ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Jean-Marc Drézet

Courbes multiples primitives et déformations de courbes lisses

Tome XXII, nº 1 (2013), p. 133-154.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2013_6_22_1_133_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXII, n° 1, 2013
pp. 133–154

Courbes multiples primitives et déformations de courbes lisses

Jean-Marc Drézet[(1)]

Résumé. — Une *courbe multiple primitive* est une variété de Cohen-Macaulay Y telle que $C = Y_{red}$ soit une courbe lisse irréductible, et que Y puisse être localement plongée dans une surface lisse. Soient T une courbe lisse et $t_0 \in T$. Soient $\mathcal{D} \to T$ une famille plate de courbes lisses irréductibles, et $C = \mathcal{D}_{t_0}$. Alors le n-ième voisinage infinitésimal de C dans $\mathcal{D}$ est une courbe multiple primitive de multiplicité n, et le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ de C dans C_n est le fibré trivial sur la courbe induite C_{n-1} de multiplicité $n-1$. Réciproquement, on montre que toute courbe multiple primitive $Y = C_n$ de multiplicité n telle que $\mathcal{I}_C$ soit trivial sur C_{n-1} peut être construite de cette façon.

Abstract. — A *primitive multiple curve* is a Cohen-Macaulay scheme Y over $\mathbb{C}$ such that $C = Y_{red}$ is a smooth curve, and that Y can be locally embedded in a smooth surface. Let T be a smooth curve and $t_0 \in T$. Let $\mathcal{D} \to T$ be a flat family of projective smooth irreducible curves, and $C = \mathcal{D}_{t_0}$. Then the n-th infinitesimal neighbourhood of C in $\mathcal{D}$ is a primitive multiple curve C_n of multiplicity n, and the ideal sheaf $\mathcal{I}_C$ of C in C_n is the trivial line bundle on the induced curve C_{n-1} of multiplicity $n-1$. Conversely, we prove that every projective primitive multiple curve $Y = C_n$ such that $\mathcal{I}_C$ is the trivial line bundle on C_{n-1} can be obtained in this way.

(1) Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France.
drezet@math.jussieu.fr

Article proposé par Marc Spivakovsky.

Sommaire

1. Introduction

1.1. Courbes multiples primitives

Une *courbe multiple primitive* est une variété algébrique complexe Y, de Cohen-Macaulay et telle que la sous-variété réduite associée $C = Y_{red}$ soit une courbe lisse irréductible, et que tout point fermé de Y possède un voisinage pouvant être plongé dans une surface lisse. Ces courbes ont été définies et étudiées par C. Bănică et O. Forster dans [1]. On s'intéresse plus particulièrement ici au cas où C, et donc Y, sont projectives.

Soient P un point fermé de Y, et U un voisinage de P pouvant être plongé dans une surface lisse S. Soit z un élément de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,P}$ de S en P engendrant l'idéal de C dans cet anneau. Il existe alors un unique entier n, indépendant de P, tel que l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_{S,P}$ soit engendré par (z^n). Cet entier n s'appelle la *multiplicité* de Y. Si $n = 2$ on dit que Y est une *courbe double*. Il existe une filtration canonique

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ ,$$

où au voisinage de chaque point P l'idéal de C_i dans $\mathcal{O}_{S,P}$ est (z^i). Donc C_i est une courbe multiple primitive de multiplicité i.

Soit $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C dans Y. Alors le faisceau conormal de C, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$ est un fibré en droites sur C, dit *associé* à Y, et $\mathcal{I}_C$ est un fibré en droites sur C_{n-1}.

Les exemples les plus simples de courbes multiples primitives sont les courbes de Cohen-Macaulay de courbe réduite associée lisse et plongées dans une surface lisse. En particulier, soit $L \in \mathrm{Pic}(C)$. On peut voir C comme plongée dans le fibré vectoriel L^*, qui est une surface lisse, au moyen de la section nulle. Alors le n-ième voisinage infinitésimal de C dans L^* est une courbe primitive de multiplicité n et de fibré en droites associé L. On l'appelle la *courbe primitive triviale* de fibré associé L.

1.2. Courbes définies par des familles de courbes lisses

En général une courbe multiple primitive ne peut pas être plongée dans une surface lisse. D'après [2], theorem 7.1, la seule courbe double non triviale de courbe réduite associée $\mathbb{P}_1$ pouvant être plongée dans une surface lisse est la courbe double déduite d'une conique plane. Or il existe beaucoup d'autres courbes doubles de courbe réduite associée $\mathbb{P}_1$.

On s'intéresse dans cet article aux courbes multiples définies par les familles de courbes lisses. Ce sont des cas particuliers de courbes multiples primitives plongées dans une surface lisse. Soient T une courbe lisse (ou un germe de courbe lisse), t_0 un point fermé de T, et $\mathcal{D} \to T$ une famille plate de courbes projectives lisses et irréductibles paramétrée par T. Soit $C = \mathcal{D}_{t_0}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, le n-ième voisinage infinitésimal C_n de C dans $\mathcal{D}$ est une courbe primitive de multiplicité n, de courbe lisse associée C. Pour cette courbe primitive le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ est le fibré trivial sur C_{n-1}. On dit d'une telle courbe qu'elle *provient d'une famille de courbes lisses.*

Le principal résultat de cet article est le

1.2.1. THÉORÈME. — *Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n, de courbe lisse sous-jacente C. Alors C_n provient d'une famille de courbes lisses si et seulement si le faisceau d'idéaux de C dans C_n est trivial sur C_{n-1}.*

La démonstration repose sur la paramétrisation des courbes multiples primitives. Les courbes doubles ont été décrites dans [2]. Le théorème 1.2.1 pour les courbes doubles en découle aisément. On fait ensuite une démonstration par récurrence sur n, en s'appuyant sur la description des courbes de multiplicité $n > 2$ donnée dans [4].

Les courbes multiples primitives provenant de familles de courbes lisses peuvent aussi être construites de la façon suivante : on part d'une famille plate $\pi : \mathcal{D} \to S$ de courbes lisses paramétrée par une variété lisse S. Soit $s_0 \in S$ un point fermé tel que $\mathcal{D}_{s_0} \simeq C$. Soit $Z_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n)) \hookrightarrow S$ un plongement tel que l'image du point fermé de Z_n soit s_0. Alors $\pi^{-1}(Z_n)$ est une courbe multiple primitive de multiplicité n provenant d'une famille de courbes lisses (cela revient à inclure Z_n dans une courbe lisse de S).

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n telle que le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ soit trivial sur C_{n-1}. On a une suite exacte canonique de faisceaux cohérents sur C_{n-1}

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_{C_n|C_{n-1}} \longrightarrow \Omega_{C_{n-1}} \longrightarrow 0.$$

A tout prolongement de C_{n-1} en courbe de multiplicité n correspond un certain type d'extension de $\Omega_{C_{n-1}}$ par $\mathcal{O}_C$ sur C_{n-1} dont le terme du milieu est localement libre. On montre que cette correspondance est bijective (un résultat analogue a été obtenu dans [4], 6-).

On considère ensuite une famille plate de courbes lisses $\mathcal{D} \to S$ comme précédemment, telle que le morphisme de Kodaïra-Spencer $KS : T_{s_0}S \to H^1(C, T_C)$ soit surjectif. On suppose que C_{n-1} provient d'un plongement $Z_{n-1} \hookrightarrow S$. On fait ensuite le lien entre les prolongements de ce plongement à $Z_n \hookrightarrow S$ et les extensions de $\Omega_{C_{n-1}}$ par $\mathcal{O}_C$.

Soit g le genre de C, et supposons que $g \geqslant 2$. Alors les prolongements de C_{n-1} en courbes de multiplicité n telles que $\mathcal{I}_C$ soit trivial sur C_{n-1} forment un espace de dimension $3g-3$ si C_2 est triviale, et $3g-4$ sinon.

1.3. Motivation

Soient S une courbe lisse, $\pi : \mathcal{C} \to S$ une famille plate de courbes projectives, et $s_0 \in S$ tel que $\mathcal{C}_{s_0}$ soit une courbe multiple primitive de multiplicité $n > 0$, de courbe lisse associée C. Soient $\mathcal{O}(1)$ un fibré en droites très ample sur $\mathcal{C}$ et P un polynôme en une variable à coefficients rationnels. On a alors une *variété de modules relative*

$$\rho : \mathbf{M}_{\mathcal{O}(1)}(P) \longrightarrow S$$

des faisceaux semi-stables sur les fibres de π de polynôme de Hilbert P (cf. [13]). En général ρ n'est pas plat (cf. [12]). Par exemple, si les courbes $\mathcal{C}_s$, $s \neq s_0$, sont lisses, $\mathcal{O}_C$, vu comme faisceau sur $\mathcal{C}_{s_0}$, est stable, mais ne se déforme pas en faisceaux stables sur les autres fibres $\mathcal{C}_s$.

Je conjecture que si les fibres $\mathcal{C}_s$, $s \neq s_0$, ont exactement n composantes irréductibles qui sont lisses, alors ρ est plat. Les faisceaux (semi-)stables sur ce genre de courbe sont bien connus (cf. [14]). Il reste cependant à classifier les courbes multiples primitives qui sont des déformations de courbes réductibles à composantes lisses.

Il est facile de voir que les courbes multiples provenant de déformations de courbes lisses étudiées ici sont des cas particuliers de déformations de courbes réductibles à composantes lisses. C'est l'exemple le plus simple, et la classification est donc donnée dans ce cas.

2. Préliminaires

2.1. Cohomologie de Čech

On donne ici plusieurs façons de représenter des faisceaux ou des classes de cohomologie en utilisant différentes variantes de la cohomologie de Čech.

2.1.1. *Définition de faisceaux par recollements.* — Soient X une variété algébrique et $(X_i)_{i\in I}$ un revouvrement ouvert de X. Pour tout $i \in I$, soient U_i une variété algébrique et $\alpha_i : X_i \to U_i$ un isomorphisme. Pour tous $i, j \in I$ distincts, soit $U_{ij}^{(i)} = \alpha_i(X_{ij})$.

La variété X est obtenue en « recollant » les variétés U_i au moyen des isomorphismes

$$\alpha_{ij} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : U_{ij}^{(i)} \longrightarrow U_{ij}^{(j)}.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On en déduit $\mathcal{F}_i = (\alpha_i^{-1})^*(\mathcal{F})$, faisceau cohérent sur U_i. On a des isomorphismes canoniques

$$\Theta_{ij} : \mathcal{F}_{i|U_{ij}^{(i)}} \xrightarrow{\ \simeq\ } (\alpha_{ij})^*(\mathcal{F}_{j|U_{ij}^{(j)}})$$

tels que

$$\Theta_{ik} \ = \ (\alpha_{ij})^*(\Theta_{jk}) \circ \Theta_{ij}$$

sur $U_{ijk}^{(i)} = \alpha_i(X_{ijk})$.

Réciproquement, étant donnés des faisceaux $\mathcal{F}_i$ sur U_i et des isomorphismes Θ_{ij} possédant les propriétés précédentes, on construit aisément un faisceau $\mathcal{F}$ sur X en recollant les $\alpha_i^*(\mathcal{F}_i)$.

2.1.2. *Définition de classes de cohomologie.* — On conserve les notations de 2.1.1. Soit $u \in H^1(X, \mathcal{F})$, représenté par un cocycle (u_{ij}), avec $u_{ij} \in H^0(X_{ij}, \mathcal{F})$. Soit $v_{ij} \in H^0(U_{ij}^{(i)}, \mathcal{F}_i)$ correspondant à u_{ij}. Alors on a dans $H^0(U_{ijk}^{(i)}, \mathcal{F}_i)$

$$v_{ik} \ = \ v_{ij} + \Theta_{ij}^{-1}(v_{jk}).$$

Réciproquement, toute famille (v_{ij}) vérifiant les égalités précédentes définit un élément de $H^1(X, \mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X, représenté par une famille (λ_{ij}), $\lambda_{ij} \in H^0(U_{ij}^{(i)}, \mathcal{O}_{U_i}^*)$, comme dans 2.1.1. (le faisceau sur U_i pour $\mathcal{L}$ étant donc $\mathcal{O}_{U_i}$). On a donc des ismorphismes canoniques $(\alpha_i^{-1})^*(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_{U_i}$.

Soit $\mathbf{u} \in H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$, représenté par un cocycle $(\mathbf{u}_{ij})$, avec $\mathbf{u}_{ij} \in H^0(X_{ij}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$. On déduit de $\mathbf{u}_{ij}$ et des isomorphismes $\mathcal{F}_i \simeq (\alpha_i^{-1})^*(\mathcal{F})$, $\mathcal{O}_{U_j} \simeq (\alpha_j^{-1})^*(\mathcal{L})$ (bien noter que i est utilisé pour $\mathcal{F}$ et j pour $\mathcal{L}$) un élément $\mathbf{v}_{ij}$ de $H^0(U_{ij}^{(i)}, \mathcal{F}_i)$. Plus précisément, $\mathbf{v}_{ij}$ est obtenu au moyen d'un isomorphisme $(\alpha_i^{-1})^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) \simeq \mathcal{F}_i$ sur $U_{ij}^{(i)}$: si $x \in X_{ij}$, $f \in \mathcal{F}_x$, $\ell \in \mathcal{L}_x$, on en déduit $y = \alpha_i(x) \in U_{ij}^{(i)}$, $f_i \in \mathcal{F}_{i,y}$, $\ell_j \in \mathcal{O}_{U_j,\alpha_j(x)}$, $\ell_i = \Theta_{ij}^*(\ell_j) \in \mathcal{O}_{U_j,\alpha_j(x)}$. D'où $\ell_i f_i \in \mathcal{F}_{i,y}$.

On a alors dans $H^0(U_{ijk}^{(i)}, \mathcal{F}_i)$

$$\mathbf{v}_{ik} \;=\; \Theta_{ij}^*(\lambda_{jk})\mathbf{v}_{ij} + \Theta_{ij}^{-1}(\mathbf{v}_{jk}).$$

Réciproquement, toute famille $(\mathbf{v}_{ij})$ vérifiant les égalités précédentes définit un élément de $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$.

2.2. Courbes multiples primitives

Soit C une courbe lisse irréductible et projective. Soit Y une courbe multiple primitive de multiplicité n, de courbe lisse associée C et de fibré en droites sur C associé L. Soit

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y$$

la filtration canonique. Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, C_i est une courbe multiple primitive de multiplicité i. On notera $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$.

2.2.1. *Structure locale.* — D'après [4], théorème 5.2.1, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,P}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{C,P} \otimes (\mathbb{C}[t]/(t^n))$.

2.2.2. *Courbes de multiplicité 2.* — (cf. [2]) Deux courbes multiples primitives C_2, C_2' de courbe lisse associée C sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $C_2 \simeq C_2'$ induisant l'identité de C. Dans ce cas les fibrés en droites sur C associés à C_2, C_2' sont isomorphes.

Soient C une courbe lisse irréductible et $L \in \mathrm{Pic}(C)$. Soit C_2 une courbe multiple primitive de multiplicité 2, de courbe lisse associée C et de fibré en droites sur C associé L. Soit $E = (\Omega_{C_2|C})^*$, qui est un fibré vectoriel de rang 2 sur C. On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow E \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

associée à un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(L^*, T_C) = H^1(C, T_C \otimes L)$.
Réciproquement, on montre que pour toute suite exacte (S) du type précédent, il existe une courbe C_2 dont la suite exacte associé est (S).

On montre que deux courbes C_2, C_2', de courbe lisse et fibré associés C et L, sont isomorphes si et seulement si les éléments correspondants de $H^1(T_C \otimes L)$ sont proportionnels. La courbe correspondant à 0 est la courbe triviale. Les courbes doubles non triviales de courbe lisse associée C et de fibré en droites associé L sont donc paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(H^1(T_C \otimes L))$.

2.2.3. *Filtration canonique d'un faisceau cohérent.* — Le faisceau $\mathcal{I}_C$ est un fibré en droites sur C_{n-1}. Il existe d'après [3], théorème 3.1.1, un fibré en droites $\mathbb{L}$ sur C_n dont la restriction à C_{n-1} est $\mathcal{I}_C$. On a alors, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_n$-modules $\mathcal{E}$ un morphisme canonique

$$\mathcal{E} \otimes \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{E} \tag{2.1}$$

qui en chaque point fermé P de C est la multiplication par z.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Pour tout entier $i \geqslant 0$ on note $\mathcal{E}^{(i)}$ le noyau du morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathbb{L}^{-i}$ déduit de (2.1). Au point P, $\mathcal{E}_P^{(i)}$ est donc le sous-module de $\mathcal{E}_P$ constitué des éléments annulés par z^i. La filtration

$$\mathcal{E}^{(0)} = 0 \subset \mathcal{E}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{E}$$

s'appelle la *seconde filtration canonique* de $\mathcal{E}$. Ses gradués sont des faisceaux sur C (cf. [5], 3.).

2.3. Fibré déterminant

On conserve les notations de 2.2.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. On pose

$$\det_C(\mathcal{E}) \;=\; \bigotimes_{i=1}^{n} \det(\mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{E}^{(i-1)}) \;.$$

2.3.1. Proposition. — *Soit* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_m = \mathcal{E}$ *une filtration de* $\mathcal{E}$ *dont les gradués sont des faisceaux sur* C*. Alors on a*

$$\det_C(\mathcal{E}) \;=\; \bigotimes_{i=1}^{m} \det(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) \;.$$

Démonstration. — On a $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}^{(1)}$. Soit $F = \mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{F}_1$. On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & F \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}/\mathcal{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& F \arrow[d] & & 0 & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Supposons que le résultat soit vrai pour le faisceau $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$. On considère la filtration de $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$

$$0 \subset F \subset \mathcal{E}^{(2)}/\mathcal{F}_1 \cdots \subset \mathcal{E}/\mathcal{F}_1.$$

On en déduit que

$$\bigotimes_{i=2}^{m} \det(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) = \det_C(\mathcal{E}/\mathcal{F}_1) = \det(F) \otimes \det_C(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i=1}^{m} \det(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) &= \det(\mathcal{F}_1) \otimes \det(F) \otimes \det_C(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)}) \\
&= \det(\mathcal{E}^{(1)}) \otimes \det_C(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)}) \\
&= \det_C(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai pour $\mathcal{E}$.

Il suffit donc de prouver le résultat pour $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$, qui lui-même découle de celui pour $\mathcal{E}/\mathcal{F}_2$. On se ramène ainsi à prouver le résultat pour $\mathcal{F}_m$. Mais c'est bien connu pour les faisceaux sur C. $\square$

2.3.2. COROLLAIRE. — *Soit* $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux cohérents sur* C_n. *Alors on a*

$$\det_C(\mathcal{E}) = \det_C(\mathcal{E}') \otimes \det_C(\mathcal{E}'').$$

2.4. Construction des courbes multiples primitives (cf. [4])

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $Z_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$. Pour toute variété algébrique affine $U = \mathrm{spec}(A)$, on a $U \times Z_n = \mathrm{spec}(A[t]/(t^n))$. Si $u \in A[t]/(t^n)$, on notera u_i le coefficient de t^i dans u.

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n, de courbe réduite associée C et de fibré en droites sur C associé L. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de C tel que chaque U_i soit affine (c'est-à-dire distinct de C si C est projective), et que les restrictions $\omega_{C|U_i}$ et $L_{|U_i}$ soient triviales. Alors C_n peut se construire en recollant les variétés $U_i \times Z_n$ au moyen d'automorphismes σ_{ij} des $U_{ij} \times Z_n$ laissant U_{ij} invariant, la famille (σ_{ij}) vérifiant la relation de cocycle

$$\sigma_{ik} \ = \ \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}.$$

Soit U un ouvert affine de C tel que $\omega_{C|U}$ soit trivial, et soit $x \in \mathcal{O}_C(U)$ tel que dx engendre $\omega_{C|U}$. Alors les automorphismes d'algèbres de $\mathcal{O}(U \times Z_n) \simeq \mathcal{O}_C(U)[t]/(t^n)$ sont de la forme $\phi_{\mu,\nu}$, avec $\mu, \nu \in \mathcal{O}_C(U)[t]/(t^{n-1})$, ν inversible, où, pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_C(U)$,

$$\phi_{\mu,\nu}(\alpha) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}(\mu t)^i \frac{\partial^i \alpha}{\partial^i x},$$

et $\phi_{\mu,\nu}(t) = \nu t$. Remarquons que $\phi_{\mu,\nu}$ est entièrement déterminé par

$$\phi_{\mu,\nu}(x) \ = \ x + \mu t \qquad \text{et} \qquad \phi_{\mu,\nu}(t) \ = \ \nu t \ .$$

En toute rigueur on devrait noter ce morphisme $\phi^{dx}_{\mu,\nu}$, car μ dépend du choix de x.

Supposons que σ_{ij}^{-1} corresponde à $\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}$. On a alors les relations de cocycle

$$\phi_{\mu_{ik},\nu_{ik}} \ = \ \phi_{\mu_{jk},\nu_{jk}} \circ \phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}.$$

La famille (ν_{ij}) n'est pas en général un cocycle de $\mathcal{O}^*_{n-1}$, mais $(\nu_{ij,0})$ est un cocycle de $\mathcal{O}^*_C$, et l'élément induit de $H^1(\mathcal{O}^*_C)$ est le fibré en droites L.

2.4.1. *Propriétés des automorphismes $\phi_{\mu,\nu}$.* — Si $\mu, \mu' \in \mathcal{O}_C(U)[t]/(t^{n-1})$ et $\nu, \nu' \in \mathcal{O}_C(U)[t]/(t^{n-1})$ sont inversibles, on a

$$\phi_{\mu'\nu'} \circ \phi_{\mu\nu} \ = \ \phi_{\mu"\nu"},$$

avec

$$\mu" = \mu' + \nu'\phi_{\mu',\nu'}(\mu), \qquad \nu" = \nu'\phi_{\mu',\nu'}(\nu).$$

On a $\phi_{\mu\nu}^{-1} = \phi_{\overline{\mu},\overline{\nu}}$, avec

$$\overline{\mu} \;=\; -\phi_{\mu\nu}^{-1}(\frac{\mu}{\nu}), \qquad \overline{\nu} \;=\; \phi_{\mu\nu}^{-1}(\frac{1}{\nu}).$$

2.4.2. *Prolongement de courbes multiples.* — On suppose que $n \geqslant 3$. Soit C_{n-1} une courbe multiple primitive de multiplicité $n-1$, de courbe réduite associée C et de fibré en droites sur C associé L. On note comme dans 2.2.2 $E = (\Omega_{C_2|C})^*$.

Soit C_n une courbe multiple de multiplicité n dont la courbe de multiplicité $n-1$ sous-jacente est C_{n-1}. On dit qu'une telle courbe est un *prolongement* de C_{n-1} en courbe multiple primitive de multiplicité n. Deux tels prolongements C_n, C'_n sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $C_n \simeq C'_n$ induisant l'identité de C_{n-1}. On définit dans [4], C_n étant donné, une paramétrisation des classes d'isomorphisme de prolongements de C_{n-1} en courbe multiplicité n par $H^1(E \otimes L^{n-1})$ (C_n correspondant a 0).

On peut retrouver ce résultat à partir des cocycles. Supposons que C_n soit obtenue à partir d'une famille (σ_{ij}) comme précédemment. Une autre extension C'_n de C_{n-1} provient d'une autre famille (σ'_{ij}), où ${\sigma'}_{ij}^{-1} = \phi_{\mu'_{ij},\nu'_{ij}}$, μ'_{ij}, μ'_{ij} étant de la forme

$$\mu'_{ij} \;=\; \mu_{ij} + \alpha_{ij} t^{n-2}, \qquad \nu'_{ij} \;=\; \nu_{ij} + \beta_{ij} t^{n-2},$$

avec $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_{ij})$. En utilisant 2.4.1, on voit que la relation $\sigma'_{ik} = \sigma'_{jk} \circ \sigma'_{ij}$, compte tenu du fait que $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}$, équivaut à l'égalité

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ik} \\ \beta_{ik} \end{pmatrix} \;=\; \nu_{ij,0}^{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_{jk} \\ \beta_{jk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \mu_{jk,0} \\ 0 & \nu_{jk,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

D'après 2.1.2 et la construction de $\Omega_{C_2|C}$ donnée dans 3.1, ces relations montrent que $((\alpha_{ij}, \beta_{ij}))$ définit un élément u de $H^1(E \otimes L^{n-1})$. En reprenant la paramétrisation des extensions de C_n donnée dans [4] on voit aisément que u est précisément l'élément de $H^1(E \otimes L^{n-1})$ correspondant à C'_n.

2.4.3. *Notation.* — On notera $C'_n = C_n(u)$ (et donc $C_n = C_n(0)$).

2.4.4. *Prolongements à faisceau d'idéaux constant.* — Le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{C,C_n}$ de C dans C_n est un fibré en droites sur C_{n-1}. Il est construit en recollant les idéaux (t) des faisceaux $\mathcal{O}_{U_i \times Z_n}$ au moyen des isomorphismes $\phi_{\overline{\mu}_{ij},\overline{\nu}_{ij}}$, où $\overline{\mu}_{ij}, \overline{\nu}_{ij}$ sont les images de μ_{ij}, ν_{ij} respectivement dans $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^{n-2})$. On en déduit aisément que les extensions $C_n(u)$ de C_{n-1} telles que $\mathcal{I}_{C,C_n(u)} = \mathcal{I}_{C,C_n}$ sont celles correspondant aux u définis par des familles $((\alpha_{ij},\beta_{ij}))$ où les β_{ij} sont nuls. C'est-à-dire que ce sont les courbes $C_n(u)$, où u appartient à l'image de $H^1(T_C\otimes L^{n-1})$ dans $H^1(E\otimes L^{n-1})$.

2.4.5. *Courbes multiples à faisceau d'idéaux trivial.* — Si $\mathcal{I}_{C,C_n}$ est trivial (sur C_{n-1}), le fibré en droites sur C associé à C_n est $\mathcal{O}_C$. Soit C_2 une courbe double de fibré en droites associé $\mathcal{O}_C$. Si $E=(\Omega_{C_2|C})^*$, on a une suite exacte

$$0\longrightarrow T_C\longrightarrow E\longrightarrow \mathcal{O}_C\longrightarrow 0,$$

correspondant à $\sigma\in H^1(T_C)$. Soit $D=\mathbb{C}\sigma\subset H^1(T_C)$. On a vu dans 2.2.2 que C_2 est entièrement déterminée par D.

On suppose maintenant que $n\geqslant 3$. Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n de courbe lisse associée C, telle que $\mathcal{I}_{C,C_n}$ soit trivial sur C_{n-1}. On a vu précédemment que les prolongements de C_{n-1} en courbe C'_n de multiplicité n telle que $\mathcal{I}_{C,C'_n}$ soit trivial étaient paramétrées par l'image de $H^1(T_C)$ dans $H^1(E)$, c'est-à-dire par $H^1(T_C)/D$.

2.5. Un lemme sur les extensions

Soient X une variété algébrique, et G, F, $\mathbb{E}$, $\mathcal{U}$ des faisceaux cohérents sur X. On suppose qu'on a une suite exacte

$$0\longrightarrow G\oplus F\xrightarrow{\beta}\mathbb{E}\longrightarrow\mathcal{U}\longrightarrow 0.$$

Pour tout morphisme $\psi:G\to F$, on note $\mathcal{E}_\psi$ le conoyau du morphisme composé

$$G\xrightarrow{(I_G,-\psi)}G\oplus F\xrightarrow{\beta}\mathbb{E}.$$

On a donc un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & F \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\beta(I_G,\psi)"] \arrow[d, "(I_G,\psi)"] & \mathbb{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_\psi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G\oplus F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \mathbb{E} \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & F \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

2.5.1. LEMME. — *Soient* $\sigma = (\sigma_F, \sigma_G)$ *l'élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, F) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, G)$ *correspondant à la ligne exacte du bas, et* $\eta(\psi) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, F)$ *celui correspondant à la colonne exacte de droite. Alors on a*

$$\eta(\psi) - \eta(0) \ = \ \overline{\psi}(\sigma_G) \ ,$$

$\overline{\psi}$ *désignant le morphisme* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, G) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, F)$ *induit par* ψ.

Démonstration. — Soit

$$\mathbb{U}_2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{U}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{U}_0 \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathcal{U}$$

une résolution localement libre de $\mathcal{U}$, telle que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{U}_0, G \oplus F) = \{0\}$. De la suite exacte $0 \to \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \to \mathbb{U}_0 \to \mathcal{U} \to 0$, on déduit la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{U}_0, G \oplus F) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Hom}(\mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2), G \oplus F) \xrightarrow{\delta = (\delta_G, \delta_F)} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{U}, G \oplus F) \longrightarrow 0.$$

Soient $\lambda : \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \to G$, $\mu : \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \to F$ tels que $\delta(\lambda, \mu) = \sigma$. Soient $f'_1 : \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \to \mathbb{U}_0$ le morphisme induit par f_1 et

$$\gamma = (f'_1, \lambda, \mu) : \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \longrightarrow \mathbb{U}_0 \oplus F \oplus G \ .$$

Alors on a $\mathbb{E} = \operatorname{coker}(\gamma)$, les morphismes $G \oplus F \to \mathbb{E}$ et $\mathbb{E} \to \mathcal{U}$ étant les morphismes évidents. Soit $\nu = \psi \circ \lambda + \mu \in \mathrm{Hom}(\mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2), F)$. Alors on a un diagramme commutatif avec ligne exacte

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "{(0, I_G, -\psi)}"] & \mathbb{U}_0 \oplus G \oplus F \arrow[rr, "{(I, \psi + I_F)}"] & & \mathbb{U}_0 \oplus F \\
& & \mathbb{U}_1/\operatorname{im}(f_2) \arrow[ul, "{(f'_1, \lambda, \nu)}"] \arrow[ur, "{(f'_1, \nu)}"'] &
\end{tikzcd}$$

d'où on déduit que $\mathcal{E}_\psi = \operatorname{coker}(f'_1, \nu)$. En faisant $\psi = 0$ on obtient $\eta(0) = \delta_F(\mu)$, et en général

$$\eta(\psi) \ = \ \delta_F(\mu) + \delta_F(\psi \circ \lambda) \ = \ \eta(0) + \overline{\psi}(\sigma_G).$$

□

3. Le faisceau canonique d'une courbe multiple primitive

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n, de courbe réduite associée C et de fibré en droites sur C associé L. On suppose comme dans

2.4 que C_n est obtenue en recollant les variétés $U_i \times Z_n$ au moyen des automorphismes σ_{ij} de $U_{ij} \times Z_n$. On note $\mathbf{U}_i$ l'ouvert de C_n correspondant à U_i.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $\mathcal{O}_{0,k}$ le faisceau structural de $C \times Z_k$.

Le faisceau canonique Ω_{C_n} est *quasi localement libre* (cf. [5], 3.4), localement isomorphe à $\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_{n-1}$. Soient P un point fermé de C, $z \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation de C et $x \in \mathcal{O}_{nP}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$. Alors $\Omega_{C_n,P}$ est engendré par dx (le facteur $\mathcal{O}_n$) et dz (le facteur $\mathcal{O}_{n-1}$)

3.1. Construction à partir de cocycles

On va construire le faisceau canonique Ω_{C_n} par la méthode de 2.1.1. On considère les isomorphismes $\Omega_{C_n|\mathbf{U}_i} \simeq \sigma_i^*(\Omega_{U_i \times Z_n})$. On en déduit les isomorphismes

$$\Theta_{ij} : \Omega_{U_{ij} \times Z_n} \longrightarrow \sigma_{ij}^*(\Omega_{U_{ij} \times Z_n}). \tag{3.1}$$

On a $\Omega_{U_i \times Z_n} \simeq \big(\mathcal{O}_{0,n} \oplus \mathcal{O}_{0,n-1}\big)_{|U_i}$, avec des générateurs dx, dt, le premier engendrant $\mathcal{O}_{0,n|U_i}$ et le second $\mathcal{O}_{0,n-1|U_i}$. Le faisceau Ω_{C_n} est obtenu en recollant les faisceaux $(\mathcal{O}_{0,n} \oplus \mathcal{O}_{0,n-1}\big)_{|U_i}$ au moyen des isomorphismes Θ_{ij} par le procédé décrit dans 2.1.1.

Pour tout $f \in \mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)$, on a

$$\Theta_{ij}(df) \ = \ d(f \circ \sigma_{ij}^{-1}) \ = \ d\big(\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}(f)\big).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij}(dx) &= d\big(\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}(x)\big) \\
&= d(x + \mu_{ij}t) \\
&= (1 + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x}t)dx + (\mu_{ij} + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}t)dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{ij}(dt) &= d\big(\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}(t)\big) \\
&= d(\nu_{ij}t) \\
&= \frac{\partial \nu_{ij}}{\partial x}t.dx + (\nu_{ij} + \frac{\partial \nu_{ij}}{\partial t}t)dt,
\end{aligned}$$

(exprimés dans le système de générateurs (dx, dt) du $\Omega_{U_{ij} \times Z_n}$ de droite dans (3.1)). Mais, pour tenir compte de σ_{ij}^* il faut appliquer $\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}^{-1}$ aux coefficients de dx, dt. On obtient finalement que Θ_{ij} est l'automorphisme de $\big(\mathcal{O}_{0,n}\oplus\mathcal{O}_{0,n-1}\big)_{|U_{ij}}$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\phi'\big(\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x}\big)\nu_{ji}t & \phi'\big(\frac{\partial\nu_{ij}}{\partial x}\big)\nu_{ji}t \\ -\frac{\mu_{ji}}{\nu_{ji}}+\phi'\big(\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial t}\big)\nu_{ji}t & \frac{1}{\nu_{ji}}+\phi'\big(\frac{\partial\nu_{ij}}{\partial t}\big)\nu_{ji}t \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

en posant $\phi'=\phi^{-1}_{\mu_{ij},\nu_{ij}}$ (on utilise 2.4.1).

En particulier $\Omega_{C_n|C}$ s'obtient en recollant les fibrés $(\omega_C\oplus\mathcal{O}_C)_{|U_i}$ au moyen des automorphismes définis par les matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu_{ij,0} & \nu_{ij,0}\end{pmatrix}$ (d'après 2.4.1 on a $-\frac{\mu_{ji,0}}{\nu_{ji,0}}=\mu_{ij,0}$ et $\frac{1}{\nu_{ji,0}}=\nu_{ij,0}$).

3.2. Faisceau canonique et prolongements de courbes multiples

3.2.1. Proposition. — *Le noyau du morphisme surjectif canonique* $\rho_n:\Omega_{C_n|C_{n-1}}\to\Omega_{C_{n-1}}$ *est isomorphe à* L^{n-1}.

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de C_{n-1} dans C_n. On a une suite exacte

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\xrightarrow{\ i\ }\Omega_{C_n|C_{n-1}}\longrightarrow\Omega_{C_{n-1}}\longrightarrow 0.$$

Soient P un point fermé de C et $z\in\mathcal{O}_{nP}$ une équation de C. Alors $\mathcal{I}_{C,P}=(z^{n-1})$ et $\mathrm{im}(i_P)=(z^{n-2}dz)$. Dans les cartes $\big(\mathcal{O}_{0,n}\oplus\mathcal{O}_{0,n-1}\big)_{|U_i}$, $\mathrm{im}(i)$ correspond aux sous-faisceaux engendrés par $t^{n-2}dt$. D'après 3.1 ces sous-faisceaux isomorphes à $\mathcal{O}_{U_i}$ se recollent par les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_{U_{ij}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U_{ij}}\\ u & \longmapsto & \nu_{ij,0}^{n-1}u\end{array},$$

ce qui montre que $\mathrm{im}(i)\simeq L^{n-1}$. $\square$

On a donc une suite exacte

$$0\longrightarrow L^{n-1}\longrightarrow\Omega_{C_n|C_{n-1}}\longrightarrow\Omega_{C_{n-1}}\longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Notons que $\Omega_{C_n|C_{n-1}}$ est un fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1}, et que ρ_n induit un isomorphisme $\Omega_{C_n|C}\simeq\Omega_{C_{n-1}|C}$.

Réciproquement, si $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1}, et si $\phi:\mathbb{E}\to\Omega_{C_{n-1}}$ est un morphisme surjectif, ϕ induit un isomorphisme entre les restrictions à C et $\ker(\phi)\simeq L^{n-1}$ ($\ker(\phi)$ se calcule en utilisant 2.3).

On étudie maintenant les extensions $0 \to L^{n-1} \to \mathcal{E} \to \Omega_{C_{n-1}} \to 0$. D'abord localement :

3.2.2. Lemme. — *Soit P un point fermé de C.*

1 - On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(\mathcal{O}_{n-1,P} \oplus \mathcal{O}_{n-2,P}, \mathcal{O}_{C,P}) \simeq \mathcal{O}_{C,P}$ *.*

2 - Soit $0 \to \mathcal{O}_{C,P} \to M \to \mathcal{O}_{n-1,P} \oplus \mathcal{O}_{n-2,P} \to 0$ *une suite exacte de $\mathcal{O}_{n-1,P}$-modules, associée à $\alpha \in \mathcal{O}_C$. Alors on a $M \simeq 2\mathcal{O}_{n-1,P}$ si et seulement si α est inversible.*

On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(\mathcal{O}_{n-1,P}, \mathcal{O}_{C,P}) = \{0\}$, donc il suffit de prouver :

(i) On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(\mathcal{O}_{n-2,P}, \mathcal{O}_{C,P}) \simeq \mathcal{O}_{C,P}$.

(ii) Soit $0 \to \mathcal{O}_{C,P} \to N \to \mathcal{O}_{n-2,P} \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_{n-1,P}$-modules, associée à $\alpha \in \mathcal{O}_C$. Alors on a $N \simeq \mathcal{O}_{n-1,P}$ si et seulement si α est inversible.

Démonstration. — Soit $z \in \mathcal{O}_{n-1,P}$ un générateur de l'idéal de C. Alors (i) découle immédiatement de la résolution libre de $\mathcal{O}_{n-2,P}$

$$\ldots \mathcal{O}_{n-1,P} \xrightarrow{z} \mathcal{O}_{n-1,P} \xrightarrow{z^{n-2}} \mathcal{O}_{n-1,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{n-2,P}.$$

Démontrons maintenant (ii). On a une suite exacte

$$\mathcal{O}_{C,P} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(\mathcal{O}_{n-2,P}, \mathcal{O}_{C,P}) = \mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(N, \mathcal{O}_{C,P}),$$

obtenue en appliquant $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_{C,P})$ à la suite exacte de (ii). Le morphisme δ est la multiplication par α.

Si α n'est pas inversible, $\mathrm{coker}(\delta) \neq 0$, donc $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1,P}}(N, \mathcal{O}_{C,P}) \neq 0$, et $N \neq \mathcal{O}_{n-1,P}$.

La suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P} \simeq (z^{n-2}) \longrightarrow \mathcal{O}_{n-1,P} \xrightarrow{1} \mathcal{O}_{n-2,P} \longrightarrow 0$$

est donc associée à un élément inversible de $\mathcal{O}_{C,P}$.

Supposons que α est inversible. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P} \simeq (z^{n-2}) \longrightarrow \mathcal{O}_{n-1,P} \xrightarrow{\alpha_0/\alpha} \mathcal{O}_{n-2,P} \longrightarrow 0$$

est associée à α, donc $N \simeq \mathcal{O}_{n-1,P}$. $\square$

On a une suite exacte canonique

$$0\longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1}))\longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1})\xrightarrow{\pi} H^0(\mathcal{E}xt^1(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1}))\longrightarrow 0.$$

d'après la suite spectrale des Ext (cf. [8], 7.3).

3.2.3. Lemme. — *On a* $\mathcal{E}xt^1(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1})\simeq\mathcal{O}_C$ *et* $\mathcal{H}om(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1})\simeq E\otimes L^{n-1}$ *.*

Démonstration. — Soit $\mathbb{L}$ un fibré en droites sur C_{n-1} tel que $\mathbb{L}_{|C}\simeq L$ (cf. [3], 3.1.1). On a une résolution localement libre de L

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{L}^n\longrightarrow\mathbb{L}^{n-1}\longrightarrow L^{n-1},$$

d'où, en utilisant la suite exacte (3.3) la résolution localement libre de $\Omega_{C_{n-1}}$

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{L}^n\xrightarrow{f_1}\mathbb{L}^{n-1}\xrightarrow{f_0}\Omega_{C_n|C_{n-1}}\longrightarrow\Omega_{C_{n-1}}$$

avec laquelle on peut calculer $\mathcal{E}xt^1(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1})$. Le premier résultat découle du fait que $f_{0|C}$ et $f_{1|C}$ s'annulent.

Le second est immédiat car $\Omega_{C_{n-1}|C}=\Omega_{C_2|C}=E^*$. $\square$

Soit $\sigma(C_n)$ l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1})$ correspondant à la suite exacte (3.3). On a $H^0(\mathcal{E}xt^1(\Omega_{C_{n-1}},L^{n-1}))=\mathbb{C}$ d'après le lemme 3.2.3, et d'après le lemme 3.2.3 on peut supposer que $\pi(\sigma(C_n))=1$.

Soit maintenant C'_n une autre courbe multiple primitive de multiplicité n extension de C_{n-1}. On a alors
$\sigma(C'_n)-\sigma(C_n)\in H^1(E\otimes L^{n-1})$.

On conserve les notations de 2.4.2.

D'après 3.1, $\Omega_{C_n|C_{n-1}}$ est obtenu en recollant les faisceaux $\big(\mathcal{O}_{0,n-1}\oplus\mathcal{O}_{0,n-1}\big)_{|U_{ij}}$ au moyen des automorphismes définis par les matrices (3.2), qu'on note M_{ij}. On note M'_{ij} les matrices (3.2) pour $\Omega_{C'_n|C_{n-1}}$. Un calcul simple montre que

$$M'_{ij}-M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ (n-1)\alpha_{ij}\nu_{ij,0}^{2-n}t^{n-2} & (n-1)\beta_{ij}\nu_{ij,0}^{2-n}t^{n-2}\end{pmatrix}$$

On en déduit aisément, avec la discussion de 2.4.2 la

3.2.4 Proposition. — *Pour tout* $u\in H^1(E\otimes L^{n-1})$ *on a* $\sigma(C_n(u))-\sigma(C_n)=(n-1)u$ *.*

4. Courbes multiples et familles de courbes lisses

4.1. Courbes multiples provenant d'une famille de courbes lisses

Soit $\pi : \mathcal{D} \to S$ une famille de plate de courbes projectives lisses irréductibles paramétrée par une variété lisse irréductible S de dimension $d > 0$. Soient s_0 un point fermé de S et $C = \pi^{-1}(s_0)$.

Soit $n \geqslant 3$ un entier. On pose $Z_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$. Soit $\phi : Z_n \hookrightarrow S$ un plongement tel que l'image du point fermé de Z_n soit s_0. Alors $C_n = \pi^{-1}(Z_n)$ est une courbe multiple primitive de multiplicité n, de courbe lisse associée C, et le faisceau d'idéaux de C dans C_n est $\mathcal{O}_{n-1}$. Soient $t_1, \ldots, t_d$ des éléments de l'idéal maximal $\mathbf{m}_{s_0}$ de $\mathcal{O}_{S,s_0}$ formant une base de $\mathbf{m}_{s_0}/\mathbf{m}_{s_0}^2$. Soit $\Phi : \mathcal{O}_{S,s_0} \to \mathbb{C}[t]/(t^n)$ le morphisme correspondant à ϕ. Il est entièrement déterminé par $\Phi(t_1) \ldots, \Phi(t_d)$. En changeant $t_1, \ldots, t_d$ on se ramène aisément au cas où $\Phi(t_2) = \cdots \Phi(t_d) = 0$ et $\Phi(t_1) = t$. Soit $\mathcal{I}_{C_n}$ le faisceau d'idéaux de C_n dans $\mathcal{D}$. On a $\mathcal{I}_{C_n} = \langle t_1^n, t_2, \cdots, t_d\rangle$.

Soit $\phi' : Z_n \hookrightarrow S$ un autre plongement tel que $\Phi'_{|Z_{n-1}} = \Phi_{|Z_{n-1}}$. Si $\Phi' : \mathcal{O}_{S,s_0} \to \mathbb{C}[t]/(t^n)$ est le morphisme correspondant, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\Phi'(t_1) = t + \alpha_1 t^{n-1}, \quad \Phi'(t_2) = \alpha_2 t^{n-1}, \ldots, \Phi'(t_d) = \alpha_d t^{n-1}.$$

Si C'_n est la courbe multiple définie par ϕ', on a

$$\mathcal{I}_{C'_n} \; = \; \langle t_1^n, t_2 - \alpha_2 t_1^{n-1}, \ldots, t_d - \alpha_d t_1^{n-1}\rangle \ .$$

4.2. Faisceaux canoniques

On a une suite exacte canonique

$$\mathcal{I}_{C_n}/\mathcal{I}_{C_n}^2 \xrightarrow{A_n} \Omega_{\mathcal{D}|C_n} \longrightarrow \Omega_{C_n} \longrightarrow 0.$$

Le faisceau $\Omega_{\mathcal{D}|C_n}$ est localement libre de rang $d+1$ et la structure de Ω_{C_n} est donnée dans 3.

On pose $\Gamma = \langle t_2, \ldots, t_d\rangle \subset \mathbf{m}_{s_0}/\mathbf{m}_{s_0}^2$. Soient $P \in C$ et $z \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}P}$ au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$. Alors
$(dz, dt_1, \ldots, dt_d)$ est une base de $\Omega_{\mathcal{D}|C_n,P}$. On a donc

$$\mathrm{im}(A_n) \; = \; \langle t_1^{n-1} dt_1, dt_2, \ldots, dt_d\rangle \; \simeq \; \mathcal{O}_C \oplus (\mathcal{O}_n \otimes \Gamma) \ .$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{n-1} \otimes \Gamma \xrightarrow{\beta} \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} \longrightarrow \Omega_{C_n|C_{n-1}} \longrightarrow 0 \ .$$

On a $\operatorname{im}(\beta) = \langle dt_2, \ldots, dt_d \rangle$. On obtient le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathcal{O}_C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\beta(I_G,0)"] \arrow[d, "(I_G,0)"] & \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_{C_n|C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \oplus \mathcal{O}_C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "(0,I_{\mathcal{O}_C})"] & \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} \arrow[r] & \Omega_{C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathcal{O}_C \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

avec $G = \mathcal{O}_{n-1} \otimes \Gamma$, $\operatorname{im}(\beta) = \langle t_1^{n-2} dt_1, dt_2, \ldots, dt_d \rangle$. Pour la courbe C'_n on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & \mathcal{O}_C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\beta(I_G,-\psi)"] \arrow[d, "(I_G,-\psi)"] & \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_{C'_n|C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \oplus \mathcal{O}_C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "(\psi,I_{\mathcal{O}_C})"] & \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} \arrow[r] & \Omega_{C_{n-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathcal{O}_C \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

où $\psi = ((n-1)\alpha_2, \ldots, (n-1)\alpha_d) : \mathcal{O}_{n-1} \otimes \Gamma \to \mathcal{O}_C$.

4.3. Démonstration du théorème 1.2.1

On utilise le résultat suivant :

4.3.1. Proposition. — *Il existe une famille de courbes lisses $\pi : \mathcal{D} \to S$ paramétrée par une variété lisse S, telle qu'il existe $s_0 \in S$ tel que $\mathcal{D}_{s_0} \simeq C$, et que le morphisme de Kodaïra-Spencer $KS : T_{s_0}S \to H^1(T_C)$ soit surjectif.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur C, et $C \hookrightarrow \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{L})^*)$ le plongement induit. On suppose que $H^1(\mathcal{L}) = \{0\}$. En considérant la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))^* \longrightarrow T\mathbb{P}_n \longrightarrow 0$$

on voit que $H^1(T\mathbb{P}_{n|C}) = \{0\}$. Soient P le polynôme de Hilbert de $\mathcal{O}_C$ et $\mathrm{Hilb}^P(\mathbb{P}_n)$ le schéma de Hilbert correspondant. D'après les propriétés différentielles de ce schéma (cf. [10]), $\mathrm{Hilb}^P(\mathbb{P}_n)$ est lisse au point s_0 correspondant à C, et le schéma universel $\mathcal{D}$ au voisinage de s_0 est la famille de courbes lisses recherchée. $\square$

On suppose donnée une famille de courbes lisses $\mathcal{D}$ comme dans la proposition 4.3.1. Soit X une sous-variété lisse de S contenant s_0, et $\mathcal{D}_X$ l'image inverse de X dans $\mathcal{D}$. Alors on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}X]^* \longrightarrow \Omega_{X|C} \longrightarrow \omega_C \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

et l'élément associé de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\omega_C, \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}X]^*) = \mathrm{Hom}(T_{s_0}X, H^1(T_C))$$

n'est autre que le morphisme de Kodaïra-Spencer de $\mathcal{D}_X$ en s_0, qui est la restriction à $T_{s_0}X$ de celui de $\mathcal{D}$.

Le théorème 1.2.1 se démontre le résultat par récurrence sur n.

D'après 4.1, il suffit de montrer que pour toute courbe multiple primitive C_n de multiplicité n telle que le faisceau d'idéaux de C dans C_n soit le fibré trivial sur C_{n-1}, il existe un plongement $\phi : Z_n \hookrightarrow S$ tel que l'image du point fermé de Z_n soit s_0 et que $C_n \simeq \pi^{-1}(Z_n)$.

Traitons d'abord le cas $n = 2$. On suppose que C_2 est une courbe double de courbe lisse associée C, telle que $\mathcal{I}_C = L$ soit trivial sur C. Si C_2 est triviale, la famille triviale de courbes $C \times \mathbb{C}$ répond aux conditions du théorème 1.2.1. Supposons que C_2 n'est pas triviale. Soit $D \subset H^1(T_C)$ la droite engendrée par l'élément de $H^1(T)$ correspondant à l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_{C_2|C} \longrightarrow \omega_C \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

Soit $Y \subset S$ une courbe lisse passant par s_0 et telle que $KS(T_{s_0}Y) = D$. Soit C_2' le second voisinage infinitésimal de C dans $\mathcal{D}_Y$. Si $z \in \mathcal{O}_{Y,s_0}$ est un générateur de l'idéal maximal, le faisceau d'idéaux de C'_2 dans $\mathcal{D}_Y$ est engendré par z^2. On a donc $\Omega_{C'_2|C} = \Omega_{\mathcal{D}_Y|C}$, et la suite exacte (4.1) pour Y est la même que la suite exacte (4.2) pour C'_2. Il en découle que la droite de $H^1(T)$ définie par l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_{C'_2|C} \longrightarrow \omega_C \longrightarrow 0$$

est égale à D. D'après 2.2.2, C'_2 est isomorphe à C_2, ce qui démontre le théorème 1.2.1 pour $n = 2$.

Supposons le théorème 1.2.1 démontré pour les courbes de multiplicité $n-1$. Soit C_{n-1} une courbe multiple primitive de multiplicité $n-1$ telle que le faisceau d'idéaux de C dans C_{n-1} soit le fibré trivial sur C_{n-2}. Il faut montrer que toute extension C_n^0 de C_{n-1} en courbe multiple primitive de multiplicité n telle que le faisceau d'idéaux de C dans C_n^0 soit le fibré trivial sur C_{n-1} provient d'une famille de courbes lisses. On peut supposer que C_{n-1} provient d'un plongement $Z_{n-1} \hookrightarrow S$ tel que l'image du point fermé de Z_n soit s_0, et que ce plongement est étendu à un plongement $\phi : Z_n \hookrightarrow S$ correspondant à la courbe multiple C_n, extension de C_{n-1}. On reprend les notations de 4.1 et 4.2.

On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G \oplus \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}} & \longrightarrow & \Omega_{C_{n-1}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle A} & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}S]^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{D}|C} & \longrightarrow & \omega_C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le morphisme A est nul sur $\mathcal{O}_C$, et provient de l'inclusion $\Gamma \subset [T_{s_0}S]^*$ sur G.

La suite exacte du haut est associée à

$$(\sigma_G, \sigma_{\mathcal{O}_C}) \ \in \ \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(\Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}}, G \oplus \mathcal{O}_C).$$

Il existe des sections locales de $\alpha_{|G}$, donc on a
$\sigma_G \in H^1(\mathcal{H}om(\Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}}, G))$.

La suite exacte du bas est associée à

$$\sigma' \ \in \ \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(\omega_C, \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}S]^*).$$

Puisque cette suite est localement scindée, on a

$$\sigma' \ \in \ H^1(\mathcal{H}om(\omega_C, \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}S]^*)) \ = \ \mathrm{Hom}(T_{s_0}S, H^1(T_C)),$$

et σ' n'est autre que le morphisme de Kodaïra-Spencer
$KS : T_{s_0}S \to H^1(T)$ de $\mathcal{D}$ en s_0.

De σ' on déduit

$$r(\sigma') \in H^1(\mathcal{H}om(\Omega_{\mathcal{D}|C_{n-1}}, \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}S]^*)) = \mathrm{Hom}(T_{s_0}S, H^1(E)),$$

qui est le composé

$$T_{s_0}S \xrightarrow{KS} H^1(T_C) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow H^1(T_C)/D \hookrightarrow H^1(E)$$

(cf. 2.4.5).

De σ_G on déduit

$$A(\sigma_G) \in H^1(\mathcal{H}om(\omega_C, \mathcal{O}_C \otimes [T_{s_0}S]^*)) = \mathrm{Hom}(T_{s_0}S, H^1(T_C)).$$

D'après le diagramme commutatif précédent, on a $r(\sigma') = A(\sigma_G)$. En particulier, $A(\sigma_G)$ se factorise par Γ^* :

$$\begin{tikzcd} T_{s_0}S \arrow[r, "KS"] \arrow[dr] & H^1(T_C) \arrow[r, two heads] & H^1(T_C)/D \\ & \Gamma^* \arrow[ur, "\lambda"] & \end{tikzcd}$$

et λ est surjective.

On considère maintenant la courbe C'_n de 4.2. Elle est de la forme $C'_n = C_n(u)$, avec $u \in H^1(T_C)/D \subset H^1(E)$ (cf. 3.2). D'après le lemme 2.5.1 et la proposition 3.2.4, on a $u = \frac{\lambda(\psi)}{n-1}$.

D'après 2.4.5, il existe $u_0 \in H^1(T_C)/D$ tel que $C_n^0 = C_n(u_0)$. Puisque λ est surjective, on peut choisir ψ tel que $\frac{\lambda(\psi)}{n-1} = u_0$, ce qui prouve que C_n^0 provient bien d'une famille de courbes lisses.

Bibliographie

[1] Bănică (C.), Forster (O.). — Multiple structures on space curves. Contemporary Mathematics 58, Proc. of Lefschetz Centennial Conf., AMS,p. 47-64 (1986).

[2] Bayer (D.), Eisenbud (D.). — Ribbons and their canonical embeddings. Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3, p. 719-756 (1995).

[3] Drézet (J.-M.). — Faisceaux cohérents sur les courbes multiples. Collect. Math. 57, 2, p. 121-171 (2006).

[4] Drézet (J.-M.). — Paramétrisation des courbes multiples primitives. Adv. in Geom. 7, p. 559-612 (2007).

[5] Drézet (J.-M.). — Faisceaux sans torsion et faisceaux quasi localement libres sur les courbes multiples primitives. Mathematische Nachrichten 282, No.7, p. 919-952 (2009).

[6] Eisenbud (D.). — D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. GTM 150, Springer-Verlag (1995)

[7] Eisenbud (D.), Green (M.). — Clifford indices of ribbons. Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3, p. 757-765 (1995).

[8] Godement (R.). — Théorie des faisceaux. Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).

[9] González (M.). — Smoothing of ribbons over curves. Journ. für die reine und angew. Math. 591, p. 201-235 (2006).

[10] Grothendieck (A.). — Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. Sém. Bourbaki, Vol. 6, Exp. No. 221, 249-276, Soc. Math. France, Paris (1995).

[11] Hartshorne (R.). — Algebraic geometry. GTM 52, Berlin-Heidelberg-New York : Springer (1977).

[12] Inaba (M.-A.). — On the moduli of stable sheaves on a reducible projective scheme and examples on a reducible quadric surface. Nagoya Math. J., p. 135-181 (2002).

[13] Simpson (C.T.). — Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I. Publ. Math. IHES 79, p. 47-129 (1994).

[14] Teixidor i Bigas. — M. Moduli spaces of vector bundles on reducible curves. Amer. J. of Math. 117, p. 125-139 (1995).