ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

SALAH EDDINE ALLAOUI ET GÉRARD BOURDAUD

*Composition dans les espaces de Besov critiques*

Tome XXV, nº 4 (2016), p. 875-893.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2016_6_25_4_875_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXV, n° 4, 2016
pp. 875-893

# Composition dans les espaces de Besov critiques

Salah Eddine Allaoui[1], Gérard Bourdaud[2]

**Résumé.** — On considère les opérateurs de composition $T_f(g) := f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles. On suppose que les entiers $k, n$ vérifient $1 \leqslant k \leqslant n$, que $p, q \in [1, +\infty]$ et que $s = \dfrac{n}{p} > 1$. Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ telle que $T_f$ envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $\nabla f$ appartient localement uniformément à $B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. La même assertion est vraie en remplaçant $B^s_{p,q}$ par $F^s_{p,q}$.

**Abstract.** — We deal with the composition operators $T_f(g) := f \circ g$ acting on vector valued Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Let $k, n$ be natural numbers such that $1 \leqslant k \leqslant n$, let $p, q \in [1, +\infty]$, and let $s = \dfrac{n}{p} > 1$. If $f$ is a function of $\mathbb{R}^k$ to $\mathbb{R}$ such that $T_f$ takes $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ to $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, then $\nabla f$ belongs locally uniformly to $B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$. A similar statement holds by replacing $B^s_{p,q}$ by $F^s_{p,q}$.

## 1. Introduction

À toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on associe l'opérateur de composition $T_f(g) := f \circ g$. Soit $E$ un espace de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ *opère sur* $E$ si l'on a $T_f(E) \subset E$. Déterminer explicitement la classe

(*) Reçu le 03/07/2015, accepté le 14/12/2015

[1] Département de Mathématique et Informatique, Université de Laghouat, Laghouat 03000, Algérie
shallaoui@yahoo.fr
[2] Gérard Bourdaud, Université Paris Diderot, I.M.J. - P.R.G (UMR 7586), Bâtiment Sophie Germain, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13
bourdaud@math.univ-paris-diderot.fr

Article proposé par Xavier Tolsa.

des fonctions opérant sur un espace fonctionnel donné est un problème qui intéresse les analystes depuis les années 60. Kahane et Katznelson ont ouvert la voie en établissant la réciproque du théorème de Wiener-Lévy : seules les fonctions analytiques opèrent sur l'algèbre de Wiener, voir [21, 8.6]. Viennent ensuite le travail d'Igari [19] sur les espaces de Sobolev $H^s$ $(0 < s < 1)$ et celui de Marcus et Mizel [22] sur les espaces de Sobolev $W_p^1$. Cependant Dahlberg [18] avait mis en évidence un phénomène de trivialité : sur certains espaces de Sobolev $W_p^m$, seules les fonctions linéaires opèrent. Citons encore les contributions plus récentes de Kateb [20], Brezis et Mironescu [17], Maz'ya et Shaposnikova [23]. Le traité d'Appell et Zabrejko [3] reste une référence de base sur le sujet (voir aussi [2]).

Ici, nous considérons les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $s > 0$, dont les définitions seront rappelées dans la section 3. Nous posons $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer entre les deux types d'espaces. Par abus de langage, nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ opère sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ si l'opérateur $T_f$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

La caractérisation des fonctions qui opèrent sur $E^s_{p,q}$ est loin d'être complètement élucidée, y compris dans le cas simple $k = n = 1$, voir à ce sujet le livre de Runst et Sickel [25], ainsi que le travail de synthèse de W.Sickel et du second auteur [16]. On dispose cependant de conditions *nécessaires* pour que $f$ opère sur $E^s_{p,q}$ :

- la condition de Lipschitz — locale ou globale suivant que l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ se plonge ou non dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$,
- dans le cas $k \leqslant n$, l'appartenance locale à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)$,

voir [8, 12, 15, 11, 1]. Et n'oublions pas que le phénomène de trivialité de Dahlberg apparaît dans la zone $1 + \dfrac{1}{p} \leqslant s < \dfrac{n}{p}$, voir [4, 7, 1].

On se propose de compléter la liste des conditions nécessaires, en établissant le résultat suivant :

Théorème 1.1. — *On suppose $s = \dfrac{n}{p} > 1$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. On suppose de plus que les entiers $k, n$ vérifient $1 \leqslant k \leqslant n$. Si la fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ opère sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ alors $\nabla f$ appartient à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, localement uniformément.*

Voici quatre commentaires.

1. Ne pas se limiter au cas classique $k = 1$ n'est en rien d'une généralisation gratuite. Nous verrons en effet que la preuve du théorème 1.1 est nettement plus simple dans le cas $k = n$.
2. La condition $k \leqslant n$ joue ici un rôle essentiel. De façon générale, on sait peu de chose sur les opérateurs de composition dans le cas $k > n$, même dans le cas simple des espaces de Sobolev ordinaires, à valeurs complexes, sur $\mathbb{R}$ (i.e. $n = 1$, $s$ entier et $k = 2$), voir [13].
3. Le théorème 1.1 est en défaut pour les espaces critiques $B^{n/p}_{p,1}$ et $F^n_{1,q}$, car ce sont précisément ceux-là, et seulement ceux-là, qui se plongent dans $L_\infty$.
4. Dans le cas particulier des espaces de Sobolev ordinaires, autrement dit des espaces $F^m_{p,2}$, avec $m = n/p$ entier $\geqslant 2$, $1 < p < +\infty$ et $k = 1$, le théorème 1.1 a été établi en 1991 [5].

## Plan

La section 2 traitera de généralités sur la localisation, simple ou uniforme. Dans la section 3, on rappellera les définitions des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, ainsi que leurs propriétés en vue du théorème 1.1, lequel sera établi dans la section 4.

## Notations

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs, y compris 0. Nous notons $|x|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (sauf dans le cas d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, pour lequel on pose $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$). Nous notons $\mathbb{B}(a, r)$ la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$, dans $\mathbb{R}^n$. On désigne par $Q_n$ le cube unité $[-1, 1]^n$. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, respectivement, l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leqslant \psi_n \leqslant 1$, $\psi_n(x) = 1$ sur $Q_n/2$ et $\psi_n(x) = 0$ hors de $Q_n$. L'opérateur de translation $\tau_h$ et l'opérateur de différence finie $\Delta_h$ sont définis sur les distributions via les formules $(\tau_h f)(x) := f(x - h)$ et $\Delta_h f := \tau_{-h} f - f$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, toute fonction mesurable $f$ sur $\mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, on pose

$$\omega_p(f, t) := \sup_{h \in tQ_n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p},$$

$$\eta_p(f, t) := \sup_{h \in tQ_n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^2 f(x)\right|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$, de degré inférieur à $m$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, on note $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev homogène des fonctions $f$ telles que $f^{(\alpha)} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = m$. Comme d'habitude $c$ désignera une constante positive ne dépendant — sauf précision contraire — que des paramètres fixes $n, k, s, p, q$, et le cas échéant de diverses fonctions auxiliaires ; sa valeur peut changer d'une occurrence à l'autre.

## Préliminaires

On a regroupé dans cette section trois lemmes qui nous serviront dans la suite. Leurs preuves faciles sont seulement esquissées.

LEMME 1.2. — *Pour tout réel $a$ et tout $q \in ]1, +\infty]$, il existe une cons tante $c = c(a, q) > 0$ telle que*

$$\left( \int_0^{+\infty} (t^a h(t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \leqslant c \int_0^{+\infty} t^a h(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \,,$$

*pour toute fonction positive monotone $h$ sur* $]0, +\infty[$.

*Preuve.* — On découpe les intégrales en intervalles dyadiques $[2^j, 2^{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$. La monotonie de $h$ permet de se ramener à l'inégalité classique entre les normes $\ell_q$ et $\ell_1$.

LEMME 1.3. — *Soient $\theta \in ]0, 1[$ et $b > 0$. Il existe une fonction $\kappa$, de l'intervalle* $]0, +\infty[$ *dans lui-même, telle que*

$$\forall a > 0 \quad \forall t > 0 \quad \left( t \leqslant a(1 + bt^\theta) \Leftrightarrow t \leqslant \kappa(a) \right) \,.$$

*Preuve.* — Il suffit d'observer que la fonction

$$u(t) := t(1 + bt^\theta)^{-1}$$

est continue, strictement croissante, de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans lui-même, et qu'elle vérifie $u(0) = 0$, $u(+\infty) = +\infty$.

LEMME 1.4. — *Soit $0 < r < 1$. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$, à support compact, sur $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction*

$$F(x) := \sup_{t>0} t^{-r-n} \int_{tQ_n} |\Delta_h f(x)| \,\mathrm{d}h$$

*appartient à $L_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

*Preuve.* — Supposons le support de $f$ inclus dans $RQ_n$, pour un réel $R > 0$. Alors il existe $c = c(f) > 0$ tel que

$$\forall x \notin 2RQ_n \quad |F(x)| \leqslant c\,|x|^{-r-n}\,.$$

Puisque $f$ est bornée et de classe $C^1$, à gradient borné, il existe $c = c(f) > 0$ tel que $|\Delta_h f(x)| \leqslant c \min(1, |h|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On en déduit facilement que $F$ est bornée sur $2RQ_n$.

## 2. Localisation d'un espace de distribution

Un espace de Banach de distributions (E.B.D.) sur $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel $E$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète $\|-\|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue. On dit que l'espace $E$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-*module* si $\phi f \in E$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$. Du théorème du graphe fermé, on déduit l'énoncé suivant, voir [6] ou [9, chap. 3].

Proposition 2.1. — *Soit $E$ un E.B.D. sur $\mathbb{R}^n$. Si $E$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \phi f$ est borné sur $E$, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Sous les hypothèses de la proposition 2.1, on posera

$$\|\phi\|_{M(E)} := \sup\{\|\phi f\|_E \,:\, f \in E\,,\ \|f\|_E = 1\}\,.$$

Définition 2.2. — *Soit $E$ un E.B.D. sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartient localement à $E$ si $\phi f \in E$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des telles distributions est noté $E_{loc}$.*

On dispose de descriptions alternatives de $E_{loc}$, décrites dans l'énoncé suivant, dont la preuve est classique :

Proposition 2.3. — *Soit $E$ un E.B.D. sur $\mathbb{R}^n$. Si $E$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module et si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f \in E_{loc}$.*

*(ii) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a\varphi_0)\, f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.*

*(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte $B$, contenant $a$, et $g \in E$ tels que $g|_B = f|_B$.*

Un E.B.D. $E$ est *isométriquement invariant par translation* si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. Si $E$ est de plus un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, on a la propriété suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad \|\tau_a \phi\|_{M(E)} = \|\phi\|_{M(E)} \,. \tag{2.1}$$

PROPOSITION 2.4. — *Soit $E$ un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translation. Pour toute distribution $f$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a \varphi_0)\, f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0)\, f\|_E < +\infty \,.$$

*(ii) Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\tau_a \phi)\, f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \phi)\, f\|_E < +\infty \,.$$

*Preuve.* — Voir [9, p. 57]. □

Si une distribution $f$ satisfait l'une des deux conditions équivalentes de la proposition 2.4, on dit que $f$ appartient *localement uniformément* à $E$ ; l'ensemble de ces distributions est noté $E_{lu}$. Soit une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On montre facilement que $E_{lu}$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|f\|_{E_{lu}} := \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0)\, f\|_E \,.$$

De la preuve de la proposition 2.4, il résulte qu'à équivalence près, la norme de $E_{lu}$ ne dépend pas du choix de la fonction $\varphi_0$.

## 3. Définitions et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Il existe de nombreuses définitions équivalentes des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, qu'on trouvera par exemple dans les livres de H. Triebel [27, 26]. Nous adopterons ici celles qui nous semblent les mieux adaptées à la preuve du théorème 1.1.

## 3.1. Les espaces homogènes

DÉFINITION 3.1. — *Soient* $0 < s < 1$, $p, q \in [1, +\infty]$. *Alors l'espace de Besov homogène* $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* $f$ *vérifiant*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left( \int_0^{+\infty} (t^{-s} \omega_p(f,t))^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} < +\infty \,. \tag{3.1}$$

DÉFINITION 3.2. — *Soient* $0 < s < 1$, $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$. *Alors l'espace de Lizorkin-Triebel homogène* $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* $f$ *vérifiant*

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} \left( t^{-s-n} \int_{tQ_n} |\Delta_h f(x)| \mathrm{d}h \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} < +\infty. \tag{3.2}$$

On sait que les définitions 3.1 et 3.2 ne s'étendent pas telles quelles au cas $s = 1$. Pour définir $\dot{B}^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on doit, dans ces définitions, non seulement faire $s = 1$, mais encore remplacer la différence première $\Delta_h$ par la différence seconde $\Delta_h^2$ (dans le cas Besov, cela signifie donc remplacer $\omega$ par $\eta$). Pour $s > 1$, nos espaces seront définis naturellement par dérivation :

DÉFINITION 3.3. — *Soient* $s > 1$ *et* $m$ *l'entier tel que* $m < s \leqslant m+1$. *Alors* $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*) est l'ensemble des fonctions* $f$ *telles que respectivement*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{B}^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \,, \tag{3.3}$$

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \,. \tag{3.4}$$

Nous posons $\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ou $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer entre les deux types d'espaces. Ces espaces sont qualifiés d'homogènes en raison de l'importante propriété suivante :

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall f \in \dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \|f(\lambda(.))\|_{\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-(n/p)} \|f\|_{\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{3.5}$$

La fonctionnelle $\|-\|_{\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ n'est pas une norme, puisque $\|f\|_{\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$ si et seulement si $f \in \mathcal{P}_{[s]}$. Pour éliminer cette difficulté, il est utile d'introduire la notion suivante :

Définition 3.4. — *On dit qu'une distribution* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 *à l'infini, si on a*

$$\lim_{\lambda \to 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

Proposition 3.5. — *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $0 < s < n/p$. *Désignons par* $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des fonctions* $f \in \dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *qui tendent vers* 0 *au sens des distributions, suivant la définition précédente. Alors*

$$\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{P}_{[s]}\,.$$

*Muni de la* norme $\| - \|_{\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$, *l'espace* $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un E.B.D sur* $\mathbb{R}^n$, *et c'est un* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*-module, invariant isométriquement par translation.*

*Preuve.* — On se référera à [24], notamment la définition 1.1 et les théorèmes 1.2 et 6.2. □

*Remarque 3.6.* — Suivant la terminologie de [14, 24], $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une *réalisation* de l'espace homogène $\dot{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ .

### 3.2. Les espaces inhomogènes

Définition 3.7. — *Soient* $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. *L'espace de Besov inhomogène est*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)\,.$$

*Il est muni de la norme*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Définition 3.8. — *Soient* $s > 0$, $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$. *L'espace de Lizorkin-Triebel inhomogène est*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)\,.$$

*Il est muni de la norme*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Rappelons qu'on pose $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer entre les deux types d'espaces.

Proposition 3.9. — *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $0 < s < n/p$. *Alors* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *se plonge continûment dans* $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

*Preuve.* — Il suffit d'observer que toute fonction appartenant à $L_p(\mathbb{R}^n)$, avec $p < +\infty$, tend vers 0 à l'infini au sens des distributions. □

Rappelons enfin une inégalité d'interpolation classique, voir e.g. [27, 2.4.2, thm. 2, p. 186] :

Proposition 3.10. — *Pour tous* $s > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in ]0, 1[$, *il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\forall f \in F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{B^{s\theta}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\,\|f\|^{\theta}_{F^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)}\,\|f\|^{1-\theta}_{L_p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

## 3.3. Normes des produits tensoriels

Soit $k$ un entier tel que $1 \leqslant k < n$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Si $f, g$ sont des fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$, la fonction produit tensoriel $f \otimes g$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \quad (f \otimes g)(x_1, x_2) := f(x_1) g(x_2)\,.$$

Les différences premières et secondes des produits tensoriels obéissent aux règles de calcul suivantes. Pour tous $x = (x_1, x_2)$ et $h = (h_1, h_2)$, éléments de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, on a

$$(\Delta_{h_1} f \otimes g)(x) = \Delta_h (f \otimes g)(x) - f(x_1 + h_1)\,\Delta_{h_2} g(x_2)\,. \tag{3.6}$$

$$(\Delta^2_{h_1} f \otimes g)(x) = \Delta^2_h (f \otimes g)(x) - f(x_1 + 2h_1)\,\Delta^2_{h_2} g(x_2)$$
$$-2\Delta_{h_1} f(x_1 + h_1) \Delta_{h_2} g(x_2)\,. \tag{3.7}$$

Proposition 3.11. — *Si* $f, g$ *sont des fonctions définies respectivement sur* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{n-k}$, *on a*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)}\,\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \leqslant \|f \otimes g\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{3.8}$$

*Preuve.* — À tout $x \in \mathbb{R}^k$, on associe $\overline{x} := (x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^k$. On a $(f \otimes g)^{(\overline{\alpha})} = f^{(\alpha)} \otimes g$. Les formules (3.6) et (3.7) se simplifient en

$$\forall h \in \mathbb{R}^k \quad \Delta^r_{\overline{h}} \left( (f \otimes g)^{(\overline{\alpha})} \right) = \Delta^r_h (f^{(\alpha)}) \otimes g \tag{3.9}$$

pour $r = 1, 2$. Du théorème de Fubini et de la formule (3.9), il résulte que

$$\forall h \in \mathbb{R}^k \quad \|\Delta_h^r(f^{(\alpha)})\|_{L_p(\mathbb{R}^k)} \, \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} = \|\Delta_{\overline{h}}^r \left( (f \otimes g)^{(\overline{\alpha})} \right) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \, .$$

En prenant la borne supérieure pour les $h \in tQ_k$, on obtient

$$\forall t > 0 \quad \omega_p(f^{(\alpha)}, t) \, \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \leqslant \omega_p \left( (f \otimes g)^{(\overline{\alpha})}, t \right) \, .$$

La même estimation est satisfaite par $\eta_p$. L'inégalité (3.8) en résulte aussitôt. □

On ignore si l'estimation (3.8) se transpose aux espaces de Lizorkin-Triebel. Cependant on dispose de versions faibles de la proposition 3.11, qui seront suffisantes pour prouver le théorème 1.1.

Proposition 3.12. — *On suppose $s > 0$ non entier, $1 < p < +\infty$. Soit $m = [s]$. Il existe une constante $c = c(n, k, p) > 0$ telle que, pour toutes fonctions $f, g$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$, on a*

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)} \, \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \leqslant c \left( \|f \otimes g\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{W}^m_p(\mathbb{R}^k)} \, \|g\|_{\dot{F}^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})} \right) . \tag{3.10}$$

*Preuve.* — On utilisera l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood

$$M_n f(x) := \sup_{t>0} t^{-n} \int_{tQ_n} |f(x+h)| \, \mathrm{d}h$$

et l'inégalité maximale

$$\|M_n f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_{n,p} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \, . \tag{3.11}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que $|\alpha| = m$. La relation (3.6) nous conduit à l'inégalité $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} + \mathcal{C}$, où l'on a posé

$$\mathcal{A} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} \left( t^{m-s-n} \int_{tQ_n} |\Delta_{h_1}(f^{(\alpha)})(x_1) g(x_2)| \mathrm{d}h \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} ,$$

$$\mathcal{B} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} \left( t^{m-s-n} \int_{tQ_n} |\Delta_h(f^{(\alpha)} \otimes g)(x)| \mathrm{d}h \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} ,$$

$$\mathcal{C} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} \left( t^{m-s-n} \int_{tQ_n} |f^{(\alpha)}(x_1+h_1)\Delta_{h_2} g(x_2)| \mathrm{d}h \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \mathrm{d}x \right)^{1/p} .$$

Une double application du théorème de Fubini nous donne

$$\mathcal{A} = 2^{n-k} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \times$$

$$\times \left( \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_0^{+\infty} \left( t^{m-s-k} \int_{tQ_k} |\Delta_{h_1}(f^{(\alpha)})(x_1)| \mathrm{d}h_1 \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \mathrm{d}x_1 \right)^{1/p} .$$

Pour estimer $\mathcal{C}$, on observe que

$$t^{m-s-n} \int_{tQ_n} |f^{(\alpha)}(x_1+h_1)\, \Delta_{h_2} g(x_2)|\, \mathrm{d}h =$$

$$= \left( t^{-k} \int_{tQ_k} |f^{(\alpha)}(x_1+h_1)|\, \mathrm{d}h_1 \right) \left( t^{m-s-n+k} \int_{tQ_{n-k}} |\Delta_{h_2} g(x_2)|\, \mathrm{d}h_2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant M_k(f^{(\alpha)})(x_1) \left( t^{m-s-n+k} \int_{tQ_{n-k}} |\Delta_{h_2} g(x_2)|\, \mathrm{d}h_2 \right) .$$

En appliquant (3.11), on conclut que

$$\mathcal{C} \leqslant c\, \|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}\, \|g\|_{\dot{F}^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})} .$$

En sommant sur tous les $\alpha$, on obtient l'inégalité (3.10). □

Pour $s$ entier, la situation est encore un peu plus compliquée, du fait de l'utilisation des différences secondes.

Proposition 3.13. — *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $1 < p < +\infty$. Soit $\epsilon \in ]0,1[$. Il existe une constante $c = c(n,k,p,\epsilon) > 0$ telle que, pour toutes fonctions $f, g$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$, on a*

$$\|f\|_{\dot{F}^{m+1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)}\, \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \leqslant c \Big( \|f \otimes g\|_{\dot{F}^{m+1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{W}^m_p(\mathbb{R}^k)}\, \|g\|_{\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})} +$$

$$+ \|f\|_{\dot{B}^{m+\epsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^k)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left( \sup_{t>0} t^{\epsilon-1-n+k} \int_{tQ_{n-k}} |\Delta_{h_2} g(x_2)|\, \mathrm{d}h_2 \right)^p \mathrm{d}x_2 \right)^{1/p} \Big) .$$

*Preuve.* — Soit $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que $|\alpha| = m$. En utilisant la relation (3.7), on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^k)}\,\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})} \leqslant c\|(f\otimes g)^{(\overline{\alpha})}\|_{\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \mathcal{A} + 2\mathcal{B}\,,$$

où l'on a posé

$$\mathcal{A} := \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{-1-n}\int_{tQ_n}|f^{(\alpha)}(x_1+2h_1)\,\Delta^2_{h_2}g(x_2)|\,\mathrm{d}h\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{p/q}\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

$$\mathcal{B} := \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{-1-n}\int_{tQ_n}|\Delta_{h_1}(f^{(\alpha)})(x_1+h_1)\Delta_{h_2}g(x_2)|\,\mathrm{d}h\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{p/q}\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Pour estimer $\mathcal{A}$, on procède comme pour estimer $\mathcal{C}$ dans la preuve de la proposition 3.12. Il vient

$$\mathcal{A} \leqslant c\,\|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}\,\|g\|_{\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})}\,.$$

Pour estimer $\mathcal{B}$, on utilise le lemme 1.2, ce qui revient à remplacer $\mathcal{B}$ par

$$\mathcal{B}_1 := \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{+\infty}t^{-1-n}\int_{tQ_n}|\Delta_{h_1}(f^{(\alpha)})(x_1+h_1)\,\Delta_{h_2}g(x_2)|\,\mathrm{d}h\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Posons

$$G(x_2) := \sup_{t>0} t^{\epsilon-1-n+k}\int_{tQ_{n-k}}|\Delta_{h_2}g(x_2)|\,\mathrm{d}h_2\,.$$

Il vient

$$\mathcal{B}_1 \leqslant \|G\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})}\left(\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_0^{+\infty}t^{-\epsilon-k}\int_{tQ_k}|\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)|\,\mathrm{d}h\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Pour tout $h = (h_1,\ldots,h_k) \in \mathbb{R}^k$, on pose $|h|_\infty = \max(|h_1|,\ldots,|h_k|)$. On a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_0^{+\infty}t^{-\epsilon-k}\int_{tQ_k}|\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)|\,\mathrm{d}h\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$= (\epsilon+k)^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)||h|_\infty^{-\epsilon-k}\,\mathrm{d}h\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$\leqslant (\epsilon+k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}|h|_\infty^{-\epsilon-k}\,\mathrm{d}h$$

$$=(\epsilon+k)^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^k}\|\Delta_h(f^{(\alpha)})\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}|h|_\infty^{-\epsilon-k}\,\mathrm{d}h\right).$$

La dernière expression est estimée par $\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{B}^{\epsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^k)}$, ce qui permet de conclure. □

Dans l'application que nous ferons des deux propositions précédentes, la situation sera plus simple, car on supposera $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-k})$.

Corollaire 3.14. — *Soit $s>0$, $1<p<+\infty$. Il existe $\epsilon>0$, $c=c(n,k,p,\epsilon)>0$ et une semi-norme $N$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-k})$, invariante par translation, tels que, pour toutes fonctions $f\in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)$ et $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-k})$, on a*

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)}\,\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})}\leqslant c\,\|f\otimes g\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}+N(g)\,\|f\|_{B^{s-\epsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^k)}\,.$$

*Preuve.* — Supposons d'abord $s$ non entier. On pose $m=[s]$ et $\epsilon=s-m$. On définit la semi-norme $N$ par

$$N(g):=\|g\|_{\dot{F}^{\epsilon}_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})}\,.$$

L'inégalité souhaitée résulte alors de la proposition 3.12 et des plongements classiques :

$$B^{s-\epsilon}_{p,1}=B^m_{p,1}\hookrightarrow W^m_p\hookrightarrow\dot{W}^m_p\,.$$

Supposons maintenant $s$ entier. On pose $m=s-1$ et $\epsilon=1/2$. On définit la semi-norme $N$ par

$$N(g):=\|g\|_{\dot{F}^1_{p,q}(\mathbb{R}^{n-k})}+\left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}}\left(\sup_{t>0}t^{-(1/2)-n+k}\int_{tQ_{n-k}}|\Delta_{h_2}g(x_2)|\,\mathrm{d}h_2\right)^p\mathrm{d}x_2\right)^{1/p}.$$

Le fait que $N$ soit une semi-norme sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ résulte du lemme 1.4. L'invariance de $N$ par translation se vérifie aisément. L'inégalité souhaitée résulte de la proposition 3.13 et des plongements :

$$B^{s-(1/2)}_{p,1}\hookrightarrow W^{s-1}_p\hookrightarrow\dot{W}^m_p\,,$$

$$B^{s-(1/2)}_{p,1}=B^{m+(1/2)}_{p,1}\hookrightarrow\dot{B}^{m+(1/2)}_{p,1}\,.$$

### 3.4. Les espaces à valeurs vectorielles

On désigne par $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^k \\ & x & \mapsto & (f_1(x),\ldots,f_k(x)) \end{array}$$

pour lesquelles les fonctions coordonnées $f_1,\ldots,f_k$ appartiennent à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, la norme de $f$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ étant définie par $\left(\sum_{j=1}^{k}\|f_j\|^2_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2}$.

## 4. Preuve du théorème 1.1

*Notation.* — Dans cette section, pour $x\in\mathbb{R}^n$, on pose $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$.

La preuve du théorème 1.1 repose sur des techniques classiques, mises en oeuvre par exemple dans les articles [5, 8, 13, 15]. La première idée, c'est qu'en un sens tout opérateur de composition est borné dès qu'il est défini. La seconde — spécifique aux espaces qui ne sont pas plongés dans $L_\infty$ — c'est l'existence de fonctions de test plates au voisinage de l'origine et dont les normes sont arbitrairement petites. On se limitera au cas $k<n$. Pour $k=n$, la preuve est nettement plus simple, puisque les estimations de produits tensoriels sont sans utilité (les détails sont laissés au lecteur).

Soient donc $s=n/p>1$, $q>1$ (dans le cas Besov), $p>1$ (dans le cas L-T). Soit $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $T_f$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Dans un travail antérieur [1], on a établi que $f$ est lipschitzienne et que $f$ appartient localement à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)$. Soit un entier $j$ tel que $1\leqslant j\leqslant k$. On va maintenant prouver que $\partial_j f$ appartient à $E^{s-1}_{p,q}$ localement uniformément.

D'un lemme classique, voir [1, lem. 3.6], ou [10, lem. 1], résulte l'existence de $c_1,c_2>0$ tels que

$$\|g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)}\leqslant c_1 \quad\Rightarrow\quad \|f\circ g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c_2\,, \tag{4.1}$$

pour toute fonction $g\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ dont le support est inclus dans $2Q_n$.

Considérons maintenant une suite $(\gamma_\nu)_{\nu\geqslant 0}$ de fonctions de classe $C^\infty$, portées par $2Q_n$, telles que $\gamma_\nu(x)=1$ sur le cube $2^{-\nu}Q_n$ et

$$\lim_{\nu\to+\infty}\|\gamma_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=0\,, \tag{4.2}$$

voir par exemple [1, lem. 2.11]. On définit la fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ par

$$\phi(x) := \psi_n\left(\frac{x}{2}\right) x_1 \,.$$

Par définition de $\psi_n$, on a

$$\forall x \in Q_n \quad \phi(x) = x_1 \,. \tag{4.3}$$

Pour $a \in \mathbb{R}^k$, on définit la fonction $g_a$ par

$$g_a(x) := b\phi(2^\nu x) + \gamma_\nu(x)a \,. \tag{4.4}$$

On peut déterminer $b > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\forall a \in \mathbb{R}^k \quad \|g_a\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \leqslant c_1 \,. \tag{4.5}$$

Il suffit pour cela de définir $b$ par l'égalité

$$2b\|\phi\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = c_1 \,,$$

puis, grâce à la propriété (4.2), de choisir $\nu = \nu(a) \geqslant 0$ tel que

$$2|a|\|\gamma_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_1 \,.$$

L'estimation (4.5) résulte alors de la propriété (3.5), compte tenu de la condition $s = n/p$.

De la propriété (4.3) et du choix de la fonction $\gamma_\nu$, il résulte que $\phi(2^\nu x) = 2^\nu x_1$ et $\gamma_\nu(x) = 1$, pour tout $x \in 2^{-\nu}Q_n$. En conséquence

$$\forall x \in 2^{-\nu}Q_n \quad \partial_j(f \circ g_a)(x) = b2^\nu\, \partial_j f(2^\nu b x_1 + a)$$

et donc

$$\partial_j(f \circ g_a)(x)\psi_k(2^\nu x_1)\psi_{n-k}(2^\nu x_2) = b2^\nu\, \partial_j f(2^\nu b x_1 + a)\psi_k(2^\nu x_1)\psi_{n-k}(2^\nu x_2)\,, \tag{4.6}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$. On introduit alors les fonctions

$$u_a(y_1) := \partial_j f(y_1)\psi_k(b^{-1}(y_1 - a))\,,$$

$$v_a(y) := \partial_j(f \circ g_a)(b^{-1}(y_1 - 2^{-\nu}a), y_2)\,,$$

$$w_a(y) := \psi_k(b^{-1}(y_1 - a))\psi_{n-k}(y_2)\,.$$

L'identité (4.6) s'écrit encore

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad u_a(y_1)\psi_{n-k}(y_2) = b^{-1}2^{-\nu}v_a(2^{-\nu}y)w_a(y)\,. \tag{4.7}$$

Du fait que $f$ appartient localement à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^k)$, il résulte que $u_a$ appartient à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)$. Puisque $f$ est lipschitzienne, on a $\partial_j f \in L_\infty$ et

$$\|u_a\|_{L_p(\mathbb{R}^k)} \leqslant b^{n/p}\|\partial_j f\|_\infty \|\psi_k\|_{L_p(\mathbb{R}^k)}\,. \tag{4.8}$$

Compte tenu de la proposition 3.5 et de la relation (2.1) appliquée à $E := \mathcal{E}^s_{p,q}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}^k \quad \forall \chi \in \mathcal{E}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \|w_a\,\chi\|_{\dot{E}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\,\|\chi\|_{\dot{E}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{4.9}$$

Grâce à (4.5), à (4.1), et à la proposition 3.9, il vient

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k} \|v_a\|_{\dot{E}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\,. \tag{4.10}$$

Pour terminer la preuve, on va traiter successivement les espaces de Besov et ceux de Lizorkin-Triebel.

<u>Le cas des espaces de Besov.</u>

En combinant la proposition 3.11 et les propriétés (3.5), (4.7) et (4.9), il vient

$$\|u_a\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} \leqslant C\,\|\psi_{n-k}\|^{-1}_{L_p(\mathbb{R}^{n-k})}\,b^{-1}\|v_a\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Alors la propriété (4.10) nous donne

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k} \|u_a\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} < +\infty\,.$$

En combinant cette dernière propriété à (4.8), il vient

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k} \|u_a\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} < +\infty\,,$$

ce qui signifie que $\partial_j f$ appartient localement uniformément à $B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)$.

<u>Le cas des espaces de Lizorkin-Triebel.</u>

On utilise à nouveau (4.7), (4.9), ainsi que le corollaire 3.14. Il existe $\epsilon > 0$ et une constante $c = c(f) > 0$ tels que

$$\forall a \in \mathbb{R}^k \quad \|u_a\|_{\dot{F}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} \leqslant c\,\big(\|v_a\|_{\dot{F}^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \|u_a\|_{B^{s-1-\epsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^k)}\big)\,.$$

En combinant la proposition 3.10 et les estimations (4.8) et (4.10), on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^k \quad \|u_a\|_{F^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} \leqslant c\,(1 + \|u_a\|^{\theta}_{F^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)})\,,$$

où $\theta := (s-1-\epsilon)(s-1)^{-1} \in ]0,1[$. Grâce au lemme 1.3, on en déduit que

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k} \|u_a\|_{F^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)} < +\infty\,,$$

ce qui signifie que $\partial_j f$ appartient localement uniformément à $F^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)$.

## 5. Conclusion

Il y a plusieurs prolongements possibles de ce travail. Nous les mentionnerons par ordre de difficulté croissante.

1. Peut-on décrire les espaces $E^s_{p,q,lu}$ concrètement, c'est-à-dire sans utiliser une fonction auxiliaire $\varphi_0$ comme dans la section 2 ? Rappelons que, pour les espaces $L_{p,lu}$, une telle description est bien connue. On se fixe une boule ouverte (ou un cube ouvert) $B$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors une fonction mesurable $f$, sur $\mathbb{R}^n$, appartient à $L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty$$

et l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.

2. Les normes homogènes jouent un rôle fondamental dans la preuve du théorème 1.1. On peut dès lors se demander s'il n'existe pas une "version homogène" de ce théorème. Les travaux antérieurs sur les espaces de Sobolev homogènes [13] accréditent l'idée suivante : *si on excepte les cas $s < 1 + (1/p)$ et $s = n/p$, il n'existe pas d'opérateur de composition non trivial sur $\dot{E}^s_{p,q}$, et ceci même en se restreignant à une réalisation de $\dot{E}^s_{p,q}$.* Il reste donc une chance de transposer le théorème 1.1 à l'espace critique réalisé $\mathcal{E}^{n/p}_{p,q}$, défini comme l'ensemble des fonctions dont les dérivées premières appartiennent à $\mathcal{E}^{(n/p)-1}_{p,q}$.

3. La réciproque du théorème 1.1 est une question ouverte, que nous énonçons ci-dessous comme une conjecture.

   **Conjecture** *En supposant que $n, k, s, p, q$ vérifient les mêmes conditions que dans le théorème 1.1, une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ opère sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :*

– *$f(0) = 0$ ;*
– *$f$ est lipschitzienne ;*
– *$\nabla f$ appartient localement uniformément à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$.*

Dans le cas particulier des espaces de Sobolev ordinaires, autrement dit des espaces $F^m_{p,2}$, avec $m = n/p$ entier $\geqslant 2$, $1 < p < +\infty$ et $k = 1$, la conjecture ci-dessus a été prouvée il y a plus de vingt ans, voir [5, 13].

## Bibliographie


[1] Allaoui (S.E.). — Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. Annales mathématiques Blaise Pascal 16, p. 399-429 (2009).
[2] Appell (J.), Guanda (N.), Merentes (N.) and Sanchez (J.L.). — Some boundedness and continuity properties of nonlinear composition operators : a survey. Communications in Applied Analysis 15, p. 153-182 (2011).
[3] Appell (J.) and Zabrejko (P.). — Nonlinear superposition operators. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
[4] Bourdaud (G.). — Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers. Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay (1983).
[5] Bourdaud (G.). — Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Invent. Math. 104, p. 435-446 (1991).
[6] Bourdaud (G.). — Localisations des espaces de Besov. Studia Math. 90, p. 153-163 (1988).
[7] Bourdaud (G.). — La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 314, p. 187-190 (1992).
[8] Bourdaud (G.). — Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel. Ann. I. H. Poincaré - AN 10, p. 413-422 (1993).
[9] Bourdaud (G.). — Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2ème édition, Pub. Math. Univ. Paris 7 23 (1995).
[10] Bourdaud (G.). — Superposition Operators in Zygmund and $BMO$ spaces, in : D. Haroske, T. Runst, H.-J. Schmeisser (Eds.), Proceedings on "Function Spaces, Differential Operators and Non Linear Analysis", Birkhäuser, Basel , p. 59-74 (2003).
[11] Bourdaud (G.). — Une propriété de composition dans l'espace $H^s$ (II). C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342, p. 243-246 (2006).
[12] Bourdaud (G.). — Le calcul symbolique dans certaines algèbres de type Sobolev. In : Recent Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (eds), Birkhäuser, p. 131-144 (2010).
[13] Bourdaud (G.). — Superposition in homogeneous and vector valued Sobolev spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 362, p. 6105-6130 (2010).
[14] Bourdaud (G.). — Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Nachr. 286, p. 476-491 (2013).
[15] Bourdaud (G.) and Lanza de Cristoforis (M.). — Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras. Studia Math. 184, p. 271-298 (2008).
[16] Bourdaud (G.) and Sickel (W.). — Composition operators on function spaces with fractional order of smoothness. RIMS Kokyuroku Bessatsu B26, p. 93-132 (2011).

[17] Brezis (H.) and Mironescu (P.). — Gagliardo-Nirenberg, compositions and products in fractional Sobolev spaces. J. Evol. Equ. 1, p. 387-404 (2001).
[18] Dahlberg (B.E.J.). — A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35,1, p. 183-185 (1979).
[19] Igari (S.). — Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, p. 525-536 (1965).
[20] Kateb (D.). — Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. 128, p. 735-743 (1999).
[21] Katznelson (Y.). — An introduction to Harmonic Analysis. 3rd ed. Dover Publications, New-York (2002).
[22] Marcus (M.) and Mizel (V.J.). — Complete characterization of functions which act via superposition on Sobolev spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 251, p. 187-218 (1979).
[23] Maz'ya (V.G.) and Shaposnikova (T.O.). — An elementary proof of the Brezis and Mironescu theorem on the composition operator in fractional Sobolev spaces. J. Evol. Equ. 2, p. 113-125 (2002).
[24] Moussai (M.). — Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and an application to pointwise multipliers. Analysis and Appl. 13, p. 149-183 (2015).
[25] Runst (T.) and Sickel (W.). — Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin, 1996. Birkhäuser, Basel (1983).
[26] Triebel (H.). — Theory of Function Spaces II. Birkhäuser, Basel (1992).
[27] Triebel (H.). — Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, (2nd edition). J.A.Barth, Heidelberg, Leipzig (1995).