

C. BOURLET

## Sur le problème de l'itération

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série*, tome 12, n° 2 (1898), p. C1-C12

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1898\\_1\\_12\\_2\\_C1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_2_C1_0)

© Université Paul Sabatier, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR LE

# PROBLÈME DE L'ITÉRATION,

PAR M. C. BOURLET.

---

Le problème général de l'*Itération* peut être posé de la façon suivante :

Soit  $\varphi(z)$  une fonction donnée de la variable  $z$ ; posons

$$\varphi_0(z) = z, \quad \varphi_1(z) = \varphi(z), \quad \varphi_2(z) = \varphi[\varphi(z)], \quad \dots$$

plus généralement

$$\varphi_k(z) = \varphi[\varphi_{k-1}(z)].$$

Soit  $\varphi_{-1}(z)$  la fonction inverse de  $\varphi(z)$ ; nous poserons encore

$$\varphi_{-2}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-1}(z)], \quad \dots, \quad \varphi_{-k-1}(z) = \varphi_{-1}[\varphi_{-k}(z)].$$

On aura, alors, pour toutes les valeurs entières positives ou négatives des indices de  $p$  et  $q$ ,

$$\varphi_p[\varphi_q(z)] = \varphi_{p+q}(z);$$

et il s'agit de trouver une fonction  $\psi(k, z)$  de la variable  $z$  et du paramètre  $k$  telle que l'on ait

$$(A) \quad \psi(p, z) = \varphi_p(z),$$

pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de  $p$ , et telle, en outre, que l'on ait

$$(B) \quad \psi[k, \psi(k', z)] = \psi(k + k', z),$$

quels que soient les nombres  $k$  et  $k'$ , réels ou imaginaires.

Ce problème a déjà donné lieu à de remarquables travaux. Étudié d'abord

par Schröder <sup>(1)</sup> et Korkine <sup>(2)</sup>, il a été repris, plus récemment, par M. Kœnigs <sup>(3)</sup>.

Schröder et Korkine se sont surtout occupés du calcul des coefficients du développement de la fonction  $\psi(k, z)$  suivant les puissances croissantes de  $z - x$ ,  $x$  étant *point limite* de la fonction  $\varphi(z)$ ; mais, outre que leurs méthodes se bornent à montrer comment on calculera de proche en proche ces coefficients, elles présentent l'inconvénient de présupposer soit l'existence de la fonction  $\psi(k, z)$ , soit la convergence des développements étudiés.

Korkine, à vrai dire, a donné une seconde méthode, fort ingénieuse, dans laquelle il montre que la fonction  $\psi(k, z)$  peut être mise sous la forme

$$\psi(k, z) = \pi_{-1}[k + \pi(z)]$$

et la recherche de cette fonction est ainsi ramenée à celle de la fonction  $\pi(z)$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\pi[\varphi(z)] = 1 + \pi(z).$$

Il donne une expression *formelle* de  $\pi(z)$ , dans laquelle figure un développement en une série doublement infinie dont, malheureusement, il n'a pas établi la convergence.

M. Kœnigs, en se plaçant à un tout autre point de vue, et sans rechercher la forme de la fonction  $\psi(k, z)$ , a démontré d'une façon rigoureuse son *existence*.

Aucun de ces auteurs, comme on le voit, n'a donné une expression *explicite* de cette fonction  $\psi(k, z)$  dont la *validité* soit assurée.

Pendant Schröder indique dans son Mémoire, aux notations près, la formule suivante <sup>(4)</sup> :

$$\begin{aligned} \varphi_r(z) = & \varphi_0(z) + \frac{r}{1} [\varphi_1(z) - \varphi_0(z)] + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} [\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + \varphi_0(z)] + \dots \\ & + \frac{r(r-1)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (r-1)r} \left[ \varphi_r(z) - \frac{r}{1} \varphi_{r-1}(z) + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \varphi_{r-2}(z) - \dots + (-1)^r \varphi_0(z) \right], \end{aligned}$$

(1) SCHRÖDER, *Ueber iterirte Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 296).

(2) KORKINE, *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. VI, p. 228; 1882).

(3) KÖENIGS, *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 385; 1885).

(4) Cette formule a été suggérée à Schröder par une autre formule donnée par Cayley dans le *Quarterly Journal*, t. LI, p. 1; pour ma part, je l'avais retrouvée en appliquant la formule d'interpolation de Newton.

où  $r$  désigne un *entier positif* et où le second membre ne contient que  $r + 1$  termes. Il est vraiment curieux qu'il n'ait pas eu l'idée d'appliquer cette formule au cas de  $r$  quelconque car, en remplaçant la somme du second membre par une série, il aurait été ainsi conduit à la solution explicite qui fait l'objet de ce Travail.

## I.

Je rappelle d'abord deux propriétés de la fonction de substitution  $\varphi(z)$ .

1° Soit  $x$  une racine de l'équation

$$\varphi(z) - z = 0;$$

$x$  est ce qu'on appelle un *point limite* de la substitution  $\varphi(z)$ ; on a, pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de l'indice  $p$ ,

$$(1) \quad \varphi_p(x) = x.$$

Je supposerai, de plus, toujours, dans la suite, que la fonction  $\varphi(z)$  est *régulière* au voisinage du point  $z = x$ , c'est-à-dire qu'elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $z - x$  et que l'on a :

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

2° Désignons par  $\varphi'_p(z)$  la dérivée de  $\varphi_p(z)$ ; on aura, quel que soit l'entier positif ou négatif  $p$ ,

$$(2) \quad \varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^p$$

[pourvu que, dans le cas où  $p$  est négatif,  $\varphi'(x) \neq 0$ ].

En effet, pour  $k = 2$ , on a

$$\varphi'_2(z) = \varphi'[\varphi(z)] \varphi'(z)$$

et, en faisant  $z = x$  et remarquant que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x, \\ \varphi'_2(x) &= [\varphi'(x)]^2. \end{aligned}$$

Si la loi est vraie pour l'indice  $p$ , elle est vraie pour l'indice  $p + 1$ , car

$$\varphi'_{p+1}(z) = \varphi'[\varphi_p(z)] \varphi'_p(z)$$

et, en faisant  $z = x$ , en vertu de l'égalité (1),

$$\varphi'_{p+1}(x) = \varphi'(x) \varphi'_p(x) = [\varphi'(x)]^{p+1}.$$

La proposition est donc vraie pour les indices positifs.

D'autre part, on a

$$\varphi[\varphi_{-1}(z)] = z,$$

donc

$$\varphi'[\varphi_{-1}(z)] \varphi'_{-1}(x) = 1$$

et, en faisant  $z = x$ ,

$$\varphi'(x) \varphi'_{-1}(x) = 1,$$

d'où

$$\varphi'_{-1}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}.$$

La loi s'étend alors, de proche en proche, comme plus haut, aux indices négatifs.

## II.

Considérons maintenant la série

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(k, z) = z + \frac{k}{1} [\varphi(z) - z] + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} [\varphi_2(z) - 2\varphi_1(z) + z] + \dots \\ + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [\varphi_p(z) - C_p^1 \varphi_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi_{p-2}(z) + \dots + (-1)^p z] + \dots \end{aligned} \right.$$

les coefficients  $C_p^1, C_p^2, \dots$ , qui figurent dans les crochets, étant les coefficients binomiaux. Remarquons, de suite, que cette série peut s'écrire *symboliquement*

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(k, z) = z + \frac{k}{1} (\varphi - 1) z + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} (\varphi - 1)^{(2)} z + \dots \\ + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} (\varphi - 1)^{(p)} z + \dots \end{aligned} \right.$$

à condition de remplacer, dans le développement de la puissance symbolique  $(\varphi - 1)^{(p)} z$ , l'expression  $\varphi^{(q)} z$  par  $\varphi_q(z)$ . D'ailleurs, cette dernière formule (4) peut encore se condenser, symboliquement, en celle-ci :

$$(5) \quad \psi(k, z) = [1 + (\varphi - 1)]^{(k)} z.$$

Pour que l'égalité (3), ou les équivalentes (4) et (5), définisse une fonction bien déterminée  $\psi(k, z)$ , il faut, d'abord, prouver la convergence de la série qui figure dans le second membre et, à cet effet, j'établirai la proposition suivante :

*$x$  étant un point limite de la fonction  $\varphi(z)$ , au voisinage duquel elle*

est régulière, tel que l'on ait

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

il existe un cercle  $C_x$ , de centre  $x$ , tel que, pour tout point  $z$  situé à l'intérieur de ce cercle, la série (3) soit convergente, quel que soit  $k$ .

Prenons le rapport du  $(p + 1)^{\text{ième}}$  terme de la série (3) au précédent; ce rapport est

$$R_p(z) = \frac{k - p + 1}{p} \frac{\varphi_p(z) - C_p^1 \varphi_{p-1}(z) + C_p^2 \varphi_{p-2}(z) - \dots + (-1)^p z}{\varphi_{p-1}(z) - C_{p-1}^1 \varphi_{p-2}(z) + C_{p-1}^2 \varphi_{p-3}(z) - \dots + (-1)^{p-1} z},$$

et cherchons d'abord la valeur de ce rapport pour  $z = x$ . Pour cette valeur, le rapport prend la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , car

$$\varphi_p(x) = \varphi_{p-1}(x) = \dots = \varphi(x) = x;$$

nous aurons donc sa valeur en prenant le rapport des dérivées pour  $z = x$ . Si l'on tient compte des égalités (2), démontrées plus haut, la valeur de ce rapport est donc

$$R_p(x) = \frac{k - p + 1}{p} \frac{[\varphi'(x) - 1]^p}{[\varphi'(x) - 1]^{p-1}} = \frac{k - p + 1}{p} [\varphi'(x) - 1].$$

Ceci nous prouve, d'abord, que le rapport  $R_p(z)$  est, quel que soit  $p$ , une fonction régulière de  $z$  dans le voisinage du point limite  $x$  puisqu'en ce point il a une valeur finie et qu'il est le quotient de deux fonctions régulières. La limite de ce rapport, lorsque  $p$  croît indéfiniment (limite qui est indépendante de  $k$ ), est donc, *en général*, une fonction  $R(z)$  régulière au voisinage de  $z = x$  et la valeur de cette fonction pour  $z = x$  est

$$R(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \frac{k - p + 1}{p} [\varphi'(x) - 1] \right\} = 1 - \varphi'(x).$$

Si donc on a

$$|\varphi'(x) - 1| < 1,$$

on pourra déterminer un cercle  $C_x$ , de centre  $x$ , tel que, pour tout point  $z$  situé à l'intérieur de ce cercle, le module de  $R(z)$  soit assez voisin du module de  $R(x)$ , c'est-à-dire de  $|\varphi'(x) - 1|$ , pour être plus petit que 1; pour tous ces points la série (3) sera donc absolument convergente, *quel que soit*  $k$ .

Mais il y a plus. La démonstration précédente nous prouve, en effet, que si l'on considère la série déduite de la série (3) en prenant les dérivées de

tous les termes, par rapport à  $z$ , et si, dans cette nouvelle série, on prend le rapport du  $(p+1)^{\text{ième}}$  terme au précédent, ce rapport a une limite indépendante de  $k$  qui est une fonction  $S(z)$ , régulière au voisinage du point limite, telle que l'on ait

$$S(x) = R(x) = 1 - \varphi'(x).$$

*On pourra donc déterminer un second cercle  $\Gamma_x$ , de centre  $x$ , de rayon égal ou inférieur à celui de  $C_x$ , tel qu'à l'intérieur de ce cercle, et quel que soit  $k$ , la série (3) soit convergente et définisse une fonction  $\psi(k, z)$ , régulière en  $z$ .*

Dans toute la suite, je supposerai qu'on ne considère la fonction  $\psi(k, z)$  que pour les valeurs de  $z$  situées à l'intérieur du cercle  $\Gamma_x$  dans lequel elle est régulière.

### III.

J'établirai d'abord quelques propriétés simples de la fonction  $\psi(k, z)$ .

1°  $x$  étant le point limite, on a

$$(6) \quad \psi(k, x) = x.$$

C'est évident, car, comme nous l'avons remarqué plus haut, l'expression  $(\varphi - 1)^{(p)}z$  prend, pour  $z = x$ , la valeur

$$(1-1)^p x = 0 \quad (1),$$

$\psi(k, x)$  se réduit donc à son premier terme  $x$ .

2°  $\psi'(k, z)$  désignant la dérivée de la fonction  $\psi(k, z)$ , par rapport à  $z$ , on a, au point limite  $x$ ,

$$(7) \quad \psi'(k, x) = [\varphi'(x)]^k,$$

quel que soit  $k$ .

Nous avons vu, en effet, qu'on a toujours pour les valeurs *entières* de l'indice  $p$

$$\varphi_p'(x) = [\varphi'(x)]^p;$$

---

(1) Ici  $(1-1)^p$  désigne une véritable puissance. Pour qu'il n'y ait pas de confusion, j'aurai toujours soin de placer les exposants des puissances symboliques entre parenthèses.

or, on a

$$\begin{aligned} \psi'(k, z) = & 1 + \frac{k}{1} [\varphi'(z) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2} [\varphi'(z) - 1]^{(2)} + \dots \\ & + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [\varphi'(z) - 1]^{(p)} \dots, \end{aligned}$$

et, pour  $z = x$ ,

$$[\varphi'(x) - 1]^{(p)} = \varphi'_p(x) - C_p^1 \varphi'_{p-1}(x) + C_p^2 \varphi'_{p-2}(x) - \dots + (-1)^p$$

prend, par suite, la valeur

$$[\varphi'(x)]^p - C_p^1 [\varphi'(x)]^{p-1} + C_p^2 [\varphi'(x)]^{p-2} - \dots + (-1)^p = [\varphi'(x) - 1]^p.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \psi'(k, x) = & 1 + \frac{k}{1} [\varphi'(x) - 1] + \frac{k(k-1)}{1.2} [\varphi'(x) - 1]^2 + \dots \\ & + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [\varphi'(x) - 1]^p + \dots, \end{aligned}$$

les puissances étant ici de véritables puissances. Puisque  $|\varphi'(x) - 1| < 1$ , la série du second membre est convergente et a pour somme

$$\psi'(k, x) = [1 + \varphi'(x) - 1]^k = [\varphi'(x)]^k,$$

quel que soit  $k$ .

Ces deux propriétés ne sont, en somme, que l'extension à  $\psi(k, z)$  des deux propriétés des fonctions  $\varphi_p(z)$  rappelées au n° I.

3°  $p$  étant un entier positif ou nul, on a

$$(8) \quad \psi(p, z) = \varphi_p(z).$$

Ceci est encore évident, car on a

$$\psi(p, z) = [1 + \varphi - 1]^{(p)} z = \varphi^{(p)} z = \varphi_p(z),$$

puisque  $p$  est entier, et en effectuant la puissance symbolique.

4°  $p$  étant un entier positif, on a

$$(9) \quad \psi[k, \varphi_p(z)] = \psi[k + p, z],$$

quel que soit  $k$  <sup>(1)</sup>.

(1) Il faut remarquer qu'à cause de l'hypothèse  $|\varphi'(x)| < 1$ , si  $z$  est suffisamment voisin du point  $x$ ,  $\varphi_p(z)$  sera à l'intérieur du cercle  $\Gamma_x$  dans lequel la fonction  $\Psi$  est régulière.



Il suffit de prouver la proposition lorsque  $p = 1$ , car, alors, elle s'étend sans difficulté, de proche en proche, pour  $p = 2, 3, 4, \dots$ . Or, on a

$$\begin{aligned} \psi[k, \varphi(z)] &= \varphi(z) + \frac{k}{1} [\varphi_2 - \varphi_1] z + \dots \\ &\quad + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [\varphi_{p+1} - C_p^1 \varphi_p + C_p^2 \varphi_{p-1} + \dots + (-1)^p \varphi] z + \dots, \end{aligned}$$

et ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$\psi[k, \varphi(z)] = \varphi z + \frac{k}{1} [\varphi - 1] \varphi z + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} (\varphi - 1)^{(p)} \varphi z + \dots,$$

ce qui revient à multiplier *symboliquement* par  $\varphi$ .

Pour multiplier symboliquement par  $\varphi$ , on peut multiplier par  $1 + \varphi - 1$  et l'on a donc

$$\begin{aligned} \psi[k, \varphi(z)] &= [1 + (\varphi - 1)]^{(k)} [1 + (\varphi - 1)] z \\ &= [1 + (\varphi - 1)]^{(k+1)} z = \psi(k+1, z). \end{aligned}$$

5° —  $p$  étant un entier négatif, on a aussi

$$(10) \quad \psi(-p, z) = \varphi_{-p}(z),$$

à condition de choisir pour  $\varphi_{-1}(z)$  celle des déterminations qui, pour  $z = x$ , se réduit à  $x$ .

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$\psi[-1, \varphi(z)] = \psi[0, z] = z.$$

$\psi(-1, z)$  est donc la fonction inverse de  $\varphi(z)$  qui se réduit à  $x$  pour  $z = x$ , en vertu de l'égalité (6). Donc

$$\psi(-1, z) = \varphi_{-1}(z).$$

Plus généralement,

$$\psi[-p, \varphi_p(z)] = \psi[0, z] = z,$$

donc

$$\psi[-p, z] = \varphi_{-p}(z),$$

la détermination de  $\varphi_{-p}(z)$  étant telle que, pour  $z = x$ ,  $\varphi_{-p}(z)$  se réduise à  $x$ .

## IV.

Pour terminer, il nous reste à prouver la proposition capitale que voici :

*On a, quel que soit  $k$ ,*

$$(11) \quad \varphi[\psi(k, z)] = \psi[k+1, z].$$

Pour cela, il suffit, à cause de l'égalité (9), de prouver que l'on a

$$(12) \quad \varphi[\psi(k, z)] = \psi[k, \varphi(z)].$$

Or, les deux membres de cette égalité (12) étant des fonctions régulières au voisinage du point limite  $x$ , il suffit de prouver que les deux membres, ainsi que *toutes* leurs dérivées par rapport à  $z$ , sont égales pour  $z = x$ .

On a, en premier lieu,

$$\varphi[\psi(k, x)] = \varphi(x) = x$$

et

$$\psi[k, \varphi(x)] = \psi(k, x) = x,$$

donc

$$\varphi[\psi(k, x)] = \psi[k, \varphi(x)].$$

En second lieu, en vertu des égalités (6) et (7),

$$\varphi'[\psi(k, x)]\psi'(k, x) = \varphi'(x) [\varphi'(x)]^k = [\varphi'(x)]^{k+1},$$

$$\psi'[k, \varphi(x)]\varphi'(x) = [\varphi'(x)]^k \varphi'(x) = [\varphi'(x)]^{k+1};$$

donc, encore,

$$\varphi'[\psi(k, x)]\psi'(k, x) = \psi'[k, \varphi(x)]\varphi'(x).$$

Prenons les dérivées secondes : il faut prouver que

$$\begin{aligned} \varphi''[\psi(k, x)] [\psi'(k, x)]^2 + \varphi'[\psi(k, x)] \psi''(k, x) \\ = \psi''[k, \varphi(x)] [\varphi'(x)]^2 + \psi'[k, \varphi(x)] \varphi''(x). \end{aligned}$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\varphi'(x) = x', \quad \varphi''(x) = x'', \quad \dots,$$

on doit donc avoir

$$x'' x'^{2k} + x' \psi''(k, x) = x'^2 \psi''(k, x) + x'' x'^k$$

ou

$$\psi''(k, x)(x'^2 - x') = x''(x'^{2k} - x'^k).$$

La relation (12) qu'il s'agit de démontrer étant vraie pour toutes les valeurs entières de  $k$ , cette dernière relation, qui en est une conséquence, est vraie pour toutes les fonctions  $\varphi_p(z)$ ; on en conclut que  $\psi''(k, x)$  s'obtient en remplaçant dans son développement les expressions

$$\varphi_p''(x) \quad \text{par} \quad \frac{x''(x'^{2p} - x'^p)}{x'^2 - x'},$$

et l'on trouve ainsi

$$\psi''(k, x) = \frac{x''}{x'^2 - x'} [(1 + x'^2 - 1)^k - (1 + x' - 1)^k] = \frac{x''}{x'^2 - x'} (x'^{2k} - x'^k),$$

ce qu'il fallait établir.

Considérons encore les dérivées troisièmes : il faut prouver que

$$\begin{aligned} & \varphi'''[\psi(k, x)][\psi'(k, x)]^3 \\ & + 3\varphi''[\psi(k, x)]\psi''(k, x)\psi'(k, x) + \varphi'[\psi(k, x)]\psi'''(k, x) \\ & = \psi'''[k, \varphi(x)][\varphi'(x)]^3 + 3\psi''[k, \varphi(x)]\varphi''(x)\varphi'(x) + \psi'[k, \varphi(x)]\varphi'''(x). \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette expression  $\psi(k, x)$ ,  $\psi'(k, x)$ ,  $\psi''(k, x)$  par leurs valeurs et simplifiant, il reste à montrer que

$$\begin{aligned} & \psi'''(k, x)(x'^3 - x')(x'^2 - x') \\ & = x'''(x'^2 - x')(x'^{3k} - x'^k) + 3x''^2(x'^{3k} - x'^{2k+1} - x'^{2k} + x'^k). \end{aligned}$$

Or, cette relation étant vraie pour les valeurs entières de  $k$  est vraie pour toutes les fonctions  $\varphi_p(z)$ ; on a donc

$$\varphi_p'''(x) = \frac{x'''(x'^2 - x')(x'^{3p} - x'^p) + 3x''^2(x'^{3p} - x'^{2p+1} - x'^{2p} + x'^p)}{(x'^3 - x')(x'^2 - x')}.$$

En remplaçant dans le développement de  $\psi'''(k, x)$  toutes les quantités  $\varphi_p'''(x)$  par ces valeurs et faisant la somme, on trouve que la relation proposée est vraie pour  $\psi'''(k, x)$ .

D'une façon générale, si l'on a démontré la proposition pour la dérivée  $q^{\text{ième}}$ ,  $\psi^{(q)}(k, x)$ , on la démontrera pour la dérivée  $(q + 1)^{\text{ième}}$  de la façon suivante : on dérivera  $(q + 1)$  fois la relation (12) par rapport à  $z$ , on y fera  $z = x$  et l'on remplacera  $\psi(k, x)$ ,  $\psi'(k, x)$ ,  $\psi''(k, x)$ , ...,  $\psi^{(q)}(k, x)$  par leurs valeurs calculées précédemment en fonction de  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , ...,  $x^{(q)}$ .

L'égalité qu'il s'agira de démontrer prendra alors la forme

$$\psi^{(q+1)}(k, x) = \sum_n F_n(x', x'', \dots, x^{(q+1)}) x'^{kn},$$

les fonctions  $F_n(x', x'', \dots, x^{(q+1)})$  ne dépendant aucunement de  $k$ . Or, la relation (12) étant vraie pour les valeurs entières de  $k$ , on aura, quel que soit l'entier  $p$ ,

$$\varphi_p^{(q+1)}(x) = \sum_n F_n(x', x'', \dots, x^{(q+1)}) x'^{pn}.$$

En remplaçant les quantités  $\varphi_p^{(q+1)}(x)$  par leurs valeurs dans le développement de  $\psi^{(q+1)}(k, x)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \psi^{(q+1)}(k, x) &= \sum_n F_n(x', x'', \dots, x^{(q+1)}) (1 + x'^n - 1)^k \\ &= \sum_n F_n(x', x'', \dots, x^{(q+1)}) x'^{kn}, \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait établir.

## V.

Ces propositions préliminaires nous conduiront maintenant au résultat final.

Considérons, en effet, l'expression  $\psi[k, \psi(k', z)]$ ; c'est une somme de termes de la forme

$$\frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} \{ \varphi_p[\psi(k', z)] - C_p^1 \varphi_{p-1}[\psi(k', z)] + \dots + (-1)^p \psi(k', z) \}.$$

Or, de la relation (12) que nous venons d'établir, on déduit, par des applications répétées,

$$\varphi_p[\psi(k', z)] = \psi(k' + p, z),$$

quels que soient  $k'$  et l'entier positif  $p$ ; le terme général peut donc s'écrire

$$\frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [\psi(k' + p, z) - C_p^1 \psi(k' + p - 1, z) + \dots + (-1)^p \psi(k', z)],$$

ou, avec l'écriture symbolique,

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} \{ [1 + (\varphi - 1)]^{(k'+p)} \\ - C_p^1 [1 + (\varphi - 1)]^{(k'+p-1)} + \dots + (-1)^p [1 + (\varphi - 1)]^{(k')} \} z, \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} [1+(\varphi-1)]^{(p)} - C_p^1 [1+(\varphi-1)]^{(p-1)} + \dots + (-1)^p [1+(\varphi-1)]^{(k)} z,$$

et enfin

$$\frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} (\varphi-1)^{(p)} (1+\varphi-1)^{(k)} z.$$

L'opération de la substitution de  $\psi(k', z)$  à  $z$  dans  $\psi(k, z)$  revient donc à multiplier *symboliquement* chaque terme du développement et, par suite,  $\psi(k, z)$  elle-même par  $(1+\varphi-1)^{(k')}$ ; on a donc

$$\begin{aligned} \psi[k, \psi(k', z)] &= [1+(\varphi-1)]^{(k)} [1+(\varphi-1)]^{(k')} z \\ &= [1+(\varphi-1)]^{(k+k')} z = \psi(k+k', z), \end{aligned}$$

quels que soient  $k$  et  $k'$ .

En résumé, la fonction  $\psi(k, z)$ , régulière dans le cercle  $\Gamma_x$ , vérifie bien les deux relations (A) et (B); c'est donc bien *une* fonction *itérée* de  $\varphi(z)$ . Korkine a d'ailleurs montré <sup>(1)</sup> comment, lorsqu'on connaît une solution du problème, on pourra construire toutes les autres.

Remarquons, en terminant, que la démonstration de l'identité (12), au n° IV, donne précisément le calcul, de proche en proche, des coefficients du développement de  $\psi(k, z)$  suivant les puissances croissantes de  $z-x$  en fonction de  $x, x', x'', x''', \dots$ , c'est-à-dire en fonction des coefficients du développement de  $\varphi(z)$ . Car, si l'on pose

$$\varphi(z) = x + A_1(z-x) + A_2(z-x)^2 + \dots$$

et

$$\psi(k, x) = x + \alpha_1(z-x) + \alpha_2(z-x)^2 + \dots,$$

on a généralement

$$A_p = \frac{x^{(p)}}{p!}$$

et

$$\alpha_p = \frac{\psi^{(p)}(k, x)}{p!}.$$

On retrouve les résultats des calculs de Korkine, résultats qui se trouvent ainsi justifiés après coup.

---

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*, p. 234.