14 p. 1-28 (1974).

[Var76] Varchenko (A. N.). — Zeta-function of monodromy and Newton's diagram. Invent. Math., 37(3) p. 253-262 (1976).