

H. ANDOYER

Contribution à la théorie des ordres intermédiaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 1, n° 4 (1887), p. M1-M72

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1887_1_1_4_M1_0

© Université Paul Sabatier, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DES ORBITES INTERMÉDIAIRES,

PAR M. H. ANDOYER,

Aide-Astronome à l'Observatoire,
Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

La loi de la gravitation universelle, énoncée par Newton, avait donné aux géomètres le moyen de calculer à l'avance le mouvement des corps célestes avec une approximation qui ne pouvait être limitée que par l'imperfection des observations. L'absolue généralité de cette loi fut longtemps combattue : le plus rude coup lui fut porté par Clairaut. Cet illustre géomètre venait d'aborder, le premier, le problème des trois corps; il appliqua immédiatement sa solution à l'étude du mouvement de la Lune. Son attention se porta principalement sur le mouvement séculaire du périégée, qui, comme l'indiquaient les observations, exécute une révolution complète en neuf ans environ. Le résultat du calcul de Clairaut ⁽¹⁾ fut que le périégée de l'orbite lunaire devait, en admettant la loi de Newton, exécuter une révolution en dix-huit ans : son mouvement théorique était donc la moitié de celui qui résultait des observations. En même temps que Clairaut, Euler et d'Alembert arrivaient, par des procédés différents, aux mêmes conclusions ⁽²⁾. Disons tout de suite, sans qu'il soit nécessaire de rappeler comment Clairaut avait modifié la loi de Newton, que, moins de deux ans après, il reconnut publiquement qu'il avait été induit en erreur par un

⁽¹⁾ *Histoire de l'Académie royale des Sciences pour l'année 1745*; Paris.

⁽²⁾ *Id.*

calcul trop sommaire, et qu'une étude plus approfondie démontrait, au contraire, le parfait accord de la théorie newtonienne avec les observations.

Les immortels travaux de Lagrange et de Laplace achevèrent de mettre cette affirmation complètement hors de doute, et, s'il s'est présenté des cas où l'accord entre la théorie et l'observation n'a pu être réalisé, on a, non pas modifié la loi de l'attraction, mais supposé l'existence de nouvelles forces qui agiraient concurremment. Et d'ailleurs, dans ces cas singuliers, peut-être l'hypothèse d'un milieu résistant ou l'application de la loi de Weber ne sont-elles que des moyens artificiels qui permettent de tourner des difficultés analytiques en présence desquelles les méthodes ordinaires de la théorie des perturbations se trouvent en défaut. Ce point de vue nouveau serait d'autant plus acceptable que les récents travaux de M. Poincaré permettent de supposer, comme l'avait déjà fait M. Weierstrass, qu'il existe des cas où la légitimité des procédés habituels de la Mécanique céleste peut être mise en doute, du moins s'il s'agit d'intervalles de temps très considérables.

Si, comme nous venons d'en entrevoir la possibilité, il se présente des difficultés que les théories actuelles sont impuissantes à résoudre, il faut, de toute nécessité, supposer que les approximations successives, qui sont censées conduire à la solution, ne sont pas convergentes. La première de ces approximations est obtenue en négligeant complètement les forces perturbatrices; l'orbite correspondante est l'ellipse de Kepler. Si l'on prend cette ellipse pour point de départ des approximations, si, en outre, comme on le fait d'habitude, ces approximations sont ordonnées par rapport aux puissances croissantes des masses perturbatrices, forme-t-on nécessairement une suite qui converge vers la véritable solution? en d'autres termes, peut-on pousser la théorie assez loin pour que les différences entre les coordonnées véritables de l'astre et celles que l'on déduit du calcul puissent devenir et rester aussi petites qu'on le veut? Telle est la question que s'est posée M. Gylden, et qu'il a résolue par la négative.

C'est donc une nouvelle méthode qui devient nécessaire pour étudier le mouvement des corps célestes. Quel en sera le principe? C'est Clairaut lui-même qui nous l'indique lorsqu'il dit : « Il faut donc choisir pour première équation de l'orbite lunaire quelque équation qui ne s'écarte jamais considérablement de la vraie. Pour faire ce choix, je remarque que, au lieu de l'équation $\frac{p}{r} = 1 - e \cos U$, qui exprime l'ellipse primitive, si l'on prend

$\frac{p}{r} = 1 - e \cos m U$, on aura l'équation d'une courbe formée en faisant mouvoir une ellipse autour de son foyer, en telle sorte que son apside décrive un angle qui soit à celui que la planète parcourt dans cette ellipse comme $1 - m$ à $1 \dots$ ».

Ces lignes, quoique écrites sous l'influence de cette idée que la loi de Newton ne suffit pas à expliquer les apparences des phénomènes célestes, semblent contenir en germe la méthode de M. Gyldén. Voici, en effet, ce qui caractérise cette méthode : pour servir de base aux approximations successives, M. Gyldén choisit, et cela suivant les cas, une courbe représentant le mouvement réel de l'astre considéré d'une façon plus approchée que l'ellipse de Kepler. Cette courbe est nommée *orbite intermédiaire*.

Faire voir comment M. Gyldén a été conduit à rejeter l'ellipse de Kepler comme première approximation; par quelles considérations peut être motivé, dans chaque cas particulier, le choix d'une orbite intermédiaire; comment on peut avoir égard aux termes les plus considérables de la fonction perturbatrice, et cela en évitant le développement par rapport aux puissances de la masse perturbatrice, tel est, en quelques mots, le but de ce travail.

Je dois ajouter que, au lieu de prendre pour point de départ les équations de M. Gyldén, qui ont la plus grande analogie avec celles de Hansen, j'ai pris celle que Laplace établit au Chapitre II du second Livre de la *Mécanique céleste*.

Le premier Chapitre est consacré aux méthodes qui servent à former les équations de l'orbite intermédiaire dans le cas le plus général : le développement de la fonction perturbatrice y trouve sa place; comme application, je donne, à la fin de ce Chapitre, les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune.

Dans le deuxième Chapitre, je traite un cas particulier intéressant et sur lequel M. Gyldén a fait de nombreuses recherches : c'est celui dans lequel la fonction perturbatrice est supposée fonction du seul rayon vecteur; comme application, les formules données depuis longtemps par M. Tisserand, pour déterminer le mouvement des apsides des satellites inférieurs de Saturne sous l'influence de l'aplatissement de la planète et sous l'action de l'anneau, y sont retrouvées par une voie essentiellement différente.

Le Chapitre III est consacré à l'exposition des méthodes d'intégration propres aux équations établies dans le premier Chapitre.

Enfin, dans un dernier Chapitre, je détermine, avec une approximation très rapide, l'orbite intermédiaire de la Lune; les inégalités séculaires du mouvement du nœud et du périhélie de l'orbite lunaire s'y trouvent déterminées avec une grande précision; quant aux grandes inégalités périodiques de la longitude, elles se retrouvent avec une erreur relative qui ne dépasse pas un dixième. La comparaison des résultats obtenus avec la théorie de Laplace fait d'ailleurs prévoir qu'une seconde approximation serait suffisante pour conduire à des Tables de la Lune aussi précises que celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*.



CHAPITRE I.

1. Considérons trois corps célestes, que nous supposerons réduits à leurs centres de gravité : l'un d'eux étant considéré comme corps central, nous prendrons sa masse comme unité de masse, et nous supposerons qu'il serve d'origine à un système d'axes de coordonnées Ox , Oy , Oz rectangulaires deux à deux et de directions fixes. Désignons de plus par m la masse du corps dont nous nous proposons d'étudier le mouvement, par m' celle du troisième corps; f désignant le coefficient d'attraction relatif aux unités de masse, de longueur et de temps adoptées, nous ferons en outre

$$\mu_1 = f(1 + m), \quad \mu' = fm';$$

x , y , z étant les coordonnées du corps troublé (m), x' , y' , z' celles du corps troublant (m'), substituons à ces coordonnées rectangulaires des coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned} x &= r \cos \nu \cos \theta, \\ y &= r \sin \nu \cos \theta, \\ z &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

des formules analogues ayant lieu pour (m').

Posons

$$U = \frac{\mu_1}{r} + \Omega,$$

Ω représentant la fonction perturbatrice, de sorte que

$$\Omega = \mu' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

en désignant par Δ la distance des deux corps (m) et (m'). L'application des équations de Lagrange nous fournit alors immédiatement ces équations

du mouvement de (m) sous la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(r^2 \cos^2 \theta \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \cos^2 \theta \frac{dv^2}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) + r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{dv^2}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Introduisons avec Laplace, au lieu de r et de θ , deux nouvelles variables u et s définies par les relations

$$u = \frac{1}{r \cos \theta}, \quad s = \tan \theta.$$

Au lieu des équations (1), nous obtenons, par une transformation facile, le système

$$(2) \quad \begin{cases} dt = \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}}}, \\ \frac{d^2 u}{dv^2} + u + \frac{1}{h^2 u^2 \left(1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} \right)} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{du}{dv} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = 0, \\ \frac{d^2 s}{dv^2} + s + \frac{1}{h^2 u^2 \left(1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} \right)} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{ds}{dv} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, où la variable indépendante est non plus le temps t , mais la longitude v , h désigne une constante d'intégration choisie de façon que le coefficient de v , dans l'expression finale de t , devienne égal à l'inverse du moyen mouvement n de (m).

Remarquons que la première de ces équations peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre aussi, savoir :

$$(3) \quad \frac{d^2 t}{dv^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{dv} \frac{dt}{dv} + u^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dt^3}{dv^3} = 0.$$

La seconde des équations (2) doit être légèrement modifiée avant de se présenter sous la forme qui nous sera commode. Posons

$$u = (1 + \rho) \frac{\mu_1}{h^2},$$

de sorte que la nouvelle inconnue ρ que nous introduisons à la place de u sera une petite quantité de l'ordre de l'excentricité de la projection de l'orbite de (m) sur le plan des xy . Si nous remplaçons en outre $\frac{\partial U}{\partial r}$ par sa valeur $-\frac{\mu_1}{r^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}$, l'équation en question devient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho + \left(1 - \frac{\cos^3 \theta}{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}} \right) + \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{1}{h^2 u^2}}{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}} \frac{d\rho}{dv} \\ + \frac{1}{\mu_1 u^2 \left(1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} \right)} \left(\cos \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Avant d'aller plus loin, une remarque est encore nécessaire au sujet de la fonction représentée par l'intégrale $\int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{u^2 h^2}$: toutes les fois que nous rencontrerons des fonctions de cette sorte, c'est-à-dire représentées par une intégrale *indéfinie*, il faudra entendre que, la quantité soumise au signe \int étant supposée développée en série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus de certains multiples de la variable indépendante, l'intégration est effectuée sans ajouter aucune constante au résultat.

2. Les équations du mouvement, telles que nous venons de les obtenir, ne peuvent être intégrées que par approximations successives. Mais, comme nous l'avons déjà indiqué dans l'Introduction, tandis qu'habituellement, dans la première approximation, on fait complètement abstraction des termes qui contiennent en facteur la masse perturbatrice, nous nous proposons, au contraire, de tenir compte dès le début d'une importante fraction de ces termes. Abandonnant, par suite, les équations simplifiées qui conduisent au mouvement elliptique, nous devons tout d'abord examiner comment nous formerons les équations qui représenteront la première approximation du mouvement, c'est-à-dire le mouvement dans l'orbite intermédiaire.

Il est donc nécessaire avant tout de nous occuper du développement de la fonction perturbatrice Ω et de ses dérivées partielles.

Le nombre des développements possibles pour ces fonctions est très grand, et chaque méthode proposée pour l'étude du problème des trois corps en demande un qui lui soit plus particulièrement approprié. Nous allons exposer brièvement, en n'en conservant que les points essentiels, la méthode donnée

par M. Gylden pour arriver au développement qui convient le mieux à la forme de l'équation de l'orbite intermédiaire.

3. En désignant par Δ la distance des deux corps (m) et (m') et par H l'angle des rayons vecteurs de ces deux corps, nous avons

$$\Omega = \mu' R \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos H.$$

Comme

$$rr' \cos H = xx' + yy' + zz',$$

il vient immédiatement

$$\cos H = \cos(\nu - \nu') \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta',$$

en outre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}}.$$

Introduisons deux nouvelles constantes α et α' , satisfaisant respectivement aux relations

$$n^2 \alpha^3 = \mu_1, \quad n'^2 \alpha'^3 = \mu'_1,$$

n' étant le moyen mouvement du corps troublant (m') et μ'_1 représentant la quantité $f(1 + m')$.

Ceci posé, nous pouvons développer $\frac{1}{\Delta}$ suivant les cosinus des multiples de l'angle H , par la formule suivante :

$$\frac{\alpha}{\Delta} = \frac{\alpha'}{r'} A_0 + 2 \left(\frac{\alpha'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{\alpha} \right) A_1 \cos H + 2 \left(\frac{\alpha'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 A_2 \cos 2H + \dots$$

Les coefficients de ce développement sont déterminés, comme on sait, en supposant $\frac{r}{r'} < 1$, et posant $\frac{\alpha}{\alpha'} = \alpha$, par la formule

$$A_n = \alpha^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} F\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, n + 1, \frac{r^2}{r'^2}\right),$$

la fonction F représentant la série connue sous le nom de *série hypergéométrique*.

Si nous développons maintenant les coefficients A , nous trouvons, par la

forme du développement de Ω ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu'} \alpha \Omega &= \mathbf{M}_0^{(0)} \frac{\alpha'}{r'} + \mathbf{M}_2^{(0)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \mathbf{M}_4^{(0)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^5 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \\ &+ 2 \left[\mathbf{M}_0^{(1)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right) + \mathbf{M}_2^{(1)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^4 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \mathbf{M}_4^{(1)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^6 \left(\frac{r}{a}\right)^5 + \dots \right] \cos \mathbf{H} \\ &+ 2 \left[\mathbf{M}_0^{(2)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \mathbf{M}_2^{(2)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^5 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \mathbf{M}_4^{(2)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^7 \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \dots \right] \cos 2 \mathbf{H} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Les coefficients, à l'exception toutefois de $\mathbf{M}_0^{(1)}$, sont déterminés par la formule générale suivante :

$$\mathbf{M}_{2p}^{(n)} = \alpha^{n+2p+1} \frac{1.3.5 \dots 2n+2p-1}{2.4.6 \dots 2n+2p} \frac{1.3 \dots 2p-1}{2.4 \dots 2p}.$$

Quant à la valeur de $\mathbf{M}_0^{(1)}$, c'est celle qu'on déduit de cette formule, diminuée de $\frac{\alpha}{2}$; c'est donc zéro.

Dans le cas où $\frac{r}{r'}$ est supérieur à l'unité, les coefficients des cosinus des multiples de \mathbf{H} devront être ordonnés par rapport aux puissances croissantes de $\frac{r'}{r}$; il en résultera des changements dans les calculs précédents et aussi dans ceux qui vont suivre. Il sera trop facile de les apercevoir pour que nous insistions davantage; aussi nous contenterons-nous de développer l'étude du cas considéré en premier lieu.

4. Dans le développement de Ω figurent les cosinus des multiples de l'angle \mathbf{H} ; ces cosinus se développeront sans aucune difficulté suivant les cosinus des multiples de l'angle $\nu - \nu'$; c'est une chose que nous supposons faite. Si nous calculons alors les dérivées partielles de Ω , nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} &= \frac{2 \alpha \mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(1)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \mathbf{M}_2^{(1)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^4 \left(\frac{r}{a}\right)^5 + \dots \right] \frac{\partial \cos \mathbf{H}}{\partial \nu} \\ &+ \frac{2 \alpha \mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(2)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \mathbf{M}_2^{(2)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^5 \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \dots \right] \frac{\partial \cos 2 \mathbf{H}}{\partial \nu} \\ &+ \frac{2 \alpha \mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(3)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^4 \left(\frac{r}{a}\right)^5 + \mathbf{M}_2^{(3)} \left(\frac{\alpha'}{r'}\right)^6 \left(\frac{r}{a}\right)^7 + \dots \right] \frac{\partial \cos 3 \mathbf{H}}{\partial \nu} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\mu_1 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^3 \theta \left[2 \mathbf{M}_2^{(0)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + 4 \mathbf{M}_4^{(0)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \dots \right] \\ &+ 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^3 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 3 \mathbf{M}_2^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \dots \right] \cos \mathbf{H} \\ &+ 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^3 \theta \left[2 \mathbf{M}_0^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + 4 \mathbf{M}_2^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \dots \right] \cos 2 \mathbf{H} \\ &+ 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^3 \theta \left[3 \mathbf{M}_0^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + 5 \mathbf{M}_2^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^6 \left(\frac{r}{a} \right)^6 + \dots \right] \cos 3 \mathbf{H} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} &= \frac{2a\mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \mathbf{M}_2^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \dots \right] \frac{\partial \cos \mathbf{H}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{2a\mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \mathbf{M}_2^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \left(\frac{r}{a} \right)^6 + \dots \right] \frac{\partial \cos 2 \mathbf{H}}{\partial \theta} \\ &+ \frac{2a\mu'}{h^2} \cos^2 \theta \left[\mathbf{M}_0^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \mathbf{M}_2^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^6 \left(\frac{r}{a} \right)^7 + \dots \right] \frac{\partial \cos 3 \mathbf{H}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

J'ajoute encore l'expression de la fonction $\frac{1}{\mu_1 u^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$, qui figure dans l'équation (4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1 u^2} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} &= 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^2 \theta \sin \theta \left[\mathbf{M}_0^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \mathbf{M}_2^{(1)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \dots \right] \frac{\partial \cos \mathbf{H}}{\partial \theta} \\ &+ 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^2 \theta \sin \theta \left[\mathbf{M}_0^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + \mathbf{M}_2^{(2)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 + \dots \right] \frac{\partial \cos 2 \mathbf{H}}{\partial \theta} \\ &+ 2 \frac{\mu'}{\mu_1} \cos^2 \theta \sin \theta \left[\mathbf{M}_0^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \mathbf{M}_2^{(3)} \left(\frac{a'}{r'} \right)^6 \left(\frac{r}{a} \right)^6 + \dots \right] \frac{\partial \cos 3 \mathbf{H}}{\partial \theta} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Dans ces fonctions nous remplacerons enfin, comme nous l'avons déjà fait, r , c'est-à-dire $\frac{1}{u \cos \theta}$ par $\frac{ap}{\cos \theta (1 + \rho)}$, en posant, pour simplifier, l'écriture

$$h^2 = \mu_1 ap,$$

de sorte que p est une constante arbitraire qui remplace h^2 .

Comme on le vérifie immédiatement, p ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre du carré de l'excentricité de la projection de l'orbite de (m) sur le plan des xy , tandis que ρ_1 , nous l'avons déjà dit, est de l'ordre de cette excentricité.

Nous ferons aussi $r' = \frac{a' p'}{(1 + \rho') \cos \theta'}$, l'analogie suffisant à préciser le sens des nouvelles quantités que nous introduisons et leur ordre de grandeur.

Si maintenant nous développons les puissances positives ou négatives de $\frac{r'}{a}$ et de $\frac{r'}{a'}$ suivant les puissances entières et positives de ρ et de ρ' , par la formule du binôme ; si, en outre, nous remplaçons $\sin \theta$ et $\cos \theta$ respectivement par $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, en développant $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ suivant les puissances de s (que nous supposons, comme ρ , une quantité du premier ordre) ; si nous faisons de même pour $\cos \theta'$ et $\sin \theta'$, et si enfin nous développons les cosinus des multiples de H et leurs dérivées partielles par rapport à θ et à ν suivant les cosinus ou sinus des multiples de $\nu - \nu'$, nous obtiendrons finalement les fonctions précédentes, qui sont celles mêmes qui figurent dans les équations du mouvement sous la forme de séries procédant suivant les puissances entières et positives de ρ , ρ' , s , s' (toutes quantités du premier ordre) et aussi suivant les sinus et cosinus de l'angle $\nu - \nu'$: le calcul n'offre manifestement aucune difficulté.

Nous nous bornerons à une seule remarque : la fonction $\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$ contient en facteur la dérivée $\frac{\partial \cos H}{\partial \theta}$, c'est-à-dire la fonction

$$- \sin \theta \cos \theta' \cos(\nu - \nu') + \cos \theta \sin \theta' ;$$

elle est donc du premier ordre par rapport à s et s' , c'est-à-dire qu'elle ne contient pas de termes indépendants à la fois de s et s' . On pourra d'ailleurs, dans la plupart des cas, prendre pour plan des xy le plan de l'orbite moyenne de (m') , de sorte que s' sera une quantité extrêmement petite ; la fonction considérée pourra donc être regardée comme contenant s en facteur, à des termes près d'influence négligeable, au moins dans une première approximation.

5. Si nous nous rappelons maintenant que, dans les équations du mouvement établies ci-dessus, la variable indépendante est la longitude ν de (m) comptée sur le plan fixe des xy , il en résulte que la question qui doit attirer notre attention consiste à rechercher comment on peut exprimer, à l'aide de cette variable, les diverses quantités qui figurent dans les dérivées partielles

de la fonction perturbatrice et qui dépendent de la loi du mouvement du corps troublant.

Notre but étant de déterminer une orbite intermédiaire et non le mouvement absolu de (m) , nous supposons qu'on puisse négliger l'action de (m) sur (m') , de sorte que nous regarderons comme parfaitement connu le mouvement de (m') ; les quantités ρ' qui déterminent ce mouvement seront supposées exprimées en fonction de la longitude φ' , et nous supposons connue la relation qui lie φ' au temps t .

La question consiste donc simplement à chercher l'expression de φ' en fonction de φ . Puisque nous connaissons la relation qui lie φ' et t , nous pouvons écrire

$$(5) \quad n't + l' = \varphi' + f(\varphi'),$$

l' étant la longitude moyenne de m' à l'origine du temps, et $f(\varphi')$ une fonction périodique connue de φ' ne contenant aucun terme constant.

Considérant maintenant t comme fonction de φ , nous avons, pour sa détermination, l'équation différentielle

$$\frac{d^2 t}{d\varphi^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{d\varphi} \frac{dt}{d\varphi} + u^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \frac{dt^3}{d\varphi^3} = 0.$$

Regardons t comme la somme de deux autres fonctions, l'une t_1 , qui sera déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 t_1}{d\varphi^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{d\varphi} \frac{dt_1}{d\varphi} = 0$$

ou mieux par la relation

$$\frac{dt_1}{d\varphi} = \frac{r}{hu^2};$$

l'autre t_2 , telle que $t = t_1 + t_2$ et par suite déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 t_2}{d\varphi^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{d\varphi} \frac{dt_2}{d\varphi} + u^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \left(\frac{r}{hu^2} + \frac{dt_2}{d\varphi} \right)^3 = 0;$$

t_2 sera d'ailleurs une petite quantité, de l'ordre de la masse perturbatrice.

Si l'on connaît en fonction de φ la valeur de u , on connaîtra aussi t_1 ; si donc nous appelons l la longitude de (m) à l'origine du temps, et que nous désignons par $F_1(\varphi)$ une fonction connue de φ qui, outre des termes pério-

diques, contiendra un terme proportionnel à ϱ dont le coefficient sera très voisin de l'unité, nous pourrons écrire la relation

$$nt + l = nt_2 + F_1(\varrho).$$

Appelons τ ce que devient t_2 quand on le diminue du terme constant et du terme proportionnel à ϱ qui y figurent; nous pouvons alors écrire la relation précédente sous la forme

$$(6) \quad nt + l = n\tau + \varrho + F(\varrho),$$

$F(\varrho)$ désignant une fonction de ϱ composée uniquement de termes périodiques sans terme constant; quant à l'équation qui détermine τ , elle est facile à former: ce sera, en désignant par k le coefficient du terme proportionnel à ϱ dans t_2 ,

$$\frac{d^2\tau}{d\varrho^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{d\varrho} \left(k + \frac{d\tau}{d\varrho} \right) + u^2 \frac{\partial\Omega}{d\varrho} \left(\frac{1}{hu^2} + k + \frac{d\tau}{d\varrho} \right)^3 = 0.$$

k est d'ailleurs une fonction connue de h , puisque, si nous désignons par $\varphi(h)$ le terme non périodique dans $\frac{1}{hu^2}$, nous devons avoir

$$k + \varphi(h) = \frac{1}{n}.$$

Cette constante h et aussi la constante l seront, par suite, déterminées en écrivant que la fonction τ fournie par l'équation précédente ne contient ni terme constant ni terme proportionnel à ϱ . En outre, les constantes arbitraires introduites par l'intégration de cette équation devront être choisies de façon que τ s'annule en faisant $\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho} = 0$.

Si, entre les deux relations (5) et (6), nous éliminons maintenant le temps t , nous tombons sur la relation qui lie ϱ à ϱ' , relation qui contient d'ailleurs la fonction τ : en appelant μ le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvements, cette relation s'écrit

$$\varrho' + f(\varrho') - l' = \mu\varrho + \mu F(\varrho) - \mu l + n'\tau.$$

En remarquant que $f(\varrho')$ est de l'ordre de ϱ' et $F(\varrho)$ de l'ordre de ϱ , on

arrivera facilement, par l'application de la formule de Lagrange, au développement de φ' en fonction de φ , développement dans lequel figurera τ .

En opérant les substitutions convenables, on ramènera finalement les équations du mouvement à ne contenir que les fonctions inconnues s , ρ et τ . Toutefois, et c'est là une des plus grandes difficultés du problème, ces fonctions ne figureront pas seulement sous forme finie ou par leurs dérivées. Elles figureront aussi sous le signe \int , et cela pour deux causes différentes qu'il est nécessaire d'indiquer : en premier lieu, par la présence, dans les équations qui déterminent s et ρ , de l'intégrale $\int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}$; en second lieu, par la présence de la fonction $F(\varphi)$, qui est égale à $\int \frac{dv}{hu^2}$, au terme près proportionnel à φ .

6. Ces considérations préliminaires succinctement indiquées, montrons maintenant comment nous formerons les équations destinées à fournir les éléments du mouvement en première approximation et comment aussi il faudra diriger les approximations successives.

En premier lieu, considérons l'équation qui détermine la tangente de la latitude s ; c'est

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s + \frac{1}{\left(1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}\right)} \left(\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{ds}{dv} - \frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Supposons qu'on ait remplacé toutes les quantités qui contiennent en facteur la masse perturbatrice par leurs développements, tels que nous les avons indiqués dans les numéros précédents (les quadratures impossibles à effectuer resteront d'ailleurs simplement indiquées); en ayant égard à la remarque déjà faite que $\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$ est du premier ordre par rapport à s ou s' , l'équation pourra s'écrire sous la forme

$$(7) \quad \frac{d^2 s}{dv^2} + S_1 \frac{ds}{dv} + S_2 s = S,$$

S , S_1 , S_2 désignant des fonctions des quantités inconnues, et S , qui ne contient aucun terme où s puisse se mettre en facteur, est du premier ordre par rapport à s' et contient d'ailleurs, comme S_1 , la masse perturbatrice en facteur.

L'équation qui déterminera la valeur de S en première approximation sera celle que l'on déduit de la précédente en y remplaçant les fonctions S ,

S_1, S_2 par leurs parties connues sans faire aucune hypothèse préalable sur la nature du mouvement (à la vérité, on en fait une, mais indispensable : la connaissance du moyen mouvement). Pour obtenir ces nouvelles fonctions, on voit qu'il suffira, dans les développements de S, S_1, S_2 , de supposer les quantités ρ, s et τ nulles : en particulier, la supposition de $\rho = 0$ nous montre immédiatement qu'il faudra aussi négliger la fonction désignée précédemment par $F(\nu)$, de sorte que la relation ν et ν' deviendra

$$\nu' + f(\nu') - \nu = \mu r - \mu l;$$

enfin, comme nous supposons $\rho = 0$ et $s = 0$, ceci revient à supposer $r = a$, et par suite à prendre pour valeur de la constante p l'unité.

En conséquence, nous nous trouvons en présence d'une équation de la même forme que (7), mais où les coefficients sont supposés des fonctions connues de ν ; il faut d'ailleurs avoir soin de remarquer que le coefficient de S a l'unité pour partie indépendante de la fonction perturbatrice. Nous montrerons dans les Chapitres suivants quelles sont les méthodes proposées par M. Gylden pour intégrer une telle équation.

Remarquons seulement, et ceci s'appliquera aux paragraphes suivants, que, une fois l'équation qui fournira cette première valeur de S formée, il ne sera pas nécessaire de tenir compte de tous ses termes : il est manifeste en effet qu'il n'y aura pas avantage à conserver des termes connus à la vérité, mais qui seraient d'un ordre de grandeur inférieur ou même comparable à ceux que l'on est obligé de négliger tout d'abord.

Disons tout de suite aussi que, dans les approximations suivantes, les équations qui détermineront successivement les valeurs de plus en plus approchées de S se présenteront toujours dans la même forme : pour former ces équations, il suffira en effet de remplacer dans les expressions générales des coefficients de l'équation (7) les quantités ρ, s et τ négligées tout d'abord par les valeurs approchées dont on sera actuellement en possession; la constante p sera aussi remplacée par sa valeur approchée.

7. La formation de l'équation en ρ est un peu moins simple que celle de l'équation en S . L'équation (4) (n° 1) peut s'écrire, quand on y remplace les dérivées partielles de la fonction perturbatrice par leurs développements, sous la forme

$$(8) \quad \frac{d^2\rho}{d\nu^2} + R_1 \frac{d\rho}{d\nu} + R_2 \rho = R,$$

R, R_1, R_2 étant des fonctions connues de ν , de ρ , s et τ ; en outre, R ne contient aucun terme où ρ puisse se mettre en facteur. s sera remplacé par sa valeur approchée en fonction de ν ; et dans la première approximation on fera $\tau = 0$: on fera de même $\rho = 0$ dans les fonctions R_1 et R_2 , et par suite, comme tout à l'heure, p sera pris égal à l'unité; comme tout à l'heure, enfin, remarquons que le coefficient R_2 de ρ devient égal à l'unité, quand on suppose la masse perturbatrice nulle.

R , nous l'avons dit, ne contient pas de terme où ρ puisse se mettre en facteur. Cependant, et c'est là ce qui rend la difficulté plus grande, R n'est pas indépendant de ρ ; il suffit en effet de se reporter à ce que nous avons dit à la fin du n° 5 pour vérifier que R renferme des termes de la forme

$$\int \rho^n \sin(\lambda \nu - A) d\nu,$$

n désignant un entier positif, λ et A des constantes. Pour être plus exact, il faudrait dire que R (et il en serait de même de la fonction S du numéro précédent) renferme des termes de la forme

$$\int \rho^n s^{n'} \nu^{n''} \sin(\lambda \nu - A) d\nu;$$

mais il est trop facile de vérifier que, quel que soit d'ailleurs le degré d'approximation auquel on est déjà arrivé, on pourra toujours dans ces termes remplacer s et τ par leurs valeurs approchées; on pourra aussi remplacer de la même façon ρ par une valeur approchée (zéro, lorsqu'il s'agit de la première approximation), lorsque n est supérieur à l'unité; mais il n'en va plus ainsi lorsque n est égal à l'unité, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de termes de la forme

$$\int \rho \sin(\lambda \nu - A) d\nu;$$

ces termes, dont le coefficient est d'ordre zéro (abstraction faite de la masse perturbatrice), ont une importance capitale et il est indispensable d'en tenir compte dès la première approximation : l'exemple que nous traitons plus loin mettra d'ailleurs ce fait en lumière d'une façon bien digne d'attirer l'attention.

Voici la méthode qu'emploie M. Gylden, pour transformer ces termes et tenir compte de leur partie la plus importante : l'équation précédente peut être résolue par rapport à ρ et fournir ainsi une valeur de ρ telle que

$$\rho = R' \frac{d^2 \rho}{d\nu^2} + R_1' \frac{d\rho}{d\nu} + R_2'.$$

Si nous portons cette valeur de ρ dans $\int \rho \sin(\lambda v - A) dv$, nous obtenons, pour exprimer cette intégrale, une somme d'intégrales nouvelles rentrant dans les formes suivantes (si toutefois on ne porte son attention que sur celles qui seront par rapport à ρ d'un ordre inférieur au second, les autres, nous l'avons déjà dit, pouvant être évaluées par approximation sans aucun inconvénient) :

$$\int \frac{d^2 \rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A) dv, \quad \int \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A) dv, \quad \int \rho \sin(\lambda v - A) dv, \\ \int \sin(\lambda v - A) dv, \quad \int \sin(\lambda v - A) dv \int \rho \sin(\lambda' v - A') dv.$$

On remarquera d'ailleurs que, dans ces intégrales, les constantes λ et A peuvent avoir des significations absolument différentes de celles qu'elles ont dans le terme à transformer; elles servent seulement à caractériser un type de fonctions.

En outre, il ne faudra pas oublier que les coefficients de tous ces termes se trouveront contenir la masse perturbatrice en facteur, sauf une partie de ceux de la forme $\int \sin(\lambda v - A) dv$, qui seront d'ailleurs du second ordre par rapport à S^2 , et un autre, le plus important de tous, savoir

$$\int \frac{d^2 \rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A) dv;$$

la fonction R'_0 ne diffère, en effet, de l'unité que d'une quantité de l'ordre de la masse perturbatrice. Comme le terme à transformer ne figure lui-même dans l'équation (8) que multiplié par la masse perturbatrice, il en résulte que, à part les termes que nous venons de signaler, les autres seront du second ordre par rapport à cette masse et pourront être négligés, en partie du moins.

Or l'intégration par parties conduit à la relation

$$\int \frac{d^2 \rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A) dv = \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A) - \lambda \rho \cos(\lambda v - A) + C_2 - \lambda^2 \int \rho \sin(\lambda v - A) dv,$$

C_2 désignant une quantité constante qui, puisque les intégrales sont effectuées sans l'addition d'aucune constante arbitraire, est égale au terme non périodique dans la fonction $\lambda \rho \cos(\lambda v - A) - \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A)$.

De même on a

$$\int \frac{d\rho}{d\nu} \sin(\lambda\nu - A) d\nu = \rho \sin(\lambda\nu - A) + C_1 - \lambda \int \rho \cos(\lambda\nu - A) d\nu,$$

C_1 étant une constante; et aussi

$$\begin{aligned} \int \sin(\lambda\nu - A) d\nu \int \rho \sin(\lambda'\nu - A') d\nu \\ = C_0 - \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda\nu - A) \int \rho \sin(\lambda'\nu - A') d\nu + \frac{1}{\lambda} \int \rho \cos(\lambda\nu - A) \sin(\lambda'\nu - A') d\nu. \end{aligned}$$

C_0 étant encore une constante.

Par suite, le terme à transformer $\int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu = A_0 + A_1 \frac{d\rho}{d\nu} + A_2 \frac{d^2\rho}{d\nu^2} \\ + \alpha \int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu + \Sigma B \int \rho \sin(\lambda'\nu - A') d\nu; \end{aligned}$$

dans cette formule A_1 , A_2 , α sont des fonctions connues; le dernier symbole représente une somme de termes qu'on se contentera de remplacer par des valeurs approchées; et enfin A_0 est une fonction en partie connue, en partie inconnue, puisqu'elle dépend des constantes C_0 , C_1 , C_2 qui sont inconnues; ces constantes seront aussi remplacées à chaque approximation nouvelle par leurs valeurs déterminées par l'approximation précédente.

Ces substitutions faites, l'équation précédente sera résolue par rapport à $\int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu$, et la valeur obtenue sera portée dans l'équation (8), qui détermine ρ . Nous n'avons parlé que de la transformation des termes tels que $\int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu$; il se présente aussi, provenant de la fonction $F(\nu)$, un terme de la forme $\int \rho d\nu$; il est clair que la même méthode s'appliquera à sa transformation.

Le même calcul répété à chaque approximation nouvelle, en tenant compte des valeurs obtenues dans l'approximation précédente par les quantités inconnues et les constantes indéterminées, conduira toujours manifestement à des équations de la même forme, forme qui est aussi celle des équations qui déterminent la tangente de la latitude s ,

$$(9) \quad \frac{d^2\rho}{d\nu^2} + R_1 \frac{d\rho}{d\nu} + R_2\rho = R,$$

R , R_1 , R_2 désignant des fonctions connues de ν , et R_2 devenant égal à l'unité, quand on suppose la masse perturbatrice nulle.

8. Arrivons enfin à la détermination de l'équation en τ , soit

$$(10) \quad \frac{d^2\tau}{d\nu^2} + \frac{2}{u} \frac{du}{d\nu} \left(k + \frac{d\tau}{d\nu} \right) + u^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\nu} \left(\frac{1}{hu^2} + k + \frac{d\tau}{d\nu} \right)^3 = 0;$$

comme nous l'avons dit, k est une fonction connue de h , et l'intégration doit être effectuée de façon que τ ne contienne ni terme constant ni terme proportionnel à ν .

Dans cette équation, τ figure sous forme finie dans les termes de la forme $\cos(\lambda\nu + q\tau - A)$, q étant un entier; ces termes s'écriront

$$\cos q\tau \cos(\lambda\nu - A) - \sin q\tau \sin(\lambda\nu - A),$$

et $\sin q\tau$ et $\cos q\tau$ seront développés en séries suivant les puissances de τ ; alors, en remplaçant ρ et s par des valeurs approchées déjà déterminées, l'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$(11) \quad \frac{d^2\tau}{d\nu^2} + \frac{d\tau}{d\nu} T_1 + T_2 \tau = T,$$

les fonctions T , T_1 , T_2 étant toutes trois des fonctions connues de ν et des constantes l et h , T_1 et T_2 contenant, en outre, les quantités inconnues $\frac{d\tau}{d\nu}$ et τ ; dans la première approximation, on fera ces quantités égales à zéro dans ces fonctions; dans les approximations suivantes, on les remplacera par leurs valeurs approchées déjà connues.

On aura donc toujours affaire à des équations du type (11), les symboles T , T_1 , T_2 représentant des fonctions connues de ν .

Cette équation (11) rentre, à plusieurs points de vue, dans une classe différente du type commun à (7) et à (9); la raison en est de ce que T_2 , le coefficient de τ , est de l'ordre de la masse perturbatrice, tandis que, dans les équations précédentes, les fonctions correspondantes S_2 et T_2 se réduisaient à l'unité pour $m' = 0$; de plus, T_1 est de l'ordre de ρ , et non pas, comme S_1 et R_1 , de l'ordre de la fonction perturbatrice. Enfin il faut remarquer que, si l'on y fait partout $\tau = 0$, sans y remplacer d'ailleurs $\frac{d\tau}{d\nu}$ par une valeur approchée, l'équation (11) devient intégrable; en se reportant aux numéros précédents, on voit en effet, immédiatement, que, dans

cette hypothèse, on a

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{hu^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}}} - 1 \right) - k.$$

Il résulte de là que, dans la plupart des cas, on pourra se contenter d'intégrer l'équation (11) de cette façon, par approximations successives ou, plus simplement, ce qui revient au même, de calculer, conformément à la théorie ordinaire, le temps par la formule

$$(12) \quad dt = \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}}},$$

les diverses quantités inconnues qui figurent dans cette formule étant remplacées par leurs valeurs de plus en plus approchées.

Toutefois il sera préférable de recourir à l'équation (11), telle que nous l'avons écrite, lorsque, dans $\frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{1}{h^2 u^2}$, figureront des termes de la forme $\cos(\lambda v - A)$, λ étant très petit, c'est-à-dire lorsqu'on craindra l'introduction par la formule (12) de petits diviseurs d'intégration.

Cependant on pourra profiter de l'avantage offert par l'équation (11) de s'intégrer sans difficulté lorsqu'on y néglige le terme $T_2 \tau$; à cet effet, posant

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2,$$

nous déterminerons respectivement ces trois nouvelles quantités par les équations

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \tau_0}{dv^2} + T_1 \frac{d\tau_0}{dv} = T, \\ \frac{d^2 \tau_1}{dv^2} + T_2 \tau_1 = -\tau_0 T_2, \\ \frac{d^2 \tau_2}{dv^2} + T_1 \frac{d\tau_2}{dv} + T_2 \tau_2 = -\frac{d\tau_1}{dv} T_1. \end{cases}$$

La première de ces équations, linéaire et du premier ordre par rapport à $\frac{d\tau}{dv}$, s'intègre immédiatement; la seconde, l'équation (13), fera l'objet d'une étude spéciale avec les équations (7) et (9); enfin, pour intégrer la dernière, on remarquera que τ_2 est une quantité très petite, puisque l'on

peut regarder τ_0 et τ_1 comme représentant à très peu près les fractions de τ dues respectivement à l'influence des fonctions T_1 et T_2 , et qu'on a aussi tenu compte du second membre T . On pourra donc employer les méthodes ordinaires, dont l'usage est rendu légitime par la petitesse de τ_2 ; on obtiendra, par exemple, une valeur approchée de τ_2 en faisant abstraction du terme $T_2\tau_2$; en portant cette valeur dans ce même terme et intégrant de nouveau, on obtiendra une nouvelle valeur plus approchée, et ainsi de suite.

En résumé, nos efforts doivent se porter maintenant sur les méthodes d'intégration propres aux équations (7) et (9). d'une part, à l'équation (13) de l'autre; celle-ci ne différant des deux premières qu'en ce que le coefficient de la dérivée première de la fonction inconnue est nul et que le coefficient de la fonction inconnue elle-même se réduit à zéro et non à l'unité, lorsque l'on suppose $m' = 0$.

9. Afin d'élucider le plus possible les développements précédents, nous allons montrer, dès maintenant, comment on formera les équations du mouvement de la Lune; comment, en particulier, il faudra former les équations de l'orbite intermédiaire, c'est-à-dire de l'orbite que nous substituons à l'ellipse de Kepler comme base des approximations successives.

A la vérité, Laplace déjà avait rejeté, dans sa Théorie de la Lune, l'ellipse de Kepler proprement dite comme première approximation: il introduit en effet, dès le début du calcul, les mouvements séculaires du nœud et du périhélie de l'orbite lunaire, sous forme de quantités indéterminées il est vrai, mais que des considérations accessoires permettent cependant de déterminer.

Ce procédé empirique était rendu nécessaire par les circonstances particulières qui se rencontrent dans l'étude du mouvement de la Lune; la théorie ordinaire des perturbations fournit en première approximation pour le mouvement du périhélie un nombre qui est moitié du véritable, et les approximations successives basées sur ce point de départ sont loin de converger rapidement. Nous verrons au contraire que, sans faire aucune autre hypothèse que la connaissance des moyens mouvements du Soleil et de la Lune et, ce qui est le plus digne de remarque, sans faire aucune hypothèse préalable sur la forme des quantités inconnues, nous arriverons, dès la première approximation, à représenter le mouvement de la Lune d'une façon très approchée; sans insister davantage sur ce point, qui nous occu-

pera spécialement à la fin de ce travail, disons seulement que les principales inégalités : l'équation du centre, l'évection, la variation, l'équation annuelle, figureront dans l'orbite intermédiaire que nous déterminerons d'une façon suffisamment approchée pour nous rendre compte de leur importance et de leur ordre de grandeur, et que, en particulier, les mouvements séculaires du nœud et du périégée se trouveront déterminés avec une approximation considérable.

La question de l'orbite intermédiaire de la Lune a été déjà traitée par M. Gylden ⁽¹⁾ et par M. A. Shdanow ⁽²⁾. M. Gylden, dans une première approximation, détermine le mouvement du périégée à moins de $\frac{1}{15}$ de sa valeur. M. Shdanow, dans un Mémoire remarquable, fait, en partant des résultats de M. Gylden, une deuxième approximation qui le conduit à une valeur du mouvement du périégée lunaire ne différant pas de la véritable de sa $\frac{1}{650}$ partie, et à une valeur du mouvement du nœud de l'orbite qui n'est pas en erreur de sa $\frac{1}{1000}$ partie.

Il nous a paru intéressant de reprendre la même question en partant, non plus des équations de Hansen, comme le font ces éminents astronomes, mais des équations de Laplace. La méthode d'intégration reste la même, mais la direction du calcul est un peu modifiée et les nombres qui servent de base sont changés; tandis, en effet, que par moyen mouvement de la Lune nous entendons ici le moyen mouvement sidéral, M. Gylden et M. Shdanow entendent le moyen mouvement anomalistique : aussi nos résultats ne seront-ils pas directement comparables à ceux de Hansen, mais, au contraire à ceux de Laplace.

10. Si nous prenons le plan de l'écliptique moyen pour plan des xy , nous pouvons supposer nulle la latitude du Soleil et faire, par suite, $s' = 0$; en outre, nous regarderons, comme on le fait d'habitude, le rapport μ des moyens mouvements du Soleil et de la Lune comme une quantité du premier ordre, ainsi que ρ , ρ' et s ; enfin, si nous négligeons la masse de la Terre à côté de celle du Soleil, nous aurons

$$\mu' = \mu'_1 = n'^2 a'^3 \quad \text{avec} \quad h^2 = \mu_1 a p = n^2 a^4 p.$$

⁽¹⁾ *Die intermediäre Bahn des Mondes* (*Acta mathematica*, 7 : 2).

⁽²⁾ *Recherches sur le mouvement de la Lune autour de la Terre d'après la théorie de M. Gylden*; Stockholm, 1885.

Si nous nous bornons, dans le développement des dérivées partielles de Ω , aux termes d'ordre inférieur au quatrième, et si nous remarquons que

$$\cos \mathbf{H} = \cos \theta \cos(\nu - \nu'),$$

et par suite

$$\cos 2 \mathbf{H} = \cos^2 \theta \cos 2(\nu - \nu') - \sin^2 \theta,$$

nous obtenons immédiatement, pour les expressions de ces fonctions,

$$\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} = -\frac{3}{2} \mu^2 \cos^4 \theta \frac{1}{p} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \sin 2(\nu - \nu'),$$

ou

$$\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} = -\frac{3}{2} \mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1 + \rho')^3}{(1 + \rho)^4} \sin 2(\nu - \nu'),$$

puis

$$\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} \mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1 + \rho')^3}{(1 + \rho)^4} s[1 + \cos 2(\nu - \nu')];$$

enfin

$$\frac{1}{\mu_1 u^2} \left(\cos \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1 + \rho')^3}{(1 + \rho)^3} [1 + 3 \cos 2(\nu - \nu')].$$

D'ailleurs on a, avec une approximation suffisante,

$$\rho' = \varepsilon' \cos(c' \nu' - \varpi'),$$

ε' désignant l'excentricité de l'orbite terrestre; c' un coefficient très voisin de l'unité; ϖ' la longitude du périhélie solaire à l'origine du temps.

Il faut encore exprimer ν' en fonction de ν ; en confondant, pour effectuer ce calcul qui ne peut se faire que par approximation, t avec t_1 , on a

$$dt = \frac{d\nu}{u^2 h},$$

ou bien

$$n dt = \frac{p^{\frac{3}{2}} d\nu}{(1 + \rho)^2}.$$

La constante p , nous l'avons déjà dit, ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre de ρ^2 . Si donc, dans le calcul qui nous occupe, nous négligeons les quantités de cet ordre (ce qui concorde avec ce que nous avons convenu plus haut, savoir de négliger dans les dérivées de Ω les quantités d'ordre supérieur au troisième), nous pouvons écrire

$$nt + l = \nu - 2f\rho d\nu.$$

De la même façon nous aurons au même degré d'approximation

$$n't + l' = v' - 2 \int \rho' dv';$$

de ces formules on tire immédiatement la suivante

$$2(v - v') = 2(1 - \mu)v - (2l' - 2\mu l) - 4 \int \rho' dv' + 4\mu \int \rho dv,$$

ce que nous écrivons

$$2(v - v') = \lambda v - A - 4 \int \rho' dv' + 4\mu \int \rho dv,$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$\lambda = 2(1 - \mu), \quad A = 2l' - 2\mu l.$$

On peut encore remarquer que le dernier terme, dans la formule précédente, étant du second ordre, nous pouvons le négliger, d'après nos conventions : quant à l'avant-dernier terme, $- 4 \int \rho' dv'$, il est du premier ordre, et nous le désignerons par E, de sorte que nous aurons la formule simple

$$2(v - v') = \lambda v - A + E.$$

11. Nous pouvons maintenant former avec la plus grande facilité les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune. Considérons d'abord l'équation qui détermine s : en ne conservant que les termes d'un ordre inférieur au quatrième, on voit immédiatement que le dénominateur $1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}$ peut être réduit à l'unité, de sorte que l'équation devient

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s - \frac{3}{2} \mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1 + \rho')^3}{(1 + \rho)^4} \left\{ \frac{ds}{dv} \sin 2(v - v') - s[1 + \cos 2(v - v')] \right\} = 0.$$

L'angle $2(v - v')$ peut être réduit à $\lambda v - A$; on peut négliger ρ et ρ' et réduire p et p' à l'unité : finalement, au degré d'approximation imposé, il vient

$$(14) \quad \frac{d^2 s}{dv^2} - \frac{3}{2} \mu^2 \sin(\lambda v - A) \frac{ds}{dv} + s \left[1 + \frac{3}{2} \mu^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \cos(\lambda v - A) \right] = 0.$$

Arrivons maintenant à la détermination de ρ : en négligeant dès maintenant les termes qui sont manifestement du quatrième ordre, l'équation peut s'écrire, en la calquant sur l'équation (4),

$$\frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho + 1 - \cos^3 \theta + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{1}{h^2 u^2} \frac{d\rho}{dv} + \frac{1}{\mu_1 u^2} \left(\cos \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = 0.$$

D'ailleurs $1 - \cos^3 \theta$ se remplacera par $\frac{3}{2}s^2$, et l'on substituera, dans ce terme, à s sa valeur déterminée par l'équation précédente; on voit aussi que l'on peut négliger la fonction E dans le coefficient de $\frac{d\rho}{dv}$: l'équation devient donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dv^2} - \frac{3}{2}\mu^2 \sin(\lambda v - A) \frac{d\rho}{dv} + \rho + \frac{1}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3} [1 + 3 \cos(\lambda v - A + E)] \\ + \frac{3}{2}s^2 - 3\mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \int \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4} \sin(\lambda v - A + E) dv = 0; \end{aligned}$$

p et p' seront réduits à l'unité. Considérons le terme

$$\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3} [1 + 3 \cos(\lambda v - A + E)].$$

L'approximation doit y être poussée jusqu'au premier ordre inclusivement; il devient, par suite,

$$(1 - 3\rho + 3\rho')[1 + 3 \cos(\lambda v - A)] - 3E \sin(\lambda v - A);$$

il en sera de même pour le terme $\int \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4} \sin(\lambda v - A + E) dv$, qui devient, par suite,

$$f[(1 - 4\rho + 3\rho') \sin(\lambda v - A) dv + E \cos(\lambda v - A) dv].$$

Le seul terme que nous ayons à transformer sera, par conséquent, $\int \rho \sin(\lambda v - A) dv$, les autres s'intégrant immédiatement: le coefficient de ce terme dans l'équation est d'ailleurs du second ordre; or l'équation nous montre précisément que, à des termes du second ordre près, on a $\rho = -\frac{d^2\rho}{dv^2}$; nous pouvons donc nous contenter de remplacer le terme en question par $-\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A) dv$, c'est-à-dire, en se reportant à ce qui a été dit plus haut, par

$$-\frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A) + \lambda\rho \cos(\lambda v - A) + \lambda^2 \int \rho \sin(\lambda v - A) dv + C_2,$$

C_2 étant une constante dont nous avons expliqué la signification et que nous négligeons en première approximation. En égalant l'expression précédente à $\int \rho \sin(\lambda v - A) dv$ et résolvant par rapport à ces termes, il vient finale-

ment

$$\int \rho \sin(\lambda v - A) dv = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin(\lambda v - A) \frac{d\rho}{dv} - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos(\lambda v - A) \rho.$$

L'équation devient donc définitivement

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \left(\frac{12\mu^2}{\lambda^2 - 1} - \frac{3}{2}\mu^2 \right) \sin(\lambda v - A) \frac{d\rho}{dv} \\ & + \rho \left[1 - \frac{3}{2}\mu^2 - \left(\frac{9}{2}\mu^2 + \frac{12\lambda\mu^2}{\lambda^2 - 1} \right) \cos(\lambda v - A) \right] \\ & = -\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\mu^2(1 + 3\rho') [1 + 3 \cos(\lambda v - A)] - \frac{3}{2}\mu^2 E \sin(\lambda v - A) \\ & + 3\mu^2 f(1 + 3\rho') \sin(\lambda v - A) dv + 3\mu^2 f E \cos(\lambda v - A) dv. \end{aligned} \right.$$

Le second membre tout entier est une fonction de v , que l'on obtient sans aucune difficulté sous forme entièrement explicite.

Quant au temps, on pourra sans inconvénient faire ici usage, pour le calculer, de la formule (12), savoir

$$dt = \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}}}.$$

La constante h sera déterminée de façon que le coefficient du terme proportionnel à v dans l'expression de t soit égal à $\frac{1}{n}$.

CHAPITRE II.

12. Les équations générales établies dans le Chapitre précédent fournissent la solution approchée du problème des trois corps : toutefois, en donnant à la fonction perturbatrice Ω une signification différente de celle que nous lui avons attribuée jusqu'ici, on peut les envisager comme résolvant un grand nombre d'autres problèmes sur l'attraction, susceptibles, pour la plupart, de se rencontrer dans l'étude du système du monde; en particulier, nous pouvons supposer que Ω soit fonction simplement du rayon vecteur r , et c'est ce cas particulier, dont l'analyse a été faite complètement

par M. Gyldén, que nous allons traiter maintenant, avant d'entreprendre l'étude des méthodes d'intégration propre aux équations (7), (9) et (13).

Dans l'hypothèse actuelle, le mouvement de (m) s'effectue dans un plan, et si ce plan est pris pour plan des x, y , de sorte que θ et s soient constamment nuls, les équations du mouvement deviennent

$$dt = \frac{dv}{hu^2}, \quad \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{\mu_1}{h^2} + \frac{1}{h^2u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0$$

avec la relation

$$u = \frac{1}{r}.$$

Si nous posons $\frac{1}{hu^2} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = P$, P sera, comme Ω , une simple fonction de l'unique variable r ou u .

Nous devons tout d'abord, avant de supposer que P soit une fonction quelconque de r , signaler quelques cas particuliers intéressants. Le premier, considéré déjà par Newton et rappelé par M. Thiele (*Astronomische Nachrichten*, n° 2429), se présente lorsqu'on fait $P = \frac{k}{r} + k'$, k et k' désignant des constantes; le résultat auquel conduit cette hypothèse est bien connu: l'orbite correspondante est une section conique dont le foyer est à l'origine, mais dont le grand axe tourne autour de ce foyer avec une vitesse angulaire constante.

Si nous supposons maintenant, comme le fait M. Gyldén, que la fonction P soit de la forme hr^3 ou $\frac{h}{r^2}$, h désignant une constante, on voit tout de suite que l'intégration de l'équation précédente est possible à l'aide des fonctions elliptiques, et, plus généralement, on arrivera au même résultat, comme le fait remarquer M. Thiele dans l'article déjà cité, en supposant à P l'une des formes

$$h + \frac{k}{r} + ar^3 + br^2,$$

$$h + \frac{k}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}.$$

Sans développer la solution donnée par M. Gyldén des deux cas que nous venons de signaler (¹), indiquons seulement comment on les rencontre en

(¹) *Ueber die Bahn eines materiellen Punktes der sich unter dem Einflusse einer*

Astronomie. Si nous imaginons en premier lieu qu'il s'agisse du problème des trois corps proprement dit, on conçoit qu'il puisse y avoir avantage, en supposant toujours $s = 0$, à négliger complètement, dans une première approximation, $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ et $\frac{\partial \Omega}{\partial s}$, et à ne conserver, dans $\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, que le seul terme $\frac{2\mu'}{h^2} M_2^{(0)} \left(\frac{r}{a}\right)^3$; dans cette hypothèse, nous nous trouvons précisément dans le premier cas : ceci suppose d'ailleurs le rapport $\frac{r}{a}$ constamment inférieur à l'unité. Dans le cas où ce rapport serait, au contraire, constamment supérieur à l'unité, on verrait immédiatement qu'une hypothèse analogue conduit au second cas.

Le premier cas se rencontre encore dans la détermination de l'orbite intermédiaire d'une comète qui passe à proximité d'une planète; c'est lui aussi qui fournit la solution du problème qui consiste à rechercher le mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale dont l'expression est de la forme $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$, problème important dans l'étude de la formation de l'univers, comme le montrent les récents travaux de M. Faye.

Enfin, de la solution du second cas, on déduit la nature du mouvement d'un point matériel attiré par un sphéroïde suivant la loi de Newton et mobile dans le plan de l'équateur de ce sphéroïde : cette question est d'une grande importance dans l'étude des perturbations des satellites, en particulier de ceux de Jupiter et de Saturne.

13. Revenons maintenant au cas général, dans lequel P est une fonction quelconque de r . En posant

$$u = (1 + \rho) \frac{\mu_1}{h^2},$$

l'équation du numéro précédent devient

$$\frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho = - \frac{1}{\mu_1 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$ bewegt (Kong. svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bandet 17. — Om banan af en Punkt, som rör sig, en Sferoids equatorsplan under inverkan af den Newtonska attraktionskraften (Ofversigt af Kong. Vet. Akad. Förhandlingar, 1880). — Ueber die intermediäre Bahnen der Cometen in der Nähe... (Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, 1884).

développons le second membre suivant les puissances de ρ , qui est une petite quantité de l'ordre de l'excentricité; nous nous trouvons alors en présence d'une équation de la forme suivante

$$(1) \quad \frac{d^2 \rho}{d\nu^2} + \rho = \beta_0 + \beta_1 \rho + \beta_2 \rho^2 + \dots,$$

les coefficients β étant tous de l'ordre de la force perturbatrice.

Cette équation ne peut être intégrée directement, il faut procéder par approximations successives; le but à atteindre est donc de trouver une première valeur ρ_0 de l'inconnue, fournissant une suite vraiment convergente d'approximations et, par conséquent, telle que la différence entre ρ et ρ_0 soit et reste toujours très petite par rapport à ρ_0 . Comme l'a fait remarquer M. Weierstrass, dans ses Leçons, il y a quelques années, il est tout d'abord indispensable, pour obtenir ce résultat, d'éviter l'introduction des termes séculaires, c'est-à-dire des termes qui contiennent l'argument ν à une certaine puissance en dehors des signes des fonctions périodiques. Il est clair, en effet, que si ces termes se présentent, ils formeront dans l'expression de ρ une série ordonnée suivant les puissances de ν , les coefficients pouvant d'ailleurs être des fonctions périodiques de ce même argument ν , et tant qu'on n'aura pas prouvé la convergence de cette série pour toutes les valeurs de cet argument, ce qui est impossible en général, la solution ainsi obtenue devra être rejetée.

Dans la solution habituelle du problème, on néglige d'abord le second membre tout entier de l'équation (1), et l'équation qui détermine ρ_0 étant

$$(2) \quad \frac{d^2 \rho_0}{d\nu^2} + \rho_0 = 0,$$

il vient

$$\rho_0 = e \cos(\nu - \varpi),$$

e et ϖ étant deux constantes arbitraires.

Si nous posons

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

il vient, pour déterminer ρ_1 ,

$$(3) \quad \frac{d^2 \rho_1}{d\nu^2} + \rho_1 = \beta_0 + \beta_1 \rho_0 + \beta_2 \rho_0^2 + \dots + \rho_1 (\beta_1 + 2\beta_2 \rho_0 + 3\beta_3 \rho_0^2 + \dots) + \dots$$

Quoique le second membre tout entier soit du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice, il n'en sera pas de même de ρ_1 pour toutes les valeurs de r (¹). En effet, si en premier lieu nous négligeons le second membre, à l'exception du seul terme $\beta_1 \rho_0$, on aperçoit immédiatement que l'expression de ρ_1 contiendra un terme multiplié par l'argument ν et susceptible, par conséquent, de devenir aussi grand qu'on voudra. Mais on pourrait penser que cet inconvénient provient de ce que nous n'avons tenu compte que d'un seul des termes du second membre qui sont multipliés par β_1 . Si nous ne négligeons aucun de ces termes, l'équation (3) devient

$$(4) \quad \frac{d^2 \rho_1}{d\nu^2} + (1 - \beta_1) \rho_1 = \beta_1 \rho_0,$$

et il est aisé alors de se convaincre que la valeur de ρ_1 tirée de cette équation contient des termes exactement comparables à ρ_0 .

D'ailleurs, intégrer successivement les équations (2) et (4) revient à choisir comme première valeur approchée de ρ la quantité ρ_0 fournie par l'intégration de la nouvelle équation

$$(5) \quad \frac{d^2 \rho_0}{d\nu^2} + (1 - \beta_1) \rho_0 = 0.$$

Alors, en posant toujours

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

il vient, pour déterminer ρ_1 ,

$$(6) \quad \frac{d^2 \rho_1}{d\nu^2} + (1 - \beta_1) \rho_1 = \beta_0 + \beta_2 \rho_0^2 + \beta_3 \rho_0^3 + \dots + (2\beta_2 \rho_0 + 3\beta_3 \rho_0^2 + \dots) \rho_1 + \dots$$

De l'équation (5), en posant

$$\lambda = \sqrt{1 - \beta_1},$$

on tire

$$\rho_0 = e \cos(\lambda \nu - \varpi)$$

et l'équation (6) donne, en désignant par Z le second membre,

$$\rho_1 = -\frac{1}{\lambda} \cos \lambda \nu \int Z \sin \lambda \nu d\nu + \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \nu \int Z \cos \lambda \nu d\nu.$$

(¹) GYLDEN, *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft*, 16.

Or, si pour Z nous choisissons le terme $\beta_3 \rho_0^3$, il vient

$$Z = \beta_3 e^3 \cos^3(\lambda \nu - \varpi) = \frac{3}{4} \beta_3 e^3 \cos(\lambda \nu - \varpi) + \frac{1}{4} \beta_3 e^3 \cos 3(\lambda \nu - \varpi),$$

et il est manifeste que la substitution de cette expression dans la valeur de ρ_1 , introduira, grâce à la présence du terme en $\cos(\lambda \nu - \varpi)$, des termes qui contiendront l'argument ν en dehors des signes sinus et cosinus, c'est-à-dire des termes séculaires.

Comme tout à l'heure toutefois, on aurait pu éviter l'introduction de ces termes de la façon suivante : dans l'équation (6), ayons égard au terme $3\beta_3 \rho_0^2 \rho_1$, ou plutôt à la partie de ce terme qui ne contient pas explicitement ν , c'est-à-dire $\frac{3}{2} \beta_3 e^2 \rho_1$, et déterminons ρ_1 par l'équation

$$(7) \quad \frac{d^2 \rho_1}{d\nu^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{2} \beta_3 e^2\right) \rho_1 = \frac{3}{4} \beta_3 e^3 \cos(\lambda \nu - \varpi);$$

il n'est pas difficile alors de s'assurer que ρ_1 contiendra des termes de même ordre que la quantité ρ_0 : c'est un calcul trop aisé pour qu'il soit nécessaire d'insister davantage.

14. L'équation (5) est donc insuffisante pour conduire à la vraie solution du problème : il faut au second membre de l'équation (1) choisir un terme de plus, et par suite ne plus se contenter d'avoir affaire à une équation linéaire : tel est, dans ce cas particulier, le grand progrès réalisé par M. Gylden.

Comme la suite des calculs le montrera, il n'y a pas d'avantage réel à tenir compte dès le début des termes qui contiennent les puissances paires de ρ . Si donc nous voulons rester en état d'effectuer l'intégration à l'aide de fonctions transcendentes suffisamment connues, on voit que la seule équation qui pourra nous servir de point de départ sera

$$\frac{d^2 \rho_0}{d\nu^2} + (1 - \beta_1) \rho_0 - \beta_3 \rho_0^3 = 0.$$

On en tire

$$\left(\frac{d\rho_0}{d\nu}\right)^2 = g^2 - (1 - \beta_1) \rho_0^2 + \frac{1}{2} \beta_3 \rho_0^4,$$

g^2 étant une constante d'intégration.

On peut écrire

$$\left(\frac{d\rho_0}{d\nu}\right)^2 = g^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{e^2}\right) \left(1 - k^2 \frac{\rho_0^2}{e^2}\right)$$

en déterminant e et k par les relations

$$\frac{e^2}{e^2} (1 + k^2) = 1 - \beta_1,$$

$$\frac{e^2}{e^4} k^2 = \frac{1}{2} \beta_3.$$

Si nous faisons en outre

$$x = \frac{e}{e} v + x_0,$$

x_0 étant une constante arbitraire, il vient immédiatement

$$\rho_0 = e \operatorname{sn} x \pmod{k}.$$

Si d'ailleurs on pose

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

on aura pour déterminer ρ' l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho'}{dv^2} + (1 - \beta_1) \rho' &= \beta_0 + \beta_2 \rho_0^2 + \beta_4 \rho_0^4 + \beta_6 \rho_0^6 + \dots + \rho' (2\beta_2 \rho_0 + 3\beta_3 \rho_0^3 + 4\beta_4 \rho_0^5 + \dots) \\ &+ \rho'^2 (\beta_2 + 3\beta_3 \rho_0 + 6\beta_4 \rho_0^2 + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire encore

$$\frac{d^2 \rho'}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3 \rho_0^2) \rho' = \beta'_0 + \beta'_1 \rho' + \beta'_2 \rho'^2 + \dots,$$

les coefficients β' ne dépendant pas de ρ' .

Cela étant, continuons l'application du même procédé; posant

$$\rho' = \rho_1 + \rho'',$$

nous déterminerons ρ_1 par l'équation

$$\frac{d^2 \rho_1}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3 \rho_0^2) \rho_1 = \beta'_0.$$

Il restera alors pour déterminer ρ'' une équation de la forme

$$\frac{d^2 \rho''}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3 \rho_0^2) \rho'' = \beta''_0 + \beta''_1 \rho'' + \beta''_2 \rho''^2 + \dots;$$

on posera

$$\rho'' = \rho_2 + \rho''',$$

et l'on déterminera ρ_2 par l'équation

$$\frac{d^2 \rho_2}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3 \rho_0^2) \rho_2 = \beta_0'',$$

et ainsi de suite.

On aura ainsi exprimé ρ sous la forme d'une série

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \dots,$$

et nous allons faire voir que cette série remplit les conditions nécessaires pour faire de la solution ici proposée une bonne solution, c'est-à-dire qu'elle est toujours convergente et rapidement convergente.

15. Considérons l'équation qui détermine ρ_1 . Si l'on y remplace ρ_0 par sa valeur et si l'on prend pour variable indépendante l'argument x défini précédemment, elle devient

$$\frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{e^2}{g^2} (1 - \beta_1 - 3\beta_3 e^2 \operatorname{sn}^2 x) \rho_1 = \frac{e^2}{g^2} \beta_0';$$

mais, d'après les relations établies plus haut, on a

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{g^2} (1 - \beta_1) &= 1 + k^2, \\ \frac{3\beta_3 e^4}{g^2} &= 6k^2; \end{aligned}$$

donc il vient

$$\frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + (1 + k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 x) \rho_1 = \frac{e^2}{g^2} \beta_0'.$$

Les équations qui déterminent ρ_2, ρ_3, \dots se présenteront d'ailleurs sous la même forme, le second membre seul se trouvant modifié, mais étant toujours une fonction de quantités déjà connues.

Or cette équation privée de second membre rentre dans la classe des équations de Lamé, et l'on sait en trouver l'intégrale générale.

Une première solution particulière connue est $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$; en considérant toujours l'équation sans second membre et posant $\rho_1 = y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, on trouve facilement une seconde solution particulière, savoir

$$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \int \frac{dx}{\operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}.$$

Pour effectuer l'intégration indiquée par cette formule, on fera usage des identités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x} &= \frac{1}{k'^2} \frac{1}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{1}{\operatorname{dn}^2 x}, \\ \frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 x} &= \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\mathbf{H}_1'(x)}{\mathbf{H}_1(x)} \right], \\ -\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x} &= \frac{\mathbf{H}_1''(0)}{\mathbf{H}_1(0)} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \right], \\ \frac{\mathbf{H}_1'(x)}{\mathbf{H}_1(x)} &= \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} - k'^2 \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}. \end{aligned}$$

La solution particulière envisagée devient par suite

$$x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \left[\frac{1}{k'^4} \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} + \frac{k^2}{k'^4} \frac{\mathbf{H}_1''(0)}{\mathbf{H}_1(0)} \right] + \frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)},$$

et il n'est pas difficile de s'assurer que le coefficient du terme en $x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, coefficient que nous désignerons par $-\frac{h}{k'^4}$ pour abrégier l'écriture, est une quantité de l'ordre de k^2 .

Si nous revenons maintenant à la considération de l'équation complète, nous en obtenons immédiatement l'intégrale générale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \left\{ C_1 - \frac{e^2}{g^2} \int \beta_0' \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] dx \right\} \\ &+ \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] \left(C_2 + \frac{e^2}{g^2} \int \beta_0' \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx \right), \end{aligned}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

16. En transformant légèrement cette expression, nous écrirons

$$\begin{aligned} \rho_1 &= C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + C_2 \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] \\ &- \frac{e^2}{g^2} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \int \beta_0' \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] dx \\ &+ \frac{e^2}{g^2} \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] \int \beta_0' \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx \\ &- \frac{e^2}{g^2} \frac{h}{k'^4} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \int dx \int \beta_0' \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx; \end{aligned}$$

il faut d'ailleurs avoir soin de remarquer que les intégrales qui figurent dans cette formule ne contiennent plus aucune constante arbitraire.

La quantité β'_0 se présente actuellement comme une série ordonnée suivant les puissances de $\operatorname{sn} x$.

Considérons d'abord la partie de β'_0 qui ne contient que les puissances impaires de $\operatorname{sn} x$; on peut l'écrire

$$b_3 \operatorname{sn}^3 x + b_7 \operatorname{sn}^7 x + \dots,$$

chacun des coefficients b étant par rapport à l'excentricité d'un ordre marqué par son indice et contenant en outre la masse perturbatrice en facteur. Si l'on introduit cette série à la place de β'_0 dans la valeur de ρ , telle que nous venons de la calculer, et que, pour effectuer les intégrations et les calculs définitifs, on suppose toutes les quantités qui figurent au second membre remplacées par leurs développements en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'angle $\frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$, il est facile de voir que, à part le terme $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, et un terme de la forme $Ax \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, l'expression de ρ , ne contiendra que des termes de la forme

$$a_{2n+1} \sin(2n+1) \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}.$$

Si maintenant nous tenons compte de la seconde partie de β'_0 , celle qui contient les puissances paires de $\operatorname{sn} x$, et qui par conséquent se présente sous la forme

$$b_0 + b_2 \operatorname{sn}^2 x + b_4 \operatorname{sn}^4 x + \dots,$$

on voit de même qu'on n'introduit dans l'expression de ρ , que des termes de la forme

$$a_{2n} \cos 2n \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}.$$

Pour se convaincre de l'exactitude de ces affirmations, il suffit de remarquer que les développements des puissances impaires de $\operatorname{sn} x$ et de la quantité $\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ procèdent suivant les sinus des multiples impairs de $\frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$; que les développements des puissances paires de $\operatorname{sn} x$ procèdent au contraire suivant les cosinus des multiples pairs de cet argument, tandis que celui de $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ procède suivant les cosinus des multiples impairs du même arc; enfin, que $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx$ étant la différentielle même de

$\operatorname{sn} x$, l'intégrale $\int \beta'_0 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x dx$ s'effectuera immédiatement et se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $\operatorname{sn} x$, sans contenir aucun terme dans lequel l'argument x figurerait en dehors des signes des fonctions périodiques.

Si donc on suppose, ce qui est possible, comme nous le verrons tout à l'heure, qu'on puisse disposer des constantes introduites par l'intégration de façon que les deux termes $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ et $Ax \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ s'évanouissent, on voit que finalement ρ_1 se présentera sous la forme

$$\rho_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \alpha_2 \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \alpha_3 \sin 3 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots;$$

non seulement il ne figure pas de termes séculaires dans cette expression, mais il est facile de voir que les coefficients sont petits par rapport à ρ_0 , puisque la masse perturbatrice ne disparaît comme facteur dans aucun d'eux. En outre, les quantités $\beta'_1, \beta'_2, \dots$ se présentant précisément sous la même forme, il en sera encore de même de β''_0 qui est égale à

$$\beta'_1 \rho_1 + \beta'_2 \rho_1^2 + \beta'_3 \rho_1^3 + \dots$$

La forme de l'expression de ρ_2 ne diffère d'ailleurs de celle de ρ_1 , donnée ci-dessus, qu'en ce que, sous les signes \int , β'_0 doit être remplacé par β''_0 ; donc les seuls termes de β''_0 qui, par suite de la double intégration, pourraient introduire un terme de la forme $x^2 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ sont ceux qui contiendraient le cosinus d'un multiple impair de $\frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$; d'après ce qui précède, il n'en est pas de tels dans β''_0 : on en conclut que tout ce que nous avons dit de ρ_1 pourra s'appliquer sans modification à ρ_2 ; un choix convenable des nouvelles constantes permettra d'exprimer ρ_2 sous la forme d'une série analogue à celle qui représente ρ_1 ; partant, le même résultat s'appliquera à ρ_3 , et ainsi de suite. On aura donc réalisé dans cette solution toutes les conditions que nous avons imposées au début.

17. Il nous reste à dire comment on réussira à faire disparaître les deux termes $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ et $Ax \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$. A cet effet, reprenons l'expression approchée de ρ , telle que nous l'avons obtenue, et écrivons-la sous la forme

$$\begin{aligned} \rho = \rho_0 + \rho_1 = & \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}} \operatorname{sn} x + C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \\ & + C_2 \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+K^2}{k'^4} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] + \mathbf{R}, \end{aligned}$$

en remarquant que $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}} \operatorname{sn} x$ est précisément la valeur de ρ_0 et en désignant par R l'ensemble des termes qui figurent dans l'expression de ρ_1 comme contenant des intégrales non calculées.

Comme on le voit, quatre constantes arbitraires subsistent dans cette expression; d'autre part, ρ dépendant d'une équation différentielle du second ordre ne doit renfermer que deux constantes arbitraires. Il est aisé d'expliquer cette contradiction apparente : la quantité ρ_1 est d'un ordre de grandeur comparable au changement que subit ρ_0 , si l'on attribue de petits accroissements aux quantités x_0 et k dont dépend ρ_0 ; de sorte que, regardant ces accroissements comme des différentielles, l'accroissement correspondant de ρ_1 peut être négligé. Or il est facile de faire voir, et cela doit être nécessairement, d'après le raisonnement précédent, que l'accroissement $d\rho_0$ de ρ_0 , quand k et x_0 reçoivent les accroissements dk et dx_0 , est précisément de la forme

$$C'_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + C'_2 \left(\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right),$$

C'_1 et C'_2 étant des constantes.

En effet, on a

$$\rho_0 + d\rho_0 = \frac{k + dk}{\sqrt{1 + (k + dk)^2}} \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}} \operatorname{sn}(x + dx);$$

le module de la fonction elliptique qui figure dans cette formule étant $k + dk$ et non plus k , et dx ayant la signification suivante, nous avons posé

$$x = x_0 + \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}} v;$$

on en tire

$$x + dx = x_0 + dx_0 + \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+(k+dk)^2}} v.$$

D'ailleurs, nous n'avons égard qu'aux termes du premier ordre par rapport à dx_0 et dk ; il vient, par suite,

$$d\rho_0 = \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}} \left[\frac{k dx}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sn} x + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \mathbf{D}_k \operatorname{sn} x \right].$$

On a

$$dx = dx_0 - \frac{k dk}{1+k^2}(x-x_0),$$

et

$$D_k \operatorname{sn} x = - \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{k k'^2} \left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} - x \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} \right];$$

alors, toutes réductions faites et remarquant que

$$\frac{H_1''(0)}{H_1(0)} = \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} - k'^2,$$

il vient immédiatement

$$d\rho_0 = \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}} \left\{ \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} [(1+k^2) dx_0 + x_0 k dk] \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right. \\ \left. + \frac{k'^2 dk}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] \right\},$$

et c'est précisément là le résultat que nous avons annoncé. Il en résulte que, sans nuire aucunement à la généralité de la solution, les deux constantes C_1 et C_2 pourront être choisies comme on le jugera le plus convenable; en particulier, comme nous l'avons supposé plus haut, on pourra faire $C_1 = 0$ et déterminer C_2 de façon qu'il ne reste aucun terme séculaire dans l'expression de ρ_1 .

Ce choix fait, il restera dans l'expression de la valeur approchée $\rho_0 + \rho_1$, de ρ deux constantes arbitraires k et x_0 , et ces constantes devront être déterminées de façon que deux conditions données à l'avance soient vérifiées : ces deux constantes n'auront donc plus les mêmes valeurs numériques dans l'expression corrigée $\rho_0 + \rho_1$, que dans la première valeur approchée ρ_0 de ρ ; car, relativement à cette valeur ρ_0 , les constantes qui y figurent ont été déterminées de façon que ces deux mêmes conditions soient vérifiées. Il en résulte que le module k des fonctions elliptiques qui figurent dans l'expression définitive de ρ ne peut être déterminé que par approximations successives, car le même procédé devra être appliqué quand on passera à la considération des valeurs successives de ρ , $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2$, $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$, ...

Finalement, on voit que toutes les conclusions que nous avons énoncées plus haut se trouvent parfaitement justifiées; ρ se présente sous la forme

d'une série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de l'angle $\frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$ ou $\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}} \varphi$, k recevant sa valeur définitive, et cette série ne renferme aucun terme séculaire. On voit aussi que, en posant

$$\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}} = 1 - \zeta,$$

ζ représentera le rapport du moyen mouvement des apsides au moyen mouvement du corps considéré, en tant toutefois que l'équation dont nous sommes partis représente effectivement le mouvement de ce corps.

18. A la vérité, comme nous l'avons remarqué au début de ce Chapitre, dans le problème général des perturbations, ce n'est pas l'équation dont nous venons de nous occuper qui se présente. Il existe cependant un cas, entre autres, où les considérations précédentes peuvent trouver leur entière application : c'est celui du mouvement des satellites intérieurs de Saturne, sous l'action de l'anneau et de l'aplatissement de la planète. Ce problème a été traité complètement par M. Tisserand (*Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. I); nous nous proposons ici de retrouver, par une méthode essentiellement différente, les mêmes résultats.

Appelons

a le demi grand axe de l'orbite du satellite considéré;

\mathbf{M} la masse de Saturne;

m celle de l'anneau;

a' et a'' les rayons intérieur et extérieur de la couronne circulaire qui sert de base à l'anneau considéré comme un cylindre droit homogène.

M. Tisserand a montré que le mouvement du satellite est un mouvement elliptique (avec la masse centrale $\mathbf{M} + m$) altéré par la fonction perturbatrice

$$\Omega = f\left(\frac{\frac{1}{2}k\mathbf{M} + \mathbf{B}_1 m}{r^3} + \frac{\mathbf{B}_2 m}{r^5} + \frac{\mathbf{B}_3 m}{r^7} + \dots\right),$$

où k désigne un certain coefficient dépendant de l'aplatissement de la planète et où les coefficients \mathbf{B} sont définis par la formule suivante :

$$\mathbf{B}_n = \left(\frac{1.3\dots 2n-1}{2.4\dots 2n}\right)^2 \frac{1}{n+1} \frac{a''^{2n+2} - a'^{2n+2}}{a''^2 - a'^2}.$$

Par suite, en gardant les notations que nous avons employées jusqu'ici, il vient, en supprimant les indices,

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = -\frac{r^2}{\mu_1} \frac{\partial\Omega}{\partial r} = -\frac{r^2}{f(\mathbf{M} + m)} \frac{\partial\Omega}{\partial r},$$

et si l'on remplace Ω par son expression donnée plus haut, on obtient

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{1}{\mathbf{M} + m} \left(3 \frac{\frac{1}{2}k\mathbf{M} + \mathbf{B}_1 m}{r^2} + 5 \frac{\mathbf{B}_2 m}{r^4} + 7 \frac{\mathbf{B}_3 m}{r^6} + \dots \right),$$

et d'ailleurs on a la relation

$$r = \frac{ap}{1 + \rho},$$

en posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$h^2 = \mu_1 ap.$$

Le second membre de l'équation précédente se mettra sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ ,

$$\beta_0 + \beta_1\rho + \beta_2\rho^2 + \dots$$

Ce que nous nous proposons de chercher, c'est la quantité que nous avons appelée plus haut ς et qui représente le rapport du moyen mouvement du pénétrant à celui du satellite considéré.

Comme nous l'avons vu, on a

$$1 - \varsigma = \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + k^2}} \frac{\pi}{2\mathbf{K}};$$

on peut remarquer, d'ailleurs, qu'il sera inutile d'effectuer une correction du premier module obtenu, à cause de la petitesse de l'excentricité qui n'atteint pas $\frac{1}{10}$, même pour Mimas.

Pour la même raison, en remarquant que β_1 est assez petit pour négliger son carré dans l'expression de ς , et qu'il en est de même *a fortiori* de k^2 , comme

$$\frac{2\mathbf{K}}{\pi} = 1 + \frac{k^2}{4} + \dots,$$

on voit immédiatement qu'au degré d'approximation que nous venons de définir, on a

$$\varsigma = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{3}{4}k^2.$$

Si d'ailleurs e désigne l'excentricité, on déterminera k en écrivant que le maximum de ρ est e , ce qui donne, en ne gardant que les termes les plus importants,

$$e = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}},$$

d'où

$$k^2 = \frac{e^2 \beta_3}{2(1-\beta_1) - e^2 \beta_3}.$$

Les expressions de β_1 et de β_3 sont les suivantes :

$$\beta_1 = \frac{1}{M+m} \left[\frac{3.2}{a^2 p^2} \left(\frac{1}{2} kM + B_1 m \right) + \frac{5.4}{a^4 p^4} B_2 m + \frac{7.6}{a^6 p^6} B_3 m + \dots \right],$$

$$\beta_3 = \frac{1}{M+m} \left(\frac{5.4}{a^4 p^4} B_2 m + \frac{7.20}{a^6 p^6} B_3 m + \dots \right).$$

Si l'on néglige complètement le carré de l'excentricité dans le résultat final, il vient

$$\epsilon = \frac{1}{2} \beta_1 = \frac{1}{M+m} \left[\frac{1.3}{a^2} \left(\frac{1}{2} kM + B_1 m \right) + \frac{2.5}{a^4} B_2 m + \frac{3.7}{a^6} B_3 m + \dots \right];$$

c'est précisément la formule à laquelle a été conduit M. Tisserand par l'application de la méthode de la variation des constantes.

CHAPITRE III.

19. Nous avons montré dans le Chapitre précédent comment, dans certains problèmes, ou même en dirigeant les approximations du problème des trois corps d'une certaine façon, on était amené à la considération d'une forme d'équation qui demande une méthode d'intégration particulière. Revenons maintenant aux équations générales du mouvement, telles que nous les avons établies dans le Chapitre I, c'est-à-dire aux équations (7), (9), (13). Les équations (7) et (9) se présentent toutes deux sous la forme

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dv^2} + Y_1 \frac{dy}{dv} + Y_2 y = Y,$$

les symboles Y représentant des fonctions connues de la variable indépendante v .

Il est tout d'abord nécessaire de réduire l'équation (1) à une forme plus simple, que l'on peut appeler *canonique*, en faisant disparaître le second terme. M. Gylden a indiqué plusieurs moyens pour effectuer cette réduction. Voici, sans contredit, le plus simple et en même temps le plus avantageux.

Changeons la variable y en une autre z , par la substitution

$$y = \varphi z,$$

φ désignant une fonction actuellement indéterminée de v .

L'équation (1) devient

$$\varphi \frac{d^2 z}{dv^2} + \frac{dz}{dv} \left(2 \frac{d\varphi}{dv} + \varphi Y_1 \right) + z \left(\frac{d^2 \varphi}{dv^2} + Y_1 \frac{d\varphi}{dv} + \varphi Y_2 \right) = Y.$$

Si l'on détermine φ par la relation

$$2 \frac{d\varphi}{dv} + \varphi Y_1 = 0,$$

l'équation sera ramenée immédiatement à la forme indiquée. On a

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2} \int Y_1 dv},$$

et l'équation transformée est

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z \left(Y_2 - \frac{1}{4} Y_1^2 - \frac{1}{2} \frac{dY_1}{dv} \right) = Y e^{\frac{1}{2} \int Y_1 dv},$$

c'est-à-dire qu'elle rentre dans le type

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dv^2} + zZ = Z_0,$$

qui est le même que celui de l'équation (13); il faut remarquer toutefois que, dans le cas des équations (7) et (9), le coefficient Z se réduit à l'unité lorsqu'on fait $m' = 0$; dans le cas, au contraire, de l'équation (13), ce coefficient est de l'ordre de m' .

20. Il est manifeste que, dans les équations relatives à la première approximation et réduites à la forme (2), les coefficients Z_0, Z ne contiennent aucun terme séculaire, c'est-à-dire aucun terme où l'argument ν figure en dehors des signes des fonctions périodiques; si l'on peut réussir à intégrer ces équations sans introduire dans les valeurs des inconnues aucun terme séculaire, il en sera encore de même pour les équations relatives à la seconde approximation et aux approximations suivantes. Or l'hypothèse dont nous venons de parler se réalise effectivement, comme nous le montrerons au cours de ce Chapitre; nous pouvons donc supposer que, dans l'équation (2), les fonctions Z et Z_0 sont des séries trigonométriques procédant suivant les cosinus d'arguments de la forme $\lambda \nu - A$, λ et A étant des constantes.

Mettant en évidence le terme constant dans la fonction Z , nous écrirons l'équation (2) sous la forme

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + (\beta_0^{(1)} + Z_1) z = Z_0,$$

Z_1 et Z_0 étant définis par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)}) + \beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 \nu + b_2^{(1)}) + \dots + \beta_s^{(1)} \cos(\lambda_s \nu + b_s^{(1)}) + \dots, \\ Z_0 &= \beta_0^{(0)} + \beta_1^{(0)} \cos(\lambda_1' \nu + b_1^{(0)}) + \beta_2^{(0)} \cos(\lambda_2' \nu + b_2^{(0)}) + \dots + \beta_s^{(0)} \cos(\lambda_s' \nu + b_s^{(0)}) + \dots \end{aligned}$$

Supposons que, dans Z_1 , les seuls termes qui puissent avoir une influence véritable soient les s premiers; en général, d'ailleurs, ce nombre s se réduira à l'unité.

Considérons z comme la somme de $s + 1$ quantités auxiliaires

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_s + z_{s+1},$$

ces nouvelles quantités étant déterminées respectivement par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{d\nu^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)})] z_1 &= Z_0, \\ \frac{d^2 z_2}{d\nu^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 \nu + b_2^{(1)})] z_2 &= -\beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 \nu + b_3^{(1)}) z_1, \\ \frac{d^2 z_3}{d\nu^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_3^{(1)} \cos(\lambda_3 \nu + b_3^{(1)})] z_3 & \\ &= -\beta_3^{(1)} \cos(\lambda_3 \nu + b_3^{(1)}) (z_1 + z_2) - \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)}) z_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_s}{d\nu^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_s^{(1)} \cos(\lambda_s \nu + b_s^{(1)})] z_s \\ = -\beta_s^{(1)} \cos(\lambda_s \nu + b_s^{(1)}) (z_1 + z_2 + \dots + z_{s-1}) \\ - z_{s-1} [\beta_{s-2}^{(1)} \cos(\lambda_{s-2} \nu + b_{s-2}^{(1)}) + \beta_{s-3}^{(1)} \cos(\lambda_{s-3} \nu + b_{s-3}^{(1)}) + \dots + \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)})], \end{aligned}$$

et finalement, Z_{1s} désignant le groupe de termes dont on n'a pas tenu compte jusqu'ici dans Z_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_{s+1}}{d\nu^2} + (\beta_0^{(1)} + Z_1) z_{s+1} \\ = -Z_{1s} (z_1 + z_2 + \dots + z_s) \\ - z_s [\beta_{s-1}^{(1)} \cos(\lambda_{s-1} \nu + b_{s-1}^{(1)}) + \beta_{s-2}^{(1)} \cos(\lambda_{s-2} \nu + b_{s-2}^{(1)}) + \dots + \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)})]. \end{aligned}$$

Disons tout de suite, en quelques mots, comment on intégrera la dernière de ces équations, qui ne rentre pas dans la même classe que celles qui la précèdent; puisque, comme nous l'avons supposé, les termes les plus importants dans Z sont les s premiers, dans l'équation que nous considérons, le terme $Z_1 z_{s+1}$ est d'un ordre supérieur à l'ordre de tous les autres; on pourra le négliger dans une première approximation, et l'on obtiendra z_{s+1} sous la forme d'une série

$$z_{s+1} = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots,$$

les termes de cette série étant définis par les équations suivantes, sur lesquelles il est inutile d'insister davantage,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_0}{d\nu^2} + \beta_0^{(1)} \zeta_0 &= -Z_{1s} (z_1 + z_2 + \dots + z_s) \\ &\quad - z_s [\beta_{s-1}^{(1)} \cos(\lambda_{s-1} \nu + b_{s-1}^{(1)}) + \dots + \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 \nu + b_1^{(1)})], \\ \frac{d^2 \zeta_1}{d\nu^2} + \beta_0^{(1)} \zeta_1 &= -Z_1 \zeta_0, \\ \frac{d^2 \zeta_2}{d\nu^2} + \beta_0^{(1)} \zeta_2 &= -Z_1 \zeta_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Finalement, on voit que toute la question se trouve ramenée à l'étude des équations qui déterminent z_1, \dots, z_s , équations qui rentrent toutes dans le type suivant

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{d\nu^2} + [\beta_0 + \beta \cos(\lambda \nu + b)] z = U,$$

U désignant une fonction connue de ν , composée uniquement de termes périodiques.

Faisons remarquer, en passant, que ce type d'équation, au moins pour des valeurs particulières de λ et en supposant nul le second membre, se rencontre dans plusieurs théories mathématiques et y joue un rôle important, en particulier dans l'étude des fonctions cylindriques ⁽¹⁾ et aussi dans celle des vibrations d'une membrane tendue ⁽²⁾.

21. C'est en ramenant cette équation fondamentale dans sa nouvelle théorie des perturbations, à l'équation de Lamé, que M. Gylden a réussi à l'intégrer.

Désignons par k une quantité actuellement indéterminée, et que nous regarderons comme le module d'un système de fonctions elliptiques : soit \mathbf{K} l'intégrale complète de première espèce correspondante et changeons la variable indépendante ν , en posant

$$\frac{1}{2}(\lambda\nu + b) = \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}.$$

Remarquons toutefois que le coefficient λ est supposé positif, et que cette transformation ne doit être faite que si en outre le coefficient β est positif; dans le cas contraire, qui se ramène au premier en augmentant b de π , on poserait

$$\frac{1}{2}(\lambda\nu + b) = \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} - \frac{\pi}{2}.$$

L'équation qui nous occupe

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + [\beta_0 + \beta \cos(\lambda\nu + b)]z = \mathbf{U}$$

devient alors

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left[4 \frac{\beta_0}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 + 4 \frac{\beta}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} \right] z = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 \mathbf{U}.$$

Or les formules connues pour le développement des puissances des fonc-

⁽¹⁾ HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 404 et 405.

⁽²⁾ MATHIEU, *Journal de Liouville*, 1868.

tions elliptiques donnent

$$\cos 2 \operatorname{am} x = 1 - 2 \operatorname{sn}^2 x = \gamma_0 + \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \frac{16}{k^2} \left(\frac{q}{1-q^2} \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \frac{2q^2}{1-q^4} \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots\right),$$

γ_0 désignant un terme non périodique, et, si k est suffisamment petit, cette série converge rapidement : dans cette même hypothèse, le coefficient de $\cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$ au second membre est d'ailleurs de beaucoup le plus considérable.

Écrivons en conséquence

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} &= \frac{k^2(1-q^2)}{16q} \cos 2 \operatorname{am} x - \frac{k^2(1-q^2)}{16q} \gamma_0 \\ &\quad - \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 (1-q^2) \left(\frac{2q}{1-q^4} \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \frac{3q^2}{1-q^6} \cos 6 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots\right). \end{aligned}$$

Soit n un entier positif quelconque, et déterminons le module k ou, ce qui revient au même, la quantité q par l'équation

$$n(n+1)k^2 = k^2 \frac{\beta}{\lambda^2} \frac{1-q^2}{2q}.$$

L'équation à intégrer devient alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} + \left[\frac{n(n+1)}{2} k^2 \cos 2 \operatorname{am} x + \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \beta_0 - \frac{n(n+1)}{2} k^2 \gamma_0 \right] z \\ = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \left[\mathbf{U} + \beta(1-q^2) z \left(\frac{2q}{1-q^4} \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots\right) \right]. \end{aligned}$$

Remplaçons $\cos 2 \operatorname{am} x$ par $1 - 2 \operatorname{sn}^2 x$, et posons

$$-h = \frac{n(n+1)}{2} k^2 (1-\gamma_0) + \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \beta_0;$$

l'équation devient finalement

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]z = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}}\right)^2 \left[\mathbf{U} + \beta(1-q^2) z \left(\frac{2q}{1-q^4} \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots\right) \right].$$

22. Désignons par \mathbf{V} le second membre de l'équation que nous venons d'obtenir : la détermination de z est ramenée à l'intégration de

$$(4) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]z = \mathbf{V}.$$

A la vérité, le second membre de cette équation dépend de z qui est la fonction inconnue; mais le coefficient de z y est d'un ordre de grandeur assez considérable pour qu'on puisse dans tous les cas remplacer sans inconvénient, dans V , z par une valeur approchée, celle qu'on tirera de l'équation même en faisant abstraction des termes dépendants de z au second membre, par exemple, et par suite regarder V comme une fonction connue de la variable indépendante x .

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$(5) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]z = 0.$$

On reconnaît ici l'équation de Lamé sous sa forme la plus générale : on en connaît l'intégrale générale depuis les belles et importantes recherches de M. Hermite [*Sur quelques applications des fonctions elliptiques (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1877 et années suivantes, passim)*].

Rappelons seulement qu'en posant

$$\Phi(x) = \frac{\mathbf{H}(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{\left(\mu - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x},$$

puis, en désignant par A_1, A_2, \dots des coefficients dont il est inutile d'écrire les valeurs,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{D}^{n-1} \Phi(x) - A_1 \mathbf{D}^{n-3} \Phi(x) + A_2 \mathbf{D}^{n-5} \Phi(x) + \dots,$$

l'intégrale générale de l'équation précédente se présente sous la forme

$$z = C_1 \mathbf{F}(x) + C_2 \mathbf{F}(-x);$$

dans ces formules, μ et ω sont des quantités convenablement déterminées en fonction des coefficients de l'équation et C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

Occupons-nous spécialement du cas où l'on choisit l'unité pour la valeur de n : les formules sont en effet alors les plus simples.

Dans cette hypothèse particulière, la quantité ω est déterminée par la relation

$$h = -1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 \omega$$

ou encore, en remplaçant h par sa valeur,

$$(6) \quad k^2 \operatorname{sn}^2 \omega = 1 - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \beta_0 + k^2 \gamma_0;$$

la quantité μ s'évanouit, et l'on a

$$F(x) = \frac{H'(0) H(x + \omega)}{\Theta(\omega) \Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x - iK) + i\frac{\pi\omega}{2K}};$$

l'intégrale générale de l'équation considérée étant

$$C_1 F(x) + C_2 F(-x),$$

nous pourrons écrire plus simplement, en donnant aux nouvelles constantes C_1 et C_2 une signification différente,

$$(7) \quad z = C_1 \frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}x} + C_2 \frac{H(x - \omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}x}.$$

23. Pour pénétrer plus profondément la nature de la solution, il devient nécessaire, maintenant, d'étudier séparément les deux cas qui correspondent, d'une part, aux équations (7) et (9) du Chapitre I; d'autre part, à l'équation (13) du même Chapitre.

Envisageons d'abord le premier cas, caractérisé par ce fait que β_0 ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre de la masse perturbatrice. Si l'on observe que λ sera toujours un coefficient numérique, qui n'aura pas de grandes valeurs, sans quoi le terme correspondant dans l'équation (2) serait sans influence sensible et ne conduirait pas par conséquent à l'équation qui nous occupe en ce moment, on voit immédiatement que la valeur de $\operatorname{sn}^2 \omega$, déterminée par l'équation (6), sera négative; par suite, ω sera imaginaire, sans partie réelle d'ailleurs; en conséquence, nous changerons dans les formules précédentes ω en $i\omega$, de sorte que les équations (6) et (7) deviennent

$$(8) \quad k^2 \operatorname{sn}^2 i\omega = 1 - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \beta_0 + k^2 \gamma_0,$$

$$(9) \quad z = C_1 \frac{H(x + i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2 \frac{H(x - i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}.$$

Voici, d'ailleurs, comment devront être dirigés les calculs numériques.

On déterminera d'abord la quantité q par la relation

$$q = \frac{\beta}{4\lambda^2}(1 - q^2);$$

q étant extrêmement petit, il y aura avantage à résoudre cette équation par approximations successives.

Connaissant q , on déterminera k et le module complémentaire k' par les formules

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2} \sqrt[8]{q} \frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \dots}{1 + q - q^2 - q^5 - \dots},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots},$$

et aussi $\frac{2\mathbf{K}}{\pi}$ par la formule

$$\sqrt{\frac{2\mathbf{K}}{\pi}} = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

La formule (8) s'écrit ensuite

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 i\omega = \operatorname{dn}^2 i\omega = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 \left[\beta_0 - \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \right)^2 k^2 \gamma_0 \right];$$

il faut donc calculer la quantité $\frac{1}{4} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \right)^2 k^2 \gamma_0$. Or γ_0 est le terme non périodique du développement de $1 - 2 \operatorname{sn}^2 x$ suivant les cosinus des multiples de $\frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$; donc

$$\gamma_0 = \frac{1}{\mathbf{K}} \int_0^{\mathbf{K}} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 x) dx$$

ou, en employant les notations consacrées par l'usage,

$$\gamma_0 = 1 - \frac{2\mathbf{J}}{k^2\mathbf{K}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \right)^2 k^2 \gamma_0 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2\mathbf{K}k}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \right)^2 \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K}} \\ &= 4q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots) - 4 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}; \end{aligned}$$

développant le second membre en série ordonnée suivant les puissances

de q , il vient finalement

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \right)^2 k^2 \gamma_0 = -8q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \dots).$$

Connaissant

$$\operatorname{dn}^2 i\omega = \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 [\beta_0 + 8\lambda^2 q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \dots)],$$

on calculera sans difficulté ω , ou plutôt la quantité $e^{\frac{\pi\omega}{2\mathbf{K}}}$, à l'aide de laquelle on exprimera toutes les fonctions de ω dont la considération est nécessaire. On a, en effet,

$$\operatorname{dn} i\omega = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$$

ou bien

$$\frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^4 \cos 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots}{1 - 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^4 \cos 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \dots};$$

grâce à la petitesse de q , cette équation se résoudra très facilement par approximations successives par rapport à $\cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}$; le plus souvent, on pourra complètement négliger les termes où q^4 est en facteur, et l'on aura simplement

$$\cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} = \frac{1}{2q} \frac{\frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}} - 1}{\frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}} + 1} = \frac{1}{2q} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right),$$

en posant

$$\cot \varphi = \frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}}.$$

$\sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}$ se calculera immédiatement, et l'on aura

$$e^{\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} = \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \frac{1}{i} \sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}};$$

on en tire $e^{\frac{\pi\omega}{2\mathbf{K}}}$ et, s'il est nécessaire, la valeur de ω .

Portons maintenant notre attention sur la quantité $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ que nous dési-

gnerons par $\frac{\pi}{2\mathbf{K}} i\alpha$, α étant réel; on a

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = \frac{\left(\frac{\pi}{\mathbf{K}}\right) \left[2q \sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - 4q^3 \sin 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots \right]}{1 - 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^4 \cos 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \dots};$$

α se calculera sans difficulté; en général, on aura une approximation suffisante en prenant

$$\alpha = \frac{4q}{i} \frac{\sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}}{1 - 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}}.$$

Cette quantité α joue un rôle prépondérant dans cette théorie; comme nous allons le voir, c'est elle qui fixe la forme des arguments qui figurent dans la solution de l'équation proposée.

Développons, en effet, en série trigonométrique la valeur de z fournie par l'équation (9); pour faire ce calcul, nous négligerons la quatrième puissance de q ; il serait d'ailleurs facile de pousser l'approximation aussi loin qu'on voudrait.

On a

$$\mathbf{H}(x + i\omega) = 2\sqrt[4]{q} \left[\sin \frac{\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) - q^2 \sin \frac{3\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) \right],$$

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}.$$

Donc

$$\frac{\mathbf{H}(x + i\omega)}{\Theta(x)} = 2\sqrt[4]{q} \left[\sin \frac{\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) + 2q \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} \sin \frac{\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) \right. \\ \left. - q^2 \sin \frac{3\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) - 2q^3 \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} \sin \frac{3\pi}{2\mathbf{K}}(x + i\omega) \right];$$

en outre, nous avons

$$e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}} = e^{-\frac{\pi}{2\mathbf{K}} i\alpha x}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{\pi x}{2\mathbf{K}} = \frac{1}{2}(\lambda v + b) = v_0;$$

on peut alors écrire la formule suivante :

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i} \left[e^{-\frac{\pi\omega}{2K}} e^{(1-\alpha)i\nu_0} - e^{\frac{\pi\omega}{2K}} e^{-(1+\alpha)i\nu_0} \right. \\ \left. + qe^{-\frac{\pi\omega}{2K}} e^{(3-\alpha)i\nu_0} + qe^{-\frac{\pi\omega}{2K}} e^{-(1+\alpha)i\nu_0} \right. \\ \left. - qe^{\frac{\pi\omega}{2K}} e^{(1-\alpha)i\nu_0} - qe^{\frac{\pi\omega}{2K}} e^{-(3+\alpha)i\nu_0} \right. \\ \left. - q^2 e^{-\frac{3\pi\omega}{2K}} e^{(3-\alpha)i\nu_0} + q^2 e^{\frac{3\pi\omega}{2K}} e^{-(3+\alpha)i\nu_0} + \dots \right].$$

Dans la parenthèse nous avons négligé, comme on pourra le faire souvent, les termes en q^3 ; la loi de formation est d'ailleurs suffisamment en évidence.

En posant

$$a_1 = e^{-\frac{\pi\omega}{2K}} - qe^{\frac{\pi\omega}{2K}} + \dots; \quad b_1 = e^{\frac{\pi\omega}{2K}} - qe^{-\frac{\pi\omega}{2K}} + \dots; \\ a_3 = qe^{-\frac{\pi\omega}{2K}} - q^2 e^{-\frac{3\pi\omega}{2K}} + \dots; \quad b_3 = qe^{\frac{\pi\omega}{2K}} - q^2 e^{\frac{3\pi\omega}{2K}} + \dots; \\ \dots\dots\dots; \quad \dots\dots\dots;$$

on peut écrire

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i} [a_1 e^{(1-\alpha)i\nu_0} - b_1 e^{-(1+\alpha)i\nu_0} + a_3 e^{(3-\alpha)i\nu_0} - b_3 e^{-(3+\alpha)i\nu_0} + \dots].$$

On a de même, en changeant i en $-i$,

$$\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i} [b_1 e^{(1+\alpha)i\nu_0} - a_1 e^{-(1-\alpha)i\nu_0} + b_3 e^{(3+\alpha)i\nu_0} - a_3 e^{-(3-\alpha)i\nu_0} + \dots].$$

Si maintenant nous remplaçons les deux constantes C_1 et C_2 par deux autres γ et θ déterminées de façon que

$$C_1 = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{i\theta_0}, \quad C_2 = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-i\theta_0},$$

la formule (9) devient

$$z = \gamma \{ b_1 \sin[(1+\alpha)\nu_0 - \theta_0] + a_1 \sin[(1-\alpha)\nu_0 + \theta_0] \\ + b_3 \sin[(3+\alpha)\nu_0 - \theta_0] + a_3 \sin[(3-\alpha)\nu_0 + \theta_0] + \dots \}.$$

Si enfin nous posons

$$\frac{\lambda}{2} (1+\alpha) = g$$

et que nous remplaçons θ_0 par une constante θ définie par l'égalité

$$\theta = \theta_0 - \frac{bg}{\lambda},$$

il vient pour expression définitive de z , en remplaçant v_0 par sa valeur,

$$z = \gamma \left\{ b_1 \sin(gv - \theta) + a_1 \sin[\lambda v + b - (gv - \theta)] \right. \\ \left. + b_3 \sin[\lambda v + b + (gv - \theta)] + a_3 \sin[2(\lambda v + b) - (gv - \theta)] + \dots \right\}.$$

24. Sur cette formule, l'importance considérable de la quantité g , c'est-à-dire de α , est mise en complète évidence; dans le cas de l'orbite intermédiaire de la Lune par exemple, c'est elle qui détermine le mouvement séculaire du nœud ou du périégée, selon qu'on détermine la latitude ou le rayon vecteur.

Cette quantité g est voisine de l'unité, puisque, dans l'hypothèse particulière de $\beta = 0$, elle se réduit évidemment à $\sqrt{\beta_0}$; l'équation étant alors en effet $\frac{d^2 z}{dv^2} + \beta_0 z = 0$ pour intégrale générale $z = \gamma \sin(\sqrt{\beta_0} v - \theta)$, γ et θ étant deux constantes arbitraires. Il en résulte que, lorsque q tend vers zéro et par suite que ω augmente au delà de toute limite, la valeur limite de g doit être $\sqrt{\beta_0}$; il est facile de vérifier directement ce résultat, et en même temps d'en conclure une formule plus avantageuse pour le calcul numérique de g que celle donnée précédemment.

Posant

$$\beta_0 + 8\lambda^2 q^2(1 + 2q^2 + 4q^4) + \dots = 1 + \beta'_0,$$

de sorte que β'_0 sera très petit, on tire d'une des formules écrites précédemment

$$\sqrt{1 + \beta'_0} = \frac{\lambda}{2} \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \operatorname{dn} i\omega;$$

on a aussi

$$g = \frac{\lambda}{2}(1 + \alpha).$$

Donc

$$g - 1 = \sqrt{1 + \beta'_0} - 1 + \frac{\lambda}{2} \left(1 + \alpha - \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \operatorname{dn} i\omega \right);$$

$\sqrt{1 + \beta'_0} - 1$ se développera sans difficulté suivant les puissances de β'_0 . Con-

sidérons maintenant le facteur de $\frac{\lambda}{2}$,

$$1 + \alpha - \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \operatorname{dn} i\omega;$$

on peut l'écrire

$$1 + \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \frac{1}{i} \frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} - \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(i\omega)}{\Theta(i\omega)},$$

ou bien

$$\frac{1}{\Theta(i\omega)} \left[\Theta(i\omega) + \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \frac{1}{i} \Theta'(i\omega) - \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \sqrt{k'} \Theta_1(i\omega) \right],$$

ou encore, en ordonnant le numérateur et le dénominateur par rapport aux puissances de q ,

$$\frac{-4q \left(\cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \frac{1}{i} \sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} \right) + 4q^2 + 8q^3 \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \frac{8}{i} q^4 \sin 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots}{1 - 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^4 \cos 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots};$$

le facteur $\left(\cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \frac{1}{i} \sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} \right)$ sera d'ailleurs remplacé par $e^{-\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}}$, et l'on aura finalement par le calcul de $g - 1$, la formule

$$g - 1 = \frac{1}{2} \beta'_0 - \frac{1}{8} \beta_0'^2 + \dots + \frac{\lambda}{2} \frac{-4qe^{-\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} + 4q^2 + 8q^3 \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - \frac{8}{i} q^4 \sin 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots}{1 - 2q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^4 \cos 4 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots}.$$

Si l'on suppose que, dans l'équation considérée, le coefficient β tende vers zéro, il en sera de même de q ; ω augmentera au delà de toute limite, mais de façon que $q \cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}$ reste fini, comme le montre la formule

$$\cos 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} = \frac{1}{2q} \frac{\frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}} - 1}{\frac{\operatorname{dn} i\omega}{\sqrt{k'}} + 1},$$

$\operatorname{dn} i\omega$ ayant une valeur déterminée, différente de l'unité; de même

$$\frac{1}{i} q \sin 2 \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}}$$

restera fini; la formule précédente nous donne donc immédiatement, comme nous l'avons prévu, pour valeur limite de g ,

$$1 + \frac{1}{2}\beta'_0 - \frac{1}{8}\beta_0'^2 + \dots,$$

c'est-à-dire $\sqrt{\beta_0}$, puisqu'ici $1 + \beta'_0$ ne diffère pas de β_0 .

25. Pour achever la solution du problème, en restant toujours dans le même cas, le plus important d'ailleurs, il faut revenir à la considération de l'équation avec second membre (4)

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - (2k^2 \operatorname{sn}^2 x + h)z = V,$$

V étant une fonction périodique connue de ν et contenant aussi des termes de la forme $z \cos 2i \frac{\pi x}{2\mathbf{K}}$, i étant un entier positif; ces termes, nous l'avons dit, seront remplacés par leurs valeurs approchées.

Si d'une façon générale deux intégrales particulières de l'équation sans second membre sont désignées par z_1 , z_2 , leurs dérivées par z'_1 , z'_2 , l'intégrale générale de l'équation complète sera, en représentant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires,

$$z = z_1 \left(C_1 + \int \frac{z_2 V}{z_2 z'_1 - z_1 z'_2} dx \right) + z_2 \left(C_2 - \int \frac{z_1 V}{z_2 z'_1 - z_1 z'_2} dx \right).$$

Dans le cas qui nous occupe, nous avons

$$z_1 = \frac{\mathbf{H}(x + i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} x}, \quad z_2 = \frac{\mathbf{H}(x - i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} x};$$

par suite,

$$\begin{aligned} z_2 z'_1 - z_1 z'_2 &= \frac{\mathbf{H}'(x + i\omega)\mathbf{H}(x - i\omega) - \mathbf{H}'(x - i\omega)\mathbf{H}(x + i\omega)}{\Theta^2(x)} \\ &\quad - 2 \frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} \frac{\mathbf{H}(x + i\omega)\mathbf{H}(x - i\omega)}{\Theta^2(x)}. \end{aligned}$$

Or l'équation différentielle que nous envisageons manque du terme en $\frac{dz}{dx}$; donc $z_2 z'_1 - z_1 z'_2$ est indépendant de x , et, pour en calculer plus facile-

ment la valeur, nous pouvons y faire $x = 0$; il vient alors immédiatement

$$\begin{aligned} z_2 z'_1 - z_1 z'_2 &= -2 \frac{\mathbf{H}(i\omega)}{\Theta^2(0)\Theta(i\omega)} [\mathbf{H}(i\omega)\Theta'(i\omega) - \Theta(i\omega)\mathbf{H}'(i\omega)] \\ &= -2k' \frac{\mathbf{H}(i\omega)\mathbf{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)}{\Theta^2(0)\Theta(i\omega)}. \end{aligned}$$

Par suite, pour avoir la solution complète de l'équation, il faudra ajouter à la solution obtenue, en partant de l'équation sans second membre, la fonction

$$\begin{aligned} \frac{\Theta^2(0)\Theta(i\omega)}{2k'\mathbf{H}(i\omega)\mathbf{H}_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)} &\left[\frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} dx \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient qui est en avant du crochet se calculera facilement en développant chaque facteur suivant les puissances de q ; on aura, avec une approximation suffisante, c'est-à-dire en négligeant q^4 ,

$$\begin{aligned} \Theta(0) &= 1 - 2q + \dots, \\ \Theta(i\omega) &= 1 - q \left(e^{\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} + e^{-\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} \right) + \dots, \\ \Theta_1(i\omega) &= 1 + q \left(e^{\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} + e^{-\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} \right) + \dots, \\ \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{H}_1(i\omega) &= \sqrt{q} \left(2 \cos \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + 2q^2 \cos \frac{3\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots \right) \left(2 \sin \frac{\pi i\omega}{2\mathbf{K}} - 2q^2 \sin \frac{3\pi i\omega}{2\mathbf{K}} + \dots \right) \\ &= \sqrt{q} (1 - 2q^2) 2 \sin \frac{\pi i\omega}{\mathbf{K}} + \dots \\ &= i\sqrt{q} (1 - 2q^2) \left(e^{\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} - e^{-\frac{\pi\omega}{\mathbf{K}}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Quant au crochet lui-même, on le calculera de la façon suivante : chacun des termes de la fonction \mathbf{V} peut, à un coefficient constant près que nous laissons de côté, s'écrire sous la forme $2 \cos \varphi'_0$, φ'_0 étant une fonction linéaire de l'argument désigné précédemment par φ_0 ; supposons \mathbf{V} réduit à ce seul terme; remplaçant $2 \cos \varphi'_0$ par $e^{i\varphi'_0} + e^{-i\varphi'_0}$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} &= \frac{\sqrt{q}}{i} \left[b_1 e^{(1+\alpha)i\varphi_0+i\varphi'_0} + b_1 e^{(1+\alpha)i\varphi_0-i\varphi'_0} \right. \\ &\quad \left. - a_1 e^{-(1-\alpha)i\varphi_0+i\varphi'_0} - a_1 e^{-(1-\alpha)i\varphi_0-i\varphi'_0} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Si donc ν'_0 est de la forme $\lambda' \nu_0 - A'$, λ' et A' étant des constantes, on aura

$$\int \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} dx$$

$$= -\sqrt[4]{q} \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \left[\frac{b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} e^{(1+\alpha)\nu_0+i\nu'_0} + \frac{b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} e^{(1+\alpha)\nu_0-i\nu'_0} \right. \\ \left. - \frac{a_1}{-(1-\alpha)+\lambda'} e^{-(1-\alpha)\nu_0+i\nu'_0} - \frac{a_1}{-(1-\alpha)-\lambda'} e^{-(1-\alpha)\nu_0-i\nu'_0} + \dots \right];$$

donc

$$- \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} dx$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{i} \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \left\{ \frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} e^{2i\nu_0+i\nu'_0} + \frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} e^{2i\nu_0-i\nu'_0} \right. \\ \left. + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)+\lambda'} e^{-2i\nu_0+i\nu'_0} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)-\lambda'} e^{-2i\nu_0-i\nu'_0} \right. \\ \left. - \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)+\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)+\lambda'} \right] e^{i\nu'_0} \right. \\ \left. - \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)-\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)-\lambda'} \right] e^{-i\nu'_0} + \dots \right\}.$$

Le terme $\frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \mathbf{V} dx$ se déduisant de celui que nous venons de calculer en changeant le signe et remplaçant i par $-i$, on voit immédiatement que la somme de ces deux termes, c'est-à-dire la quantité que nous avons en vue, sera, après les réductions faites,

$$\frac{2\sqrt{q}}{i} \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \left\{ \left[\frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)-\lambda'} \right] \cos(2\nu_0 + \nu'_0) \right. \\ \left. + \left[\frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)+\lambda'} \right] \cos(2\nu_0 - \nu'_0) \right. \\ \left. - \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)+\lambda'} + \frac{a_1^2}{-(1-\alpha)-\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)+\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)-\lambda'} \right] \cos \nu'_0 + \dots \right\}.$$

Pour abrégé, nous avons négligé dans ces formules tous les termes dépendant de a_3 et b_3 : ce qui pourra d'ailleurs se faire dans la plupart des cas, la fonction \mathbf{V} étant, en général, petite.

26. Enfin, pour terminer ce que nous avons à dire au sujet de l'équation qui nous occupe, il est nécessaire de faire avec M. Gylden deux remarques

de la plus haute importance, et qui nous permettront de pousser l'exactitude des calculs le plus loin possible.

En premier lieu, on conçoit que, quand on aura affaire aux équations de la seconde approximation et des suivantes, il pourra exister dans la fonction V , qui forme le second membre, des termes tels que $\gamma_0 \sin(g_0 \nu - \theta)$, g_0 étant une valeur approchée de la véritable valeur du coefficient g ; la dernière formule du précédent paragraphe permet de vérifier immédiatement que ces termes introduisent dans l'expression finale de z de petits diviseurs d'intégration, affectant des termes à très longue période; ils ont, par suite, une influence considérable sur la détermination exacte de la solution, et il est du plus haut intérêt de les éviter; c'est à quoi l'on parvient à l'aide de l'artifice suivant.

Ajoutons aux deux membres de l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + z[\beta_0 + \beta \cos(\lambda \nu + b)] = U$$

la même quantité $\Delta\beta_0 z$; mettant en évidence au second membre le terme dont nous voulons éliminer l'influence, il vient

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + [1 + \beta_0 + \Delta\beta_0 + \beta \cos(\lambda \nu + b)]z = \gamma_0 \sin(g_0 \nu - \theta) + \Delta\beta_0 z + U_1,$$

U_1 ne renfermant plus le terme en question. Au second membre, remplaçons z par $e_0 \sin(g_0 \nu - \theta) + z_1$, e_0 étant le coefficient du terme $\sin(g_0 \nu - \theta)$ dans la série qui représente la valeur approchée connue de z ; il est clair que z_1 sera une quantité très petite et qu'on pourra tout d'abord négliger, quitte à en tenir compte ensuite par les méthodes ordinaires. Déterminons maintenant la quantité $\Delta\beta_0$ par la condition

$$e_0 \Delta\beta_0 + \gamma_0 = 0;$$

on voit que le terme considéré a disparu au second membre de la nouvelle équation; cette nouvelle équation ne diffère d'ailleurs de l'ancienne que par une modification dans le coefficient β_0 . Lorsque les termes que nous venons d'envisager se présenteront, il faudra donc commencer par faire subir cette correction au coefficient β_0 .

En second lieu, nous avons annoncé que l'on pouvait éviter, dans l'intégration des équations successives qui déterminent des valeurs de z de plus

en plus approchées, l'introduction des termes séculaires; c'est cette assertion qu'il s'agit maintenant de mettre en lumière.

Il est manifeste tout d'abord qu'il faut distinguer dans la fonction V deux sortes de termes : ceux qui sont connus avant l'intégration et ceux qui sont multipliés par z , termes qui, nous l'avons déjà fait remarquer, sont de la forme

$$z \left(\alpha_4 \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \alpha_6 \cos 6 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots \right).$$

Les premiers termes, que nous avons envisagés plus haut, n'introduisent aucun terme séculaire dans la valeur de z ; il n'en est pas de même des autres. Si, en effet, nous remplaçons dans ceux-là z par sa valeur tirée de l'équation sans second membre

$$C_1 \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2 \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

et si nous ne conservons que les termes susceptibles de fournir dans l'expression finale de z des termes séculaires, nous voyons que notre attention doit se porter tout entière sur l'unique groupe suivant, où A désigne un facteur constant,

$$\begin{aligned} & A C_1 \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} \left(\alpha_4 \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots \right) dx, \\ & - A C_2 \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} \left(\alpha_4 \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots \right) dx. \end{aligned}$$

Or on a la formule

$$\frac{\mathbf{H}(x+i\omega)\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} = \frac{k\Theta^2(i\omega)}{\Theta^2(o)} (\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 i\omega)$$

et

$$\operatorname{sn}^2 x = \operatorname{const.} - \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 \frac{1}{k^2} \left(\frac{8q}{1-q^2} \cos 2 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \frac{16q^2}{1-q^4} \cos 4 \frac{\pi x}{2\mathbf{K}} + \dots \right).$$

On obtient, par suite, les termes séculaires suivants

$$x \sum \left[-A \alpha_s \left(\frac{\pi x}{2\mathbf{K}} \right)^2 \frac{\Theta^2(i\omega)}{k\Theta^2(o)} \frac{4sq^s}{1-q^s} \right] \left[C_1 \frac{\mathbf{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{\mathbf{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \right],$$

c'est-à-dire un groupe de la forme

$$Bx \left[C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \right].$$

Nous allons faire voir maintenant que, à l'aide d'une légère modification dans la valeur de ω , on peut se dispenser de tenir compte de ces termes. Si, en effet, dans la formule qui donne z , on augmente ω de $d\omega$, la valeur de z , prend un certain accroissement dz , dont la partie séculaire, il est facile de le vérifier, provient uniquement de la variation du coefficient $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ dans la partie de z qui est fournie par l'équation sans second membre. Si l'on n'a égard qu'à cette partie séculaire, on a

$$dz = -x \left[C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \right] \frac{d^2 \log \Theta(i\omega)}{i d\omega^2} d\omega;$$

il en résulte immédiatement que, en déterminant $d\omega$ par la formule

$$\frac{d^2 \log \Theta(i\omega)}{i d\omega^2} d\omega + B = 0,$$

on pourra, en introduisant dans toutes les formules précédentes $\omega + d\omega$ à la place de ω , faire abstraction des termes séculaires introduits par la considération des termes multipliés par z dans la fonction V. Il faudra d'ailleurs avoir soin de tenir compte des termes périodiques multipliés par $d\omega$, introduits par cette modification.

Remarquons enfin que nous avons pu, à bon droit, traiter $d\omega$ comme une différentielle, le coefficient B étant, comme on le voit immédiatement, extrêmement petit; il suffit de se reporter aux formules précédentes et à l'expression des coefficients α_s .

27. Revenant maintenant à l'équation (5) et aux formules (6) et (7), supposons qu'on se trouve dans le cas qui correspond à l'équation (13) du Chapitre I, c'est-à-dire que β_0 est, comme β_1 , de l'ordre de la masse perturbatrice; la formule (6) nous montre alors que $k^2 sn^2 \omega$ est très voisin de l'unité et que, selon les cas, on a $k^2 sn^2 \omega < 1$ ou $k^2 sn^2 \omega > 1$. Dans la première de ces hypothèses, ω est de la forme $K + ib$, b étant réel et voisin

de K' ; dans la seconde, ω est de la forme $a + iK'$, a étant réel et voisin de K .

Dans le cas intermédiaire, traité par M. Gylden, ω est égal à $K + iK'$; mais alors la solution de l'équation, telle qu'elle est fournie par la formule (7), devient illusoire; on se trouve dans l'un des cas où l'équation de Lamé s'intègre par les fonctions doublement périodiques proprement dites; d'ailleurs la solution contient un terme proportionnel à x .

Examinons rapidement ce qui distinguera les deux cas que nous venons de signaler de celui que nous avons traité dans les paragraphes précédents.

En premier lieu, soit $\omega = K + ib$; en partant des formules

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x + K + ib) &= \mathbf{H}_1(x + ib), \\ \frac{\Theta'(K + ib)}{\Theta(K + ib)} &= \frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)}, \end{aligned}$$

on voit que la valeur de z (en faisant abstraction du second membre) sera de la forme

$$(10) \quad z = C_1 \frac{\mathbf{H}_1(x + ib)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)} x} + C_2 \frac{\mathbf{H}_1(x - ib)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)} x}.$$

La comparaison de cette formule avec la formule (9) nous montre des analogies trop grandes entre les deux cas correspondants pour qu'il soit nécessaire de poursuivre en détail le développement de la formule (10).

Remarquons seulement que, b étant voisin de K' , la fonction $\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)}$ sera voisine de $\frac{\Theta'_1(iK')}{\Theta_1(iK')}$, c'est-à-dire de $-\frac{i\pi}{2K}$; la quantité qui correspond à ce que nous avons désigné précédemment par α sera donc voisine de -1 , ce qui introduit, on le voit immédiatement, dans la valeur de z des termes à longue période.

En second lieu, plaçons-nous dans l'hypothèse où ω est de la forme $a + iK'$. Partant des formules

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x + a + iK') &= i\Theta(x + a)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + 2a + iK')}, \\ \mathbf{H}(x - a - iK') &= -i\Theta(x - a)e^{\frac{i\pi}{4K}(2x - 2a - iK')}, \\ \frac{\Theta'(a + iK')}{\Theta(a + iK')} &= \frac{\mathbf{H}'(a)}{\mathbf{H}(a)} - \frac{i\pi}{2K}, \end{aligned}$$

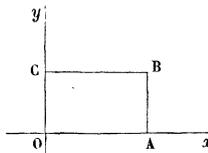
on voit que z peut se mettre sous la forme

$$(11) \quad z = C_1 \frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{H'(a)}{H(a)}x} + C_2 \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{H'(a)}{H(a)}x}.$$

De même que les formules (9) et (10) ont entre elles la plus grande analogie, de même celle-ci correspond à la formule (7) dans le cas que nous avons seul laissé de côté, celui où ω est réel. Dans ces deux cas, la solution de l'équation (5), telle que nous l'avons présentée, est à rejeter; car, comme le montrent les exponentielles réelles qui figurent dans les formules (7) et (9), les termes séculaires sont impossibles à éviter; il faudra recourir alors à d'autres méthodes. Hâtons-nous d'ajouter que ces deux cas se présenteront très rarement en Astronomie; sans exceptions, pour ainsi dire, les équations qu'on aura à intégrer se présenteront sous une forme permettant l'application de la méthode que nous venons d'exposer ou, tout au moins, pouvant se ramener sans difficulté à cette forme.

Si l'on représente la quantité ω dans un plan à la façon des variables complexes, selon les valeurs des constantes qui figurent dans la formule (6), son affixe pourra être un point quelconque du périmètre du parallélogramme OABC (*fig. 1*) de côtés $2K$, $2K'$ construit sur les axes. La mé-

Fig. 1.



thode que nous venons d'exposer ne sera avantageusement applicable que si ω est représenté par un point d'un des deux côtés verticaux OC, AB.



CHAPITRE IV.

28. Pour mieux faire comprendre les développements qui précèdent et mettre en lumière le progrès réalisé par M. Gylden, nous allons intégrer les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune, telles que nous les avons établies à la fin du Chapitre I.

Envisageons d'abord l'équation (14) qui détermine la latitude

$$\frac{d^2 s}{d\nu^2} - \frac{3}{2} \mu^2 \sin(\lambda\nu - A) \frac{ds}{d\nu} + s \left[1 + \frac{3}{2} \mu^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \cos(\lambda\nu - A) \right] = 0.$$

Nous réduirons cette équation à la forme canonique en posant

$$s = z e^{\frac{3}{4} \mu^2 \int \sin(\lambda\nu - A) d\nu} = z e^{\frac{3}{4} \frac{\mu^2}{\lambda} \cos(\lambda\nu - A)};$$

avec une exactitude suffisante on aura

$$s = z \left[1 - \frac{3\mu^2}{4\lambda} \cos(\lambda\nu - A) \right];$$

quant à l'équation réduite, ce sera, en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au troisième,

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + \left[1 + \frac{3}{2} \mu^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \cos(\lambda\nu - A) \right] z = 0;$$

en posant $U = 0$,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1 + \frac{3}{2} \mu^2, \\ \beta &= \frac{3}{2} \mu^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right), \end{aligned}$$

nous serons ramenés à l'équation (3) du Chapitre précédent, dont nous adopterons toutes les notations : disons tout de suite aussi qu'on pourra négliger le second membre introduit par la transformation qui ramène cette équation à l'équation de Lamé.

Les calculs sont effectués avec six décimales, afin de déterminer ω avec une précision suffisante.

Avec Laplace, faisons $\mu = 0,0748013$ (*Mécanique céleste*, Liv. VII, n° 16); comme nous l'avons fait remarquer déjà, ce nombre est différent de celui que, dans la théorie de M. Gylden, et après lui de M. Shdanow, joue le même rôle, et qui a pour valeur 0,0754383 : ceci provient de ce que le nombre que nous adoptons est le rapport de la durée de la révolution sidérale de la Lune à celle de la révolution du Soleil, tandis que le nombre adopté par M. Gylden est le rapport de la durée de la révolution anomalistique de la Lune à celle de la révolution sidérale du Soleil.

Nous avons

$\log \mu$	$\bar{2}, 873909$	$\log(\beta_0 - 1)$...	$\bar{3}, 923909$
$\log 1 - \mu = \log \frac{\lambda}{2}$...	$\bar{1}, 966235$	$\log \beta$	$\bar{2}, 208385$
$\log \lambda$	$0, 267265$		
$\log q$	$\bar{3}, 071795$		
$\log k$	$\bar{1}, 135910$	$\log \frac{2K}{\pi}$	$0, 002048$
$\log k'$	$\bar{1}, 995901$		
$\log \beta'_0$	$\bar{3}, 925878$		
$\log \operatorname{dn} i\omega$	$0, 033540$	$\frac{\pi}{4} - \varphi$	$2^\circ 20' 41'', 9$
$\log e^{\frac{\pi\omega}{2K}}$	$0, 770051$		
$\log e^{-\frac{\pi\omega}{2K}}$	$\bar{1}, 229949$		

$$g - 1 = 0, 004081.$$

La valeur exacte de cette quantité est $0, 004022$; nous la trouvons en première approximation avec une erreur égale à peu près à la soixante-dixième partie de sa valeur.

Achevant le calcul en ne conservant que cinq décimales, nous avons

$$\log b_1 = 0, 77004, \quad \log a_1 = \bar{1}, 21181;$$

les autres coefficients peuvent être négligés; finalement

$$z = \gamma \{ b_1 \sin(gv - \theta) + a_1 \sin[(\lambda v - A) - (gv - \theta)] \}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} s &= \gamma \left\{ \left(b_1 + \frac{3}{8} a_1 \frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sin(gv - \theta) + \left(a_1 + \frac{3}{8} b_1 \frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sin[\lambda v - A - (gv - \theta)] \right\} \\ &= \gamma [A_1 \sin(gv - \theta)] + B_1 \sin[\lambda v - A - (gv - \theta)], \end{aligned}$$

en faisant

$$\log A_1 = 0, 77005, \quad \log B_1 = \bar{1}, 22926.$$

Le rapport $\frac{B_1}{A_1}$ est précisément le coefficient désigné par Laplace par $B_1^{(0)}$ dans sa théorie de la Lune; il est ici égal à $0, 002879$; Laplace donne pour

sa valeur 0,002826 : la principale inégalité de la latitude de la Lune se trouve donc déterminée par une seule approximation, et sans aucune hypothèse préalable sur la forme analytique de s à un cinquantième près de sa valeur. Pour déterminer γ , qui est une constante d'intégration, nous ferons, notre but étant la comparaison de nos résultats avec ceux de Laplace : $\gamma A_1 = 0,0900807$; ce nombre est en effet le coefficient du terme $\sin(gv - \theta)$ dans la valeur de s donnée par Laplace; il vient ainsi

$$\log \gamma = \bar{2},18458,$$

et, si l'on pose

$$s = s_0 \sin(gv - \theta) + s_1 \sin[(\lambda v - A) - (gv - \theta)],$$

on a

$$\log s_0 = \bar{2},95463, \quad \log s_1 = \bar{3},41384.$$

29. Passons à la détermination du rayon vecteur; on a l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \left(\frac{12\mu^2}{\lambda^2 - 1} - \frac{3}{2}\mu^2 \right) \sin(\lambda v - A) \frac{d\rho}{dv} + \rho \left[1 - \frac{3}{2}\mu^2 - \left(\frac{9}{2}\mu^2 + \frac{12\lambda\mu^2}{\lambda^2 - 1} \right) \cos(\lambda v - A) \right] \\ = -\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\mu^2(1 + 3\rho') [1 + 3\cos(\lambda v - A)] - \frac{3}{2}\mu^2 E \sin(\lambda v - A) \\ + 3\mu^2 f(1 + 3\rho') \sin(\lambda v - A) dv + 3\mu^2 f E \cos(\lambda v - A) dv, \end{aligned}$$

en posant

$$E = -4f\rho' dv' \quad \text{et} \quad \rho' = \varepsilon' \cos(c'v' - \varpi').$$

Cette équation doit d'abord être réduite à la forme canonique. Posant

$$\rho = \varepsilon e^{\left(\frac{3}{4}\mu^2 - \frac{6\mu^2}{\lambda^2 - 1} \right) \int \sin(\lambda v - A) dv}$$

ou, avec une approximation suffisante,

$$\rho = \varepsilon \left[1 + \frac{3\mu^2}{\lambda} \left(\frac{2}{\lambda^2 - 1} - \frac{1}{4} \right) \cos(\lambda v - A) \right],$$

et, négligeant tous les termes d'ordre supérieur au quatrième, il vient, pour équation réduite, en posant $b = \pi - A$, et désignant par U le second membre

de l'équation précédente,

$$\frac{d^2 z}{d\nu^2} + z[\beta_0 + \beta \cos(\lambda\nu + b)] = U,$$

où $\beta_0 = 1 - \frac{3}{2}\mu^2$ et $\beta = \frac{3}{2}\mu^2 \left(3 - \frac{\lambda}{2} + \frac{12\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)$.

Calculons U. On a d'abord, en faisant $c' = 1$, en dehors du signe cos,

$$E = -4\varepsilon' \sin(c'\nu' - \varpi');$$

donc

$$\begin{aligned} U = & -\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^2 \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) \cos(\lambda\nu + b) - \frac{3}{2}\mu^2 \varepsilon' \cos(c'\nu' - \varpi') \\ & + \frac{3}{2}\mu^2 \varepsilon' \cos(c'\nu' - \varpi') \cos(\lambda\nu + b) - 6\mu^2 \varepsilon' \sin(c'\nu' - \varpi') \sin(\lambda\nu + b) \\ & - 3\mu^2 \varepsilon' f[3 \cos(c'\nu' - \varpi') \sin(\lambda\nu + b) - 4 \sin(c'\nu' - \varpi') \cos(\lambda\nu + b)] d\nu. \end{aligned}$$

Les termes du troisième ordre dans U sont d'une importance minime par le calcul exact de ρ ; mais leur influence est considérable pour la détermination exacte du temps. Comme on ne peut prétendre obtenir, dès la première approximation, une valeur exacte du temps, nous ne garderons dans U que les termes du second ordre, et ceux seulement du troisième qui ont la plus grande importance dans la détermination du temps, et en particulier de l'inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*.

En conséquence, nous ferons simplement

$$\begin{aligned} U = & -\frac{3}{4}s_0^2 - \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3}{4}s_0^2 \cos 2(g\nu - \theta) \\ & + \frac{3}{2}\mu^2 \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) \cos(\lambda\nu + b) - \frac{3}{2}\mu^2 \varepsilon' \cos(c'\nu' - \varpi'). \end{aligned}$$

D'ailleurs, il est nécessaire de le répéter, il ne faut pas s'attendre à obtenir avec une grande précision le coefficient de l'équation annuelle: on en aura seulement la partie principale; sur la détermination de ρ , au contraire, les termes que nous venons de négliger n'ont pas d'influence sensible au degré d'approximation que nous poursuivons.

Intégrons d'abord l'équation sans second membre; nous adoptons les notations du Chapitre III, en remplaçant toutefois les lettres g et θ , déjà employées, par c et $\varpi - \frac{\pi}{2}$.

Il vient alors

$$\begin{aligned}
 \log(1 - \beta_0) &= \bar{3},923909, \\
 \log \beta &= \bar{2},974494, \\
 \log q &= \bar{3},837883, & \log k &= \bar{1},509162, \\
 \log \frac{2\mathbf{K}}{\pi} &= 0,011878, & \log k' &= \bar{1},976079, \\
 \log \beta'_0 &= \bar{3},850915n, \\
 \log dni\omega &= 0,020341, & \frac{\pi}{4} - \varphi &= 2^\circ 7' 43'',57, \\
 \log e^{\frac{\pi\omega}{2\mathbf{K}}} &= 0,358297, \\
 \log e^{-\frac{\pi\omega}{2\mathbf{K}}} &= \bar{1},641703, & \log \alpha &= \bar{2},855637, \\
 1 - c &= 0,008447.
 \end{aligned}$$

La valeur exacte de cette quantité est 0,008452; l'erreur que nous avons commise est donc pour ainsi dire insensible, et nous obtenons avec une grande précision le mouvement du périégée lunaire.

Il vient ensuite

$$\begin{aligned}
 \log a_1 &= \bar{1},62584, & \log a_2 &= \bar{3},4790, \\
 \log b_1 &= 0,35772, & \log b_3 &= \bar{2},1803,
 \end{aligned}$$

de sorte que, abstraction faite des termes provenant de U, z se met sous la forme

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \{ & b_1 \cos(cv - \varpi) + a_1 \cos[\lambda v - \mathbf{A} - (cv - \varpi)] \\
 & - b_3 \cos[\lambda v - \mathbf{A} + (cv - \varpi)] - a_3 \cos[2(\lambda v - \mathbf{A}) - (cv - \varpi)] + \dots \},
 \end{aligned}$$

ε désignant comme ϖ une constante d'intégration.

Calculons maintenant les termes qui proviendront de l'action de U; la fonction V du Chapitre précédent est égale à $\frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \right)^2 U$; écrivant donc V sous la forme

$$2d_0 + 2d_2 \cos(2gv - 2\theta) + 2d_1 \cos(\lambda v + b) + 2d_3 \cos(c'v' - \varpi'),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 \log d_0 &= \bar{3},69132n, & \log d_2 &= \bar{3},52706, \\
 \log d_1 &= \bar{3},98489, & \log d_3 &= \bar{5},89232n;
 \end{aligned}$$

d_3 a été calculé en prenant pour ϵ' la valeur que donne Laplace, savoir

$$0,0016814.$$

Nous allons calculer les termes correspondant à V dans z , et, dans ce calcul, nous négligerons a_3 et b_3 , ainsi que nous l'avons expliqué au Chapitre précédent; il est en effet sans intérêt, dans cette approximation, de tenir compte de ces termes. Nous appliquerons donc simplement les formules données au Chapitre III.

Posons

$$A = \frac{2K}{\pi} \frac{\sqrt{q}}{i} \frac{\Theta^2(0) \Theta(i\omega)}{k' H(i\omega) H_1(i\omega) \Theta_1(i\omega)};$$

la partie de z due à V sera

$$A \left\{ \begin{aligned} & d_0 \left[\frac{2a_1^2}{1-\alpha} - \frac{2b_1^2}{1+\alpha} + 2a_1b_1 \left(\frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \cos(\lambda\nu + b) + \dots \right] \\ & + d_2 \left[\left(\frac{a_1^2}{1-\alpha - \frac{4g}{\lambda}} + \frac{a_1^2}{1-\alpha + \frac{4g}{\lambda}} - \frac{b_1^2}{1+\alpha + \frac{4g}{\lambda}} - \frac{b_1^2}{1+\alpha - \frac{4g}{\lambda}} \right) \cos(2g\nu - 2\theta) + \dots \right] \\ & + d_1 \left[\frac{a_1b_1}{1+\alpha} - \frac{a_1b_1}{1-\alpha} - \left(\frac{a_1^2}{1+\alpha} - \frac{a_1^2}{3-\alpha} + \frac{b_1^2}{3+\alpha} - \frac{b_1^2}{1-\alpha} \right) \cos(\lambda\nu + b) + \dots \right] \\ & + d_3 \left[\left(\frac{a_1^2}{1-\alpha - \frac{2c'\mu}{\lambda}} + \frac{a_1^2}{1-\alpha + \frac{2c'\mu}{\lambda}} - \frac{b_1^2}{1+\alpha + \frac{2c'\mu}{\lambda}} - \frac{b_1^2}{1+\alpha - \frac{2c'\mu}{\lambda}} \right) \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots \right] \\ & + \dots \end{aligned} \right\}$$

Les termes que nous avons omis sont sans influence pour le but que nous poursuivons.

Le coefficient A se calculera par les formules données dans le Chapitre précédent, et, en représentant la partie de z due à V par

$$a_0 + a_2 \cos 2(g\nu - \theta) + b_0 \cos(\lambda\nu - A) + b_2 \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \log A &= \bar{1}, 29123 n, \\ \log a_0 &= \bar{3}, 9384 n, & \log b_0 &= \bar{3}, 8716, \\ \log a_2 &= \bar{3}, 3009 n, & \log b_2 &= \bar{4}, 1548 n. \end{aligned}$$

Enfin on obtiendra la valeur de ρ par la formule

$$\rho = z \left[1 + \frac{3\mu^2}{\lambda} \left(\frac{2}{\lambda^2 - 1} - \frac{1}{4} \right) \cos(\lambda\nu - A) \right] = z [1 + 2\beta_1 \cos(\lambda\nu - A)],$$

où

$$\log \beta_1 = \bar{3}, 41636.$$

Donc, puisque

$$z = a_0 + a_2 \cos 2(g\nu - \theta) + b_0 \cos(\lambda\nu - A) + b_1 \varepsilon \cos(c\nu - \varpi) \\ + a_1 \varepsilon \cos[(\lambda\nu - A) - (c\nu - \varpi)] - b_3 \varepsilon \cos(\lambda\nu - A + c\nu - \varpi) + b_2 \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots,$$

le terme qui a pour coefficient $a_3 \varepsilon$ étant négligeable, il vient, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur,

$$\rho = a_0 + b_0 \beta_1 + a_2 \cos 2(g\nu - \theta) + (b_0 + 2a_0 \beta_1) \cos(\lambda\nu - A) \\ + b_1 \varepsilon + a_1 \beta_1 \varepsilon - b_3 \beta_1 \varepsilon \cos(c\nu - \varpi) + (a_1 \varepsilon + b_1 \beta_1 \varepsilon) \cos[\lambda\nu - A - (c\nu - \varpi)] \\ - (b_3 \varepsilon - b_1 \beta_1 \varepsilon) \cos[\lambda\nu - A + (c\nu - \varpi)] + b_2 \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots$$

ou

$$\rho = A_0 + A_1 \cos 2(g\nu - \theta) + A_2 \cos(\lambda\nu - A) + A_3 \cos(c'\nu' - \varpi') \\ + B_1 \varepsilon \cos(c\nu - \varpi) + B_2 \varepsilon \cos[\lambda\nu - A - (c\nu - \varpi)] + B_3 \varepsilon \cos[\lambda\nu - A + (c\nu - \varpi)] + \dots,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \log A_0 &= \bar{3}, 9374 n, & \log B_1 &= 0, 35792, \\ \log A_1 &= \bar{3}, 3009 n, & \log B_2 &= \bar{1}, 63191, \\ \log A_2 &= \bar{3}, 8690, & \log B_3 &= \bar{3}, 9639 n. \\ \log A_3 &= \bar{4}, 1548 n; \end{aligned}$$

30. Arrivons enfin à la détermination du temps, qui nous permettra, par la comparaison avec les observations, de déterminer des valeurs fort approchées des constantes ε et p , ce qui est le but principal de cette première approximation.

Nous avons

$$dt = \frac{d\nu}{hu^2 \sqrt{1 + 2 \int \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{d\nu}{h^2 u^2}}}$$

et

$$hu^2 = \sqrt{\mu_1 a p} \frac{(1 + \rho)^2}{\alpha^2 p^2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{a^3}} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} (1 + \rho)^2 = \frac{n}{p^{\frac{3}{2}}} (1 + \rho)^2.$$

Donc, en négligeant le carré de l'intégrale $\int \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{d\nu}{h^2 u^2}$, qui est du qua-

trième ordre,

$$\frac{ndt}{dv} = p^{\frac{3}{2}}(1+\rho)^{-2} \left(1 - \int \frac{\partial\Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} \right)$$

ou

$$\frac{ndt}{dv} = p^{\frac{3}{2}}(1-2\rho+3\rho^2-4\rho^3) \left(1 - \int \frac{\partial\Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} \right);$$

d'ailleurs, en faisant $\frac{p^3}{p'^3}$ égal à l'unité, comme nous l'avons fait jusqu'ici,

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} = -\frac{3}{2}\mu^2 \int (1+3\rho'-4\rho) \sin 2(\nu-\nu') d\nu;$$

nous ferons encore

$$2(\nu-\nu') = \lambda\nu - A,$$

négligeant E qui fournirait des termes du troisième ordre, il est vrai, mais dont les arguments $\lambda\nu - A \pm (c'\nu - \varpi')$ ont été négligés jusqu'ici; pour la même raison, nous négligerons le terme en ρ dans l'élément différentiel de l'intégrale précédente; en résumé, nous avons

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} = \frac{3}{2\lambda}\mu^2 \cos(\lambda\nu - A) + 6\mu^2 \int \rho \sin(\lambda\nu - A) d\nu$$

et nous réduirons d'ailleurs, dans la dernière intégrale, ρ à sa partie principale

$$A_0 + B_1\varepsilon \cos(c\nu - \varpi) + B_2\varepsilon \cos[(\lambda\nu - A) - (c\nu - \varpi)],$$

de sorte que finalement

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial\Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} &= \frac{3\mu^2}{2\lambda} (1-4A_0) \cos(\lambda\nu - A) - \frac{3\mu^2 B_2 \varepsilon}{c} \cos(c\nu - \varpi) \\ &\quad - \frac{3\mu^2 B_1 \varepsilon}{\lambda - c} \cos[(\lambda\nu - A) - (c\nu - \varpi)] - \frac{3\mu^2 B_1 \varepsilon}{\lambda + c} \cos[\lambda\nu - A + (c\nu - \varpi)] \\ &\quad - \frac{3\mu^2 B_2 \varepsilon}{2\lambda - c} \cos[2(\lambda\nu - A) - (c\nu - \varpi)] + \dots; \end{aligned}$$

on aura ensuite

$$\begin{aligned}
1 - 2\rho + 3\rho^2 - 4\rho^3 = & 1 - 2A_0 + 3A_0^2 + \frac{3}{2}A_2^2 + \frac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \frac{3}{2}B_2^2\varepsilon^2 + \dots \\
& - 2A_1 \cos 2(gv - \theta) - 2A_3 \cos(c'v' - \varpi') \\
& + (-2A_2 + 6A_0A_2 + 3B_1B_2\varepsilon^2 + 3B_1B_3\varepsilon^2) \cos(\lambda v - A) \\
& + (-2B_1\varepsilon + 6A_0B_1\varepsilon + 3A_2B_2\varepsilon + 3A_2B_3\varepsilon - 3B_1^3\varepsilon^3) \cos(cv - \varpi) \\
& + (-2B_2\varepsilon + 6A_0B_2\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon) \cos[\lambda v - A - (cv - \varpi)] \\
& + (-2B_3\varepsilon + 6A_0B_3\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon) \cos[\lambda v - A + (cv - \varpi)] \\
& + \frac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 \cos 2(cv - \varpi) + \dots
\end{aligned}$$

Finalement, en ne gardant que les termes dont les arguments sont 0, $cv - \varpi$, $2(cv - \varpi)$, $2(gv - \theta)$, $\lambda v - A$, $\lambda v - A - (cv - \varpi)$, $c'v' - \varpi'$, c'est-à-dire ceux qui fournissent les quatre grandes inégalités du mouvement de la Lune en longitude : équation du centre, évection, variation et équation annuelle, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{n dt}{dv} = p^{\frac{3}{2}} \left\{ & 1 - 2A_0 + 3A_0^2 + \frac{3}{2}A_2^2 + \frac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \frac{3}{2}B_2^2\varepsilon^2 + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)A_2 + \dots \right. \\
& + \cos(cv - \varpi) \left[-2B_1\varepsilon + 6A_0B_1\varepsilon + 3A_2B_2\varepsilon \right. \\
& \quad \left. + 3A_2B_3\varepsilon - 3B_1^3\varepsilon^3 + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)B_2\varepsilon \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)B_3\varepsilon + \frac{3\mu^2 B_2\varepsilon}{c}(1 - 2A_0) + \dots \right] \\
& + \cos 2(cv - \varpi) \left[\frac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \dots \right] + \cos 2(gv - \theta) [-2A_1] \\
& + \cos(\lambda v - A) \left[-2A_2 + 6A_0A_2 + 3B_1B_2\varepsilon^2 \right. \\
& \quad \left. + 3B_1B_3\varepsilon^2 - \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)(1 - 2A_0) + \dots \right] \\
& + \cos[\lambda v - A - (cv - \varpi)] \left[-2B_2\varepsilon + 6A_0B_2\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)B_1\varepsilon \right. \\
& \quad \left. + \frac{3\mu^2 B_1\varepsilon}{\lambda - c}(1 - 2A_0) + \dots \right] \\
& \left. + \cos(c'v' - \varpi') [-2A_3] + \dots \right\},
\end{aligned}$$

formule dans laquelle ont été omis les termes d'influence comparable à ceux négligés dans les calculs précédents.

La constante p sera déterminée de façon que le terme constant au second membre de cette équation soit égal à l'unité et la constante ε de façon que le terme en $\sin(c\nu - \varpi)$, dans l'expression de t , ait une valeur donnée, fournie par les observations, et qui est le maximum de l'équation du centre.

Pour comparer plus facilement notre résultat à celui de Laplace, je prends la formule même de Laplace, en ne gardant que les termes qui nous intéressent, savoir

$$\begin{aligned} nt + l = \nu - 69992'',30 \sin(c\nu - \varpi) + 1442'',66 \sin 2(c\nu - \varpi) \\ + 1255'',92 \sin 2(g\nu - \theta) - 5856'',11 \sin(\lambda\nu - \Lambda) \\ - 14461'',28 \sin[\lambda\nu - \Lambda - (c\nu - \varpi)] + 2106'',09 \sin(c'\nu' - \varpi') + \dots; \end{aligned}$$

ce sont d'ailleurs des secondes centésimales qui figurent dans cette formule; différentiant et convertissant les secondes en partie du rayon, il vient

$$\begin{aligned} n \frac{dt}{d\nu} = 1 - (\bar{1},03748) \cos(c\nu - \varpi) + (\bar{3},65263) \cos 2(c\nu - \varpi) \\ + (\bar{3},59788) \cos 2(g\nu - \theta) - (\bar{2},23100) \cos(\lambda\nu - \Lambda) \\ - (\bar{2},29025) \cos[\lambda\nu - \Lambda - (c\nu - \varpi)] + (\bar{4},3935) \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots, \end{aligned}$$

les nombres entre parenthèses désignant les logarithmes des coefficients.

Déterminant p et ε , comme nous venons de le dire, on trouve, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \log p^{\frac{3}{2}} = \bar{1},99045, \quad \log \varepsilon = \bar{2},37684, \\ \log B_1 \varepsilon = \bar{2},73476, \quad \log B_2 \varepsilon = \bar{2},00875. \end{aligned}$$

La formule que nous avons trouvée s'écrit alors

$$\begin{aligned} n \frac{dt}{d\nu} = 1 - (\bar{1},03748) \cos(c\nu - \varpi) + (\bar{3},6361) \cos 2(c\nu - \varpi) \\ + (\bar{3},5924) \cos 2(g\nu - \theta) - (\bar{2},2518) \cos(\lambda\nu - \Lambda) \\ + (\bar{2},2555) \cos[\lambda\nu - \Lambda - (c\nu - \varpi)] + (\bar{4},4463) \cos(c'\nu' - \varpi') + \dots \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que nous avons déterminé la variation à $\frac{1}{19}$ près de sa valeur, l'évection à $\frac{1}{13}$ près et l'équation annuelle à $\frac{1}{9}$ près; ces écarts n'ont rien qui doive nous surprendre, et l'on peut affirmer qu'il suffirait de faire une seconde approximation pour arriver, en conservant tous les termes nécessaires, à des résultats aussi précis que ceux de Laplace.

