ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

KARAMOKO DIARRA

Solutions algébriques partielles des équations isomonodromiques sur les courbes de genre 2

Tome XXIV, n[o] 1 (2015), p. 39-54.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2015_6_24_1_39_0>

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2015, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (http://afst.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://afst.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXIV, n° 1, 2015
pp. 39-54

Solutions algébriques partielles des équations isomonodromiques sur les courbes de genre 2

Karamoko Diarra[1]

Résumé. — On étudie la possibilité de construire des solutions algébriques partielles des équations d'isomonodromie pour les connexions holomorphes de rang 2 sur les courbes de genre 2 en adaptant la méthode de Doran-Andreev-Kitaev par les familles de Hurwitz. Nous classifions tous les cas où la connexion est à monodromie Zariski dense.

Abstract. — We study the possiblility to construct partial algebraic solutions of the isomonodromy equations for holomorphic connexions of rank 2 on curves of genus 2 by adapting the Doran-Andreev-Kitaev method of Hurwitz families. We classify all cases where the connexion is Zariski dense monodromy.

Introduction

L'équation de Painlevé VI est une équation différentielle ordinaire non-linéaire du second ordre dont les solutions paramétrent les déformations isomonodromiques de systèmes différentiels linéaires de rang 2 avec 4 pôles simples sur la sphère de Riemann. Les équations de Painlevé trouvent leur origine dans les travaux de Paul Painlevé : ce sont « les » équations différentielles d'ordre 2 irréductibles sans singularité mobile. En particulier, leur solution générale est très transcendante ; pour autant, il existe des solutions algébriques ou de type hypergéométrique. La recherche des solutions

(*) Reçu le 16/12/2013, accepté le 01/09/2014

(1) DER de Mathématiques et d'informatique, FST, Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako, BP : E 3206 Mali
diarak2005@yahoo.fr

Article proposé par Jean-Pierre Otal.

spéciales, notamment algébriques, a fait l'objet de nombreux travaux durant la dernière décennie [15, 26, 27, 17, 18, 14, 2, 21, 22, 3, 4, 5, 6, 7] ; la classification complète est donnée dans [25], entérinant la liste établie dans [8].

Plus généralement, on peut considérer une courbe projective lisse X de genre g sur $\mathbb{C}$ et la donnée de n points distincts (ou du diviseur D réduit correspondant) et considérer les équations d'isomonodromie pour les connexions logarithmiques de rang 2 sur X, de diviseur D. Lorsque $g = 0$, on obtient les systèmes des Garnier (voir [20]), le cas le plus simple $n = 4$ correspondant à Painlevé VI. Pour les équations isomonodromiques en genre $g > 0$, voir par exemple [24]. On s'attend à ce que la transcendance de la solution générale croisse avec le genre et le nombre de pôles, mais aussi à ce qu'il y ait des solutions spéciales, notamment algébriques. Les solutions locales sont à $N = 3g - 3 + n$ variables (variables de déformation de la courbe et des n pôles) ; on suppose toujours $N > 0$. Une première idée pour construire des solutions algébriques est de considérer des connexions à monodromie finie (voir [17, 18, 4, 5, 6, 7]) ; la déformation isomonodromique d'une telle solution est nécessairement algébrique. En utilisant notamment la formule de Jimbo pour borner la complexité asymptotique de la solution, Boalch construit dans [4, 5, 6, 7] toutes les solutions algébriques de Painlevé VI correspondant à de telles déformations. De telles solutions algébriques existent en tout genre g, quel que soit le nombre n de pôles. L'autre idée, que nous avons exploité dans notre précédent article [13], est celle utilisée par Doran, Andreev et Kitaev [14, 2, 21, 22] que nous allons maintent décrire.

On se donne une connexion logarithmique (E, ∇) sur une courbe X de genre g avec n pôles. On se donne une famille de revêtements ramifiés $\phi_t : X_t \to X$ dépendant algébriquement d'un paramètre $t \in T$. La famille de connexions

$$(E_t, \nabla_t) := \phi_t^*(E, \nabla)$$

définie sur la famille de courbes X_t est isomonodromique et définit une solution algébrique partielle de l'équation d'isomonodromie correspondante. Pour un revêtement ϕ_t général, ne ramifiant pas au dessus des pôles (E, ∇), il est facile de voir que l'espace de déformation de ϕ_t est de dimension strictement plus petite que la dimension de déformation de (X_t, D_t) où D_t est le diviseur des pôles de (E_t, ∇_t). La déformation isomonodromique paramétrée par T ne sera que partielle. Pour avoir une solution algébrique complète, il faudra que le revêtement ramifie beaucoup au dessus des pôles de (E, ∇) ; en général, il faudra aussi imposer aux pôles de (E, ∇) d'avoir une monodromie locale finie de sorte que les relevés de ces pôles par ϕ_t deviennent des singularités apparentes : on pourra alors les chasser par une transformation birationnelle.

En fait, toute solution algébrique de Painlevé VI provient, à symétrie d'Okamoto près, d'une déformation obtenue par revêtement ramifié d'une connexion (E, ∇) hypergéométrique ; le cas où (E, ∇) est à monodromie Zariski dense est classifié dans [14]. Dans [13], nous avons classifié tous les X, (E, ∇) à monodromie Zariski dense et $\phi_t : X_t \to X$ donnant lieu à une solution algébrique complète de l'équation d'isomonodromie associée. On montre que nécessairement X et X_t sont de genre 0 avec (E, ∇) hypergéométrique et on trouve 6 possibilités de ramification pour ϕ_t. On a ainsi obtenu des solutions algébriques de systèmes de Garnier de rang $N = 2$ et 3.

Dans cet article, nous utilisons la même démarche pour montrer l'existence de déformations isomonodromiques algébriques partielles de connexions holomorphes sur les courbes de genre $g = 2$. Nous supposons donc X_t une courbe de genre 2 et (E_t, ∇_t) n'ayant que des singularités apparentes. On y pensera comme des connexions projectives holomorphes, c'est-à-dire sans pôles. La dimension de déformation de ϕ_t est majorée par le nombre b de points de branchements (valeurs critiques de ϕ_t) en dehors des pôles de (E, ∇). Ici, le nombre de variables est $N = 3$ et on cherche donc des déformations algébriques de dimension $b = 1$, 2 ou 3. On utilise la même méthode que dans notre précédent article [13] : on considère la structure orbifolde de X sous-jacente à la connexion (voir [13], section 2) et le fait que le degré du revêtement ramifié agit multiplicativement sur la caractéristique d'Euler orbifold.

Dans la section 1, nous montrons que le nombre de paramètres libres dépend de la géométrie de l'orbifolde. Pour avoir une solution algébrique complète, i.e. $b = 3$, on doit avoir $\chi > 0$ ce qui force $X = \mathbb{P}^1$, et (E, ∇) à provenir d'une équation hypergéométrique associée à un pavage de la sphère ; en particulier, le groupe de monodromie de (E, ∇) ou de (E_t, ∇_t) est fini. Réciproquement, toute connexion $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ à monodromie finie sur une courbe admet une déformation isomonodromique algébrique ; une telle déformation est en particulier construite par pull-back à paramètre d'une connexion hypergéométrique par le théorème de Klein [23]. Pour $b = 2$, on doit avoir $\chi = 0$ ce qui force (E, ∇) et donc (E_t, ∇_t) à être réductible (voir Proposition 1.1). Ainsi dans le cas où (E, ∇) est à monodromie Zariski dense, on a nécessairement $b \leqslant 1$.

Dans les sections 2 et 3, nous dressons la liste des données de Hurwitz possibles pour une déformation à $b = 1$ paramètre de revêtements lorsque (E, ∇) est à monodromie Zariski dense. Dans les tables 1.3 et 1.3, on trouve les degrés et ramifications possibles.

Dans la section 4, nous montrons l'existence d'un revêtement ramifié pour chaque donnée de Hurwitz de notre liste. Pour vraiment classifier les solutions algébriques correspondantes, il faudrait classifier tous les revêtements possibles modulo conjugaison d'une part (voir [28]), et modulo l'action naturelle du groupe modulaire (ou Mapping Class Group) d'autre part. Nous avons fait ce travail pour les revêtements de degré $\leqslant 8$ par un calcul formel direct avec l'aide de Maple. Pour les revêtements de plus grand degré, ceci nécessite d'autres techniques (voir par exemple [4]) ; nous reportons cette étude à un article ultérieur.

Notre présent travail, dans la continuité de [14, 13], est à rapprocher de [1] dans lequel les auteurs classifient les orbifoldes possédant un revêtement lisse (compact) de genre 2. Nos tables 1 et 2 correspondent respectivement aux listes 3.7 et 3.5 de [1] ; ce sont des variantes, autorisant un point de branchement. Une de nos motivations était de mettre en évidence l'existence de courbes algébriques contenues dans les feuilles du feuilletage isomonodromique. On s'attend à ce que de telles courbes soient rares, les feuilles étant très transcendantes.

On pourrait, en théorie, construire toutes les solutions partielles de manière explicite. En effet, nos deux tables donnent une borne pour la complexité du problème. On connait le degré du revêtement, et donc le degré de la fonction rationnelle ϕ_t qui le définit. Une fois trouvée, on peut tirer en arrière l'équation hypergéométrique et obtenir ainsi une famille explicite d'équations fuchsiennes sur la courbe de genre 2. Cependant, la taille des calculs explose très rapidement en fonction du degré. Dans la section 5, nous construisons explicitement un exemple de degré 6. La famille de revêtement est alors paramétrée par la courbe elliptique $E = \{y^2 = x^3 + 1\}$. À tout point $(x_t, y_t) \in E$ de cette courbe, nous associons la courbe de genre 2

$$X_t := \{Y^2 + (x_t + 1)(X^2 - 1)(3X^4 + 3(x_t - 1)X^2 + x_t^2 - x_t + 1) = 0\}$$

avec le revêtement ramifié

$$\phi_t : X_t \to \mathbb{P}^1 \ ;$$

$$(X, Y) \mapsto \frac{(x_t-2)^2X^2(Y-3y_t)+4(x_t^2-x_t+1)(y_t-Y)+(x_t^2+2x_t+1-3y_t)X^6-6y_t(x_t-2)X^4}{2(1+x_t)^2X^6}.$$

Ce dernier ramifie totalement au dessus de 0, 1 et ∞ à l'ordre 3, 3 et 6 respectivement ; en dehors de ces 3 fibres, il a exactement un point de branchement

$$\phi_t(0, y_t) = \frac{x_t(x_t^3 - 8)}{4(x_t^3 + 1)}.$$

Par construction, la courbe X_t est bi-elliptique, revêtement double de la courbe elliptique E.

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'équation différentielle isomonodromique polynomiale explicite pour notre problème (dans [24], les variables sont seulement analytiques sur l'espace des modules des courbes). Dans le cas des connexions à monodromie dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur les courbes de genre 2, les équations d'isomonodromie se réduisent à un système de Garnier (voir [16]). Cependant, dans notre cas, les connexions obtenues par pull-back correspondent à des représentations du groupe fondamental de la courbe (complète) dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ ne se relevant pas à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pour autant, C. Simpson a montré l'algébricité du feuilletage isomonodromique dans [32, §8] pour les connections (linéaires) holomorphes plates sur les variétés projectives (cas compact). Dans notre cas, on pourrait s'y ramener en supprimant la singularité apparente par un revêtement double. On pourrait tout aussi bien pousser la connexion via l'involution hyperelliptique et se ramener à étudier certaines connexions logarithmiques de rang 4 sur $\mathbb{P}^1$; les équations d'isomonodromie seraient alors données par un système de Schlesinger, donc polynomial. Nous n'avons pas fait ce travail qui dépasse largement les techniques mises en œuvre dans cet article.

Les solutions algébriques partielles correspondent à des orbites finies de la variété des représentations linéaires sous l'action d'un sous-groupe du Mapping-Class-Group. Le problème est que ce sous-groupe dépend de la solution. D'une autre manière, les solutions, a priori très transcendantes, deviennent algébriques en restriction à une courbe dans l'espace des variables (l'espace des modules des courbes de genre 2) et l'inclusion du groupe fondamental de cette courbe dans le Mapping-Class-Group détermine le sous-groupe.

Pour chaque solution algébrique partielle, on obtient une connexion plate logarithmique sur l'espace total de la famille de courbe de genre 2. Puisque la monodromie est Zariski dense, le Théorème 2 de [10] s'applique et, par construction, nous tombons dans la première alternative. Ainsi, *toute* solution algébrique partielle à monodromie Zariski dense qui ne serait pas dans notre liste donnerait lieu à une connexion satisfaisant la deuxième alternative de [10, Theorem 2] et donc à une variété de Shimura explicite (voir [11]).

Les résultats de cette note sont partiellement issus de notre thèse [12] effectuée sous la direction de F. Loray à l'Université de Rennes 1.

1. Structure orbifolde, formule de Riemann-Hurwitz et première borne

Nous reprenons la démarche de [12, 13] ; nous renvoyons à la section 2 de [13] pour la notion de structure orbifolde.

On se donne un revêtement ramifié $\phi : \tilde{X} \to X$ de degré d entre surfaces de Riemann compactes avec $\tilde{X}$ de genre 2. On suppose donnée une connexion logarithmique (E, ∇) de rang 2 sur X : $E \to X$ est un fibré vectoriel de rang 2 et $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_X(D)$ une connexion méromorphe de diviseur D réduit, de support disons $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. On suppose que $\phi^*(E, \nabla)$ ne possède que des singularités apparentes, i.e. devient holomorphe après transformation de jauge birationnelle.

Associons à (E, ∇) une structure orbifolde à singularités coniques sur les x_i : si la monodromie locale de (E, ∇) autour de x_i est d'ordre p_i, on fixe un point conique d'angle $\frac{2\pi}{p_i}$ en x_i. Notons $p = (p_1, \ldots, p_n)$ la donnée de la structure orbifolde, que l'on peut aussi voir comme une fonction $p : X \to \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ prenant la valeur 1 presque partout. On définit la caractéristique d'Euler de l'orbifolde (X, p) par

$$\chi(X, p) := 2 - 2g + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{p_i} - 1) = 2 - 2g - n + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

où g est le genre de X. Lorsque $\chi(X, p) < 0$, cette struture orbifolde peut être réalisée par une métrique de courbure -1 sur X (compatible avec la structure conforme de X) et l'aire de X pour cette métrique est alors donnée par $-2\pi\chi(X, p)$. La représentation de monodromie de (E, ∇) se factorise comme représentation du groupe fondamental orbifold de (X, p), et, parmis les structures orbifoldes sur X satisfaisant cette propriété, (X, p) est minimale (d'aire maximale dans le cas hyperbolique).

On définit $\tilde{p} := \phi^* p$ par :

- $\tilde{p}(\tilde{x}) = p(\phi(\tilde{x}))$ si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ est un point régulier pour ϕ,
- $\tilde{p}(\tilde{x}) = p \cdot p(\phi(\tilde{x}))$ si par contre ϕ ramifie à l'ordre $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ en $\tilde{x}$ (i.e. en coordonnées locales $\phi(z) = z^p$).

Attention, les points coniques deviennent d'angle rationnel en général : $\tilde{p} : \tilde{X} \to \mathbb{Q}_{>0} \cup \{\infty\}$. On définit la caractéristique d'Euler de la même manière et la formule de Riemann-Hurwitz s'écrit alors :

$$\chi(\tilde{X}, \tilde{p}) = d \cdot \chi(X, p).$$

Sous notre hypothèse que $\phi^*(E,\nabla)$ ne possède que des singularités apparentes, on déduit aisément que $\tilde{p}$ n'a que des points coniques d'angle multiple de 2π, i.e. $\frac{1}{\tilde{p}}$ est à valeurs entières. Si l'on note

$$b := \sum_{\tilde{x}\in\tilde{X}} (\frac{1}{\tilde{p}(\tilde{x})} - 1) \ \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

($2\pi b$ est l'excédent d'angles total sur la surface) alors il vient

$$\chi(\tilde{X},\tilde{p}) = 2 - 2\tilde{g} + b = b - 2.$$

Notons que les points coniques de $\tilde{X}$ proviennent ou bien du fait qu'on a « trop » ramifié au dessus des x_i (à un ordre $p = kp_i$ pour un $k > 1$ ce qui contribue pour k dans b) ou encore du fait que ϕ a des points de ramifications « libres » c'est à dire en dehors des x_i. Ces derniers sont les paramètres permettant de déformer le revêtement ramifié ϕ sans modifier sa combinatoire au dessus des x_i : pour une telle déformation $\phi_t : \tilde{X}_t \to X$, les relevés $\phi_t^*(E,\nabla)$ sont tous à singularités apparentes et produisent une déformation isomonodromique de connexions holomorphes sur $\tilde{X}_t$. Pour résumer, la formule de Riemann-Hurwitz nous donne :

Proposition 1.1. — *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a l'égalité*

$$b = 2 + \left(2 - 2g + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{p_i} - 1)\right) d \tag{1.1}$$

et b majore la dimension de déformation de ϕ.

1.1. Cas sphérique

Si l'on veut construire une solution algébrique complète, alors il faut $b \geqslant 3$, ce qui implique que l'orbifolde (X,p) est de caractéristique d'Euler $\chi(X,p) > 0$. Ces orbifoldes sont classifiées par Klein dans [23] et correspondent aux quotients de $\mathbb{P}^1$ par les sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. En particulier, le groupe fondamental orbifold est fini, ce qui implique que (E,∇) est à monodromie finie ! Il en sera de même pour $\phi_t^*(E,\nabla)$. Réciproquement, une connexion holomorphe $(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ sur $\tilde{X}$ à monodromie finie admet une déformation isomonodromique complète algébrique. On pourrait classifier ces déformations de manière analogue à [4, 7], c'est à dire classifier les représentations du groupe fondamental de $\tilde{X}$ dans les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous laissons cela à un article ultérieur. Notons que de telles déformations sont automatiquement construites par déformation de revêtements ramifiés au dessus des modèles hypergéométriques standards

$$(p_0,p_1,p_\infty) = (1,p,p),\ (2,2,p),\ (2,3,3),\ (2,3,4) \text{ et } (2,3,5)$$

(voir [23]).

1.2. Cas euclidien

Si l'on cherche maintenant une déformation algébrique de dimension 2 (codimension 1) qui ne soit pas donnée par une monodromie finie, alors on doit avoir $b = 2$ et donc $\chi(X, p) = 0$. L'orbifolde est alors un des quotient de la droite complexe $\mathbb{C}$ par un groupe discret de covolume fini et on trouve ou bien que X est une courbe elliptique sans point orbifold, ou bien $\mathbb{P}^1$ avec une des structures orbifoldes suivantes :

$$(2,3,6),\ (2,4,4),\ (3,3,3) \text{ et } (2,2,2,2).$$

Notons que $(2,2,\infty)$ est exclu puisque les singularités orbifoldes doivent essentiellement disparaître sur le revêtement fini $\tilde{X}$. Dans chacun des cas, le groupe fondamental est résoluble (virtuellement abélien) et donc (E, ∇) doit être réductible ou diédral ; il en sera de même pour $\phi_t^*(E, \nabla)$. Ce cas fera l'objet d'un autre article.

1.3. Cas hyperbolique

Si (E, ∇) est à monodromie Zariski dense, il ne nous reste que $b = 0$ ou 1 comme possibilité. Le cas $b = 0$ est rigide, il n'y aura pas de déformation. Notons cependant qu'il a déjà été étudié dans [1] ; on y trouve la liste des orbifoldes possibles avec le degré correspondant. Dans la prochaine section, nous donnons la classification similaire dans le cas $b = 1$.

2. Classification dans le cas où (X, ∇) est hypergéométrique

On suppose dans cette section $X = \mathbb{P}^1$ et (E, ∇) avec pôles sur 0, 1 et ∞. On suppose en outre la monodromie de (E, ∇) Zariski dense, et donc l'orbifolde sous-jacente (p_0, p_1, p_∞) hyperbolique :

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_\infty} < 1.$$

On suppose en outre que l'on peut déformer $\phi : \tilde{X} \to X$, c'est à dire $b = 1$ avec les notations précédentes.

Proposition 2.1. — *On a l'égalité*

$$\left(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_\infty}\right) d = 1. \tag{2.1}$$

De plus, on obtient les inégalités suivantes :

$$(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}) p_\infty \leqslant 2 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1.$$

Démonstration. — Le premier énoncé se déduit immédiatement de la Proposition 1.1. Le fait que les points coniques disparaissent en haut entraîne que le degré $d \geqslant p_\infty$. Alors on a

$$(1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})p_\infty \leqslant (1 - \sum_{i=0,1,\infty} \frac{1}{p_i})d \leqslant 1,$$

ce qui nous donne

$$(1 - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})p_\infty \leqslant 2. \tag{2.2}$$

Pour obtenir la seconde inégalité, il est évident que

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} < 1;$$

la minoration de cette inégalité provient du fait que $p_\infty \geqslant 3$ (hyperbolicité) : en substituant dans l'inégalité (2.2), on obtient $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \geqslant \frac{1}{3}$. □

Dans le cas hyperbolique, le deuxième énoncé de la proposition 2.1 nous permet d'obtenir la liste des triplets (p_0, p_1, p_∞) suivants :

- $(2, 3, p_\infty)$ avec $p_\infty = 7, \cdots, 12$,
- $(2, 4, p_\infty)$ avec $p_\infty = 5, \cdots, 8$,
- $(2, 5, p_\infty)$ avec $p_\infty = 5, 6$,
- $(2, 6, 6)$,
- $(3, 3, p_\infty)$ avec $p_\infty = 4, 5, 6$,
- $(3, 4, 4)$ et
- $(4, 4, 4)$.

Si l'on veut pouvoir déformer ϕ, on doit avoir un point de branchement libre, i.e. en dehors des fibres des points orbifolds 0, 1 et ∞. Ceci entraine que ϕ doit totalement ramifier au dessus de 0, 1 et ∞ précisément à l'ordre p_0, p_1 et p_∞ respectivement. En particulier, le degré d du revêtement doit être un multiple des p_i. Ceci, compte tenu de (2.1) pour d nous donne la liste suivante.

(p_0, p_1, p_∞)	Degré	Ramifications au dessus de $(0\ ;\ 1\ ;\ \infty)$
$(2,3,7)$	42	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{21 fois}\ ;\ \underbrace{3+\cdots+3}_{14 fois}\ ;\ \underbrace{7+\cdots+7}_{6 fois})$
$(2,3,8)$	24	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{12 fois}\ ;\ \underbrace{3+\cdots+3}_{8 fois}\ ;\ 8+8+8)$
$(2,3,9)$	18	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{9 fois}\ ;\ \underbrace{3+\cdots+3}_{6 fois}\ ;\ 9+9)$
$(2,3,12)$	12	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{6 fois}\ ;\ \underbrace{3+\cdots+3}_{4 fois}\ ;\ 12)$
$(2,4,5)$	20	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{10 fois}\ ;\ \underbrace{4+\cdots+4}_{5 fois}\ ;\ \underbrace{5+\cdots+5}_{4 fois})$
$(2,4,6)$	12	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{6 fois}\ ;\ 4+4+4\ ;\ 6+6)$
$(2,4,8)$	8	$(2+2+2+2\ ;\ 4+4\ ;\ 8)$
$(2,5,5)$	10	$(\underbrace{2+\cdots+2}_{5 fois}\ ;\ 5+5\ ;\ 5+5)$
$(2,6,6)$	6	$(2+2+2\ ;\ 6\ ;\ 6)$
$(3,3,4)$	12	$(3+3+3+3\ ;\ 3+3+3+3\ ;\ 4+4+4)$
$(3,3,6)$	6	$(3+3\ ;\ 3+3\ ;\ 6)$
$(4,4,4)$	4	$(4\ ;\ 4\ ;\ 4)$

Table 1. — Revêtements dans le cas hypergéométrique

Dans chacun des cas, $\phi^*\nabla$ n'a qu'une singularité apparente libre qui provient du point critique de ϕ en dehors de $\{0, 1, \infty\}$. Dans la dernière section, nous expliquerons comment démontrer l'existence de revêtements avec ces ramifications et nous construirons l'avant dernier, de degré 6, explicitement.

3. Classification dans le cas où (X, ∇) n'est pas hypergéométrique

Toujours supposant $b = 1$, la proposition 1.1 nous donne

$$\left(2g - 2 + \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{p_i})\right) d = 1.$$

La caractéristique d'Euler de l'orbifolde (X, p) croît rapidement avec le genre g et le nombre n de points conique (voir tables de la page 136 de [13]), et on trouve aisément la liste de possibilités exhaustive de la table 2. Dans chacun des cas, il y a en outre un point de ramification libre, en dehors des points coniques de X.

$(g\ ;\ p_1,\ldots,p_n)$	Degré	Ramifications au dessus de $(x_1,\ldots,x_n)$
$(0\ ;\ 2,2,2,3)$	6	$(3+3\ ;\ 3+3\ ;\ 3+3\ ;\ 2+2+2)$
$(0\ ;\ 2,2,2,4)$	4	$(2+2\ ;\ 2+2\ ;\ 2+2\ ;\ 4)$
$(0\ ;\ 2,2,2,2,2)$	2	$(2\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2)$
$(1\ ;\ 2)$	2	(2)

Table 2. — Revêtements dans le cas non hypergéométrique

4. Existence de revêtements

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré que les obstructions données par la formule de Riemann-Hurwitz, ce qui nous a conduit aux tables 1 et 2. Il reste à montrer l'existence de tels revêtements, c'est le *problème de Hurwitz*. Il suffit pour cela de trouver, par exemple dans le cas hypergéométrique, pour chaque donnée d et (p_0, p_1, p_∞), une représentation

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty,t\}) \to \mathrm{Perm}(1,\ldots,d)$$

du groupe fondamental dans le groupe des permutations satisfaisant les propriétés suivantes. Si l'on note $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty, \sigma_t \in \mathrm{Perm}(1,\ldots,d)$ les images des générateurs standards du groupe fondamental, alors on veut

- σ_i est conjugué au produit de p_i permutations cycliques disjointes de longueur $\frac{d}{p_i}$ pour $i = 0, 1, \infty$,
- σ_t est une transposition,
- $\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_\infty \circ \sigma_t =$ identité,
- le groupe engendré $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \rangle$ est transitif.

Par exemple, le revêtement de degré 4 en bas de la table 1 est réalisé par

$$\sigma_0 = (1234),\ \sigma_1 = (1324),\ \sigma_\infty = (1342) \quad \text{et} \quad \sigma_t = (12).$$

Nous détaillons maintenant les deux revêtements de degré 6 de la table 1.

Pour $(p_0, p_1, p_\infty) = (2, 6, 6)$, remarquons qu'il existe un revêtement de degré 6 ramifiant uniquement au dessus de 0, 1 et ∞ et désingularisant l'orbifolde $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_\infty) = (2, 6, 3)$: c'est le quotient de la courbe elliptique qui possède un automorphisme d'ordre 6 par le groupe engendré. Il existe donc $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_\infty$ satisfaisant

- $\tilde{\sigma}_i$ est conjugué au produit de $\tilde{p}_i$ permutations cycliques disjointes de longueur $\frac{d}{\tilde{p}_i}$ pour $i = 0, 1, \infty$,
- $\tilde{\sigma}_0 \circ \tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_\infty =$ identité,
- le groupe engendré $\langle \tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_\infty \rangle$ est transitif.

En particulier, à conjugaison près, on peut supposer $\tilde{\sigma}_\infty = (123)(456)$. Il suffit alors de poser $\sigma_i := \tilde{\sigma}_i$ pour $i = 0, 1$, $\sigma_\infty = (123456)$ et $\sigma_t = (14)$ et on a les relations attendues pour $(2, 6, 6)$. De la même manière, on ramène les cas $(2, 4, 8)$ et $(2, 3, 12)$ aux cas $(2, 4, 4)$ et $(2, 3, 6)$ respectivement. Ces derniers sont désingularisés par des revêtements elliptiques de degrés 4 et 6 respectivement, mais on peut les composer par une isogénie de degré 2 ce qui nous donne les bons degrés 8 et 12.

Pour $(p_0, p_1, p_\infty) = (3, 3, 6)$, remarquons qu'il existe un revêtement de degré 6 ramifiant uniquement au dessus de 0, 1 et ∞ et désingularisant l'orbifolde $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_\infty) = (3, 6, 6)$: voir [1] (section 3.7). En notant comme avant $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_\infty$ les permutations décrivant ce revêtement, on peut supposer $\tilde{\sigma}_\infty = (123456)$. Il suffit alors de poser $\sigma_i := \tilde{\sigma}_i$ pour $i = 0, 1$, $\sigma_\infty = (123)(456)$ et $\sigma_t = (14)$ et on a les relations attendues pour $(3, 6, 3)$. De la même manière, on ramène les cas $(2, 5, 5)$, $(2, 4, 6)$ et $(2, 3, 9)$ respectivement aux cas $(2, 5, 10)$, $(2, 4, 12)$ et $(2, 3, 18)$ de [1].

On voit facilement que l'orbifolde hypergéométrique $(3, 3, 4)$ est revêtement double de $(2, 3, 8)$ (ramifiant sur les points d'ordre 2 et 8) et que $(4, 4, 4)$ est revêtement triple de $(3, 3, 4)$ (ramifiant sur les deux points d'ordre 3). En composant ces revêtements avec celui d'ordre 4 construit au dessus de $(4, 4, 4)$ au tout début, on obtient les revêtements recherchés pour $(2, 3, 8)$ et $(3, 3, 4)$. De la même manière, l'orbifolde hypergéométrique $(2, 5, 5)$ s'obtient par revêtement double de $(2, 4, 5)$, ce qui nous donne l'existence du revêtement recherché pour $(2, 4, 5)$.

Pour le revêtement $(2, 3, 7)$ de degré 42, on peut le décomposer en un revêtement de degré 7 par l'orbifolde de genre 0 et de structure orbifolde $(2, 2, 2, 3)$ (voir [29], en haut de la table 2) composé avec un revêtement de degré 6 comme en haut de notre table 1.3. Enfin, pour cette dernière table, l'existence des revêtements de degré 6 et 4 se ramène aisément, par les méthodes perturbatives décrites au dessus, aux cas de revêtements galoisiens (sans branchement libre) des orbifoldes de genre 0 et de structure orbifolde $(2, 2, 3, 3)$ et $(2, 2, 4, 4)$ (voir [19], list 1).

5. Classification

Pour obtenir une classification complète des solutions partielles correspondant aux tables 1 et 2, il faut compter le nombre de familles irréductibles de revêtements $\phi_t : X_t \to X$ pour chaque donnée de ramifications. De manière équivalente, il s'agit de compter le nombre de représentations

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, t\}) \to \mathrm{Perm}(1, \ldots, d)$$

(ici pour la table 1) comme au dessus, modulo conjugaison dans $\mathrm{Perm}(1,\dots,d)$ et action du groupe modulaire (ou Mapping-Class-Group). Après un calcul avec Maple, on obtient la table suivante pour les revêtements de degrés $2 < d < 10$ des tables 1 et 2.

Type orbifold	Degré	Classification
$(2,4,8)$	8	$23 = 1+2+4+4+12$
$(2,6,6)$	6	$11 = 1+10$
$(3,3,6)$	6	$12 = 4+8$
$(4,4,4)$	4	$4 = 4$
$(2,2,2,3)$	6	$9 = 3+3+3$
$(2,2,2,4)$	4	$7 = 1+1+1+4$

Table 3. — Classification en bas degré

Dans la table 3, la dernière colonne donne le nombre de revêtements non équivalents (ou représentations dans le groupe symétrique modulo conjugaison). Le groupe modulaire agit sur cet ensemble et nous donnons aussi la décomposition du cardinal en orbites sous cette action. Par exemple, pour l'orbifolde de type $(3,3,6)$, on a 12 revêtements non équivalents de $\mathbb{P}^1_x \setminus \{0,1,t,\infty\}$ totalement ramifiés à l'ordre 3, 3 et 6 au dessus de $x = 0$, 1 et ∞ respectivement et ayant un point de branchement simple au dessus de $x = t$. Lorsque t varie, on ne trouve que deux familles, paramétrées par deux courbes de Belyi rationnelles, de degrés 4 et 8 au dessus de $\mathbb{P}^1_x \setminus \{0,1,\infty\}$. Nous allons décrire explicitement la première famille, qui a l'avantage d'être une famille de revêtements bi-elliptiques.

6. Une famille de revêtements de degré 6

On veut construire un exemple explicite de revêtements $\phi : C_2 \to \mathbb{P}^1$ de degré 6 ramifiant totalement au dessus de 0, 1 et ∞ à l'ordre 3, 3 et 6 respectivement et ayant un seul autre point de ramification simple, que nous pourrons déformer. Nous allons le construire comme composition de deux revêtements galoisiens $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$. Le premier $\phi_1 : E \to \mathbb{P}^1$ est de degré 3, ramifiant totalement à l'ordre 3 au dessus de 0, 1 et ∞ et nulle-part ailleurs : E est la courbe elliptique possédant une symétrie d'ordre 3 et ϕ_1 est le quotient. Le second $\phi_2 : C_2 \to E$ est un revêtement bielliptique de degré 2 ramifiant sur $\phi_1^{-1}(\infty)$ ainsi que sur un autre point libre, que nous pourrons faire varier sur ma courbe elliptique E.

Le premier revêtement est par exemple donné par

$$\phi_1 : E = \{y^2 = x^3 + 1\} \to \mathbb{P}^1_z \ ; \ (x,y) \mapsto z = \frac{y+1}{2}.$$

Pour calculer le second, on choisit un point $(x_t, y_t) \in E$, puis on compose le revêtement bielliptique ramifiant au dessus des points $(x_t, \pm y_t)$ avec la translation par (x_t, y_t). De cette manière, le point $(x_t, -y_t)$ sera envoyé à l'infini de E, puis sur le point $\infty \in \mathbb{P}^1_z$ par ϕ_1, alors que le point (x_t, y_t) sera envoyé sur son double dans E, puis par ϕ_1, sur le point de branchement libre de $\mathbb{P}^1_z$. On notera (x_1, y_1) les coordonnées non translatées et (x, y) les coordonnées translatées de sorte que $(x, y) = (x_1, y_1) \oplus (x_t, y_t)$. Rappelons les formules de translation sur E :

$$\begin{cases} x &= a^2 - x_1 - x_t \\ y &= -(ax+b) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a &= \frac{y_1 - y_t}{x_1 - x_t} \\ b &= \frac{x_1 y_t - x_t y_1}{x_1 - x_t} \end{cases}$$

À partir de maintenant, notons plutôt $\phi_1 : E \to \mathbb{P}^1$ le revêtement de degré 3 vu depuis les cooordonnées non translatées (x_1, y_1). En simplifiant les puissances de y_1 et y_t avec l'équation de la courbe elliptique E, on trouve

$$\phi_1(x_1, y_1) = \frac{-(3x_t^2 x_1 + x_t^3 + 4)y_1 + (1 + y_t)x_1^3 + 3x_t(y_t - 1)x_1^2 + 3x_t^2 x_1 + 4y_t - x_t^3}{2(x_1 - x_t)^3}.$$

Les 3 points de ramification sont donnés par

$$\begin{cases} E & \xrightarrow{\oplus(x_t, y_t)} & E & \xrightarrow{\frac{y+1}{2}} & \mathbb{P}^1 \\ (x_1, y_1) & \mapsto & (x, y) & \mapsto & z \\ \left(\frac{2(1-y_t)}{x_t^2}, \frac{4y_t - x_t^3 - 4}{x_t^3}\right) & \mapsto & (0, -1) & \mapsto & 0 \\ \left(\frac{2(1+y_t)}{x_t^2}, \frac{4y_t + x_t^3 + 4}{x_t^3}\right) & \mapsto & (0, 1) & \mapsto & 1 \\ (x_t, -y_t) & \mapsto & (\infty, \infty) & \mapsto & \infty \end{cases}$$

Le revêtement bielliptique est obtenu par exemple en introduisant la variable $X^2 = \frac{x_1 - x_t}{x_1 + 1}$ (notons que x_1 ramifie déjà sur -1) et la variable $Y = y_1(X^2 - 1)^2$ afin de mettre l'équation de C_2 sous forme hyperelliptique :

$$C_2 = \{Y^2 + (x_t + 1)(X^2 - 1)(3X^4 + 3(x_t - 1)X^2 + x_t^2 - x_t + 1)\}$$

et la projection sur E est donnée par :

$$\phi_2 : C_2 \to E \ ; \ (X, Y) \mapsto (x_1, y_1) = \left(-\frac{X^2 + x_t}{X^2 - 1}, \frac{Y}{(X^2 - 1)^2}\right).$$

Les deux points de ramification sont donnés par

$$\begin{cases} C_2 & \xrightarrow{\phi_2} & E \\ (X, Y) & \mapsto & (x_1, y_1) \\ (0, y_t) & \mapsto & (x_t, y_t) \\ (0, -y_t) & \mapsto & (x_t, -y_t) \end{cases}$$

En composant ϕ_1 et ϕ_2 (et en simplifiant les puissances de y_t), il vient

$$\phi(X,Y)=\frac{(x_t-2)^2X^2(Y-3y_t)+4(x_t^2-x_t+1)(y_t-Y)+(x_t^2+2x_t+1-3y_t)X^6-6y_t(x_t-2)X^4}{2(1+x_t)^2X^6}.$$

Bibliographie

[1] Abu Osman (M. T.) et Rosenberger (G.). — Embedding property of surface groups. Bull. Malaysian Math. Soc. 3, p. 21-27 (1980).

[2] Andreev (F. V.) et Kitaev (A. V.). — Transformations $RS_4^2(3)$ of the ranks $\leqslant 4$ and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. Comm. Math. Phys. 228, p. 151-176 (2002).

[3] Boalch (P.). — From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. Proc. London Math. Soc. 90, p. 167-208 (2005).

[4] Boalch (P.). — From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. Proc. Londo, The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI. J. Reine Angew. Math. 596, p. 183-214 (2006).

[5] Boalch (P.). — Six results on Painlevé VI. Théories asymptotiques et équations de Painlevé, 1-20, Sémin. Congr., 14, Soc. Math. France, Paris, 2006.

[6] Boalch (P.). — Higher genus icosahedral Painlevé curves. Funkcial. Ekvac. 50, no. 1, p. 19-32 (2007).

[7] Boalch (P.). — Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem. Differential equations and quantum groups, 85-112, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[8] Boalch (P.). — Towards a non-linear Schwarz's list. The many facets of geometry, 210-236, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.

[9] Chiarellotto (B.). — On Lamé Operators which are Pullbacks of Hypergeometric Ones. Trans. Amer. Math. Soc. 347, p. 2735-2780 (1995).

[10] Corlette (K.) et Simpson (C.). — On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups. Compos. Math. 144, p. 1271-1331 (2008).

[11] Cousin (G.). — Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. arXiv:1201.2755

[12] Diarra (K.). — Construction de déformations isomonodromiques par revêtements, thèse de doctorat, Université de Rennes 1 (2011). http://tel.archives-ouvertes.fr/

[13] Diarra (K.). — Construction et classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier. Bull. Braz. Math. Soc., New Series 44, p. 1-26 (2013).

[14] Doran (C. F.). — Algebraic and Geometric Isomonodromic Deformations. J. Differential Geometry 59, p. 33-85 (2001).

[15] Dubrovin (B.) et Mazzocco (M.). — Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups. Invent. Math. 141, p. 55-147 (2000).

[16] Heu (V.) et Loray (F.). — Flat rank 2 vector bundles on genus 2 curves. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00927061/fr/

[17] Hitchin (N.). — Poncelet polygons and the Painlevé equations. Geometry and analysis (Bombay, 1992), 151-185, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995.

[18] Hitchin (N.). — A lecture on the octahedron. Bull. London Math. Soc. 35, p. 577-600 (2003).

[19] Hulpke (A.), Kuusalo (T.), Näätänen (M.) et Rosenberger (G.). — On orbifold coverings by genus 2 surfaces. Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.) 11, p. 45-55 (2005).

[20] Iwasaki (K.), Kimura (H.), Shimomura (S.) et Yoshida (M.). — From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions. Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1991.

[21] Kitaev (A. V.). — Special functions of isomonodromy type, rational transformations of the spectral parameter, and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. Algebra i Analiz 14, p. 121-139 (2002).

[22] Kitaev (A. V.). — Grothendieck's dessins d'enfants, their deformations, and algebraic solutions of the sixth Painlevé and Gauss hypergeometric equations. Algebra i Analiz 17, p. 224-275 (2005).

[23] Klein (F.). — Vorlesungen über das Ikosaedar, B. G. Teubner, Leipzig (1884).

[24] Krichever (I.). — Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations. Mosc. Math. J. 2, p. 717-752 (2002).

[25] Lisovyy (O.) et Tykhyy (Y.). — Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. arXiv:0809.4873 [math.CA]

[26] Mazzocco (M.). — Rational solutions of the Painlevé VI equation. Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (Leeds, 2000). J. Phys. A 34, p. 2281-2294 (2001).

[27] Mazzocco (M.). — Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation. Math. Ann. 321, p. 157-195 (2001).

[28] Mednykh (A.). — Counting conjugacy classes of subgroups in a finitely generated group. J. Algebra 320, p. 2209-2217 (2008).

[29] Pascali (M. A.) et Petronio (C.). — Branched covers of the sphere and the prime-degree conjecture. Ann. Mat. Pura Appl. 191, p. 563-594 (2012).

[30] Pervova (E.) et Petronio (C.). — On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data. I. Algebr. Geom. Topol. 6, p. 1957-1985 (2006).

[31] Pervova (E.) et Petronio (C.). — On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data. II. J. Knot Theory Ramifications 17, p. 787-816 (2008).

[32] Simpson (C.). — Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 80, p. 5-79 (1994).