Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Henry Bourget

Sur l’attraction des ellipsoïdes homogènes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 1, nº 4 (1899), p. 465-468
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1899_2_1_4_465_0>

SUR

L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES HOMOGÈNES,

PAR M. HENRY BOURGET,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences,
et Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Toulouse.

1. On sait que Maclaurin a démontré que les potentiels d'un même point, relativement à deux ellipsoïdes homofocaux, sont proportionnels aux masses de ces ellipsoïdes.

D'autre part, considérant une fonction continue de x, y, z, en tous les points intérieurs à une surface fermée S, on sait qu'on appelle *valeur moyenne de* $f(x, y, z)$ *à l'intérieur de* S, l'expression

$$\mathfrak{M}\, f(x, y, z) = \frac{\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\int\int\int dx\, dy\, dz},$$

les intégrales qui figurent dans cette formule étant étendues à tout l'intérieur de la surface S. Cela étant, il est clair qu'on peut énoncer la proposition de Maclaurin en disant que la valeur moyenne de la fonction

$$\frac{1}{r}, \qquad [\text{où} \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2],$$

à l'intérieur de l'ellipsoïde, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

ne varie pas si l'on remplace cet ellipsoïde par l'un quelconque de ses ellipsoïdes homofocaux, ne contenant pas le point (a, b, c) à son intérieur.

Sous cette forme, ce théorème a été rencontré par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XXIX, p. 341) comme corollaire d'une proposition générale peu connue sur la valeur moyenne d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un ellipsoïde.

Nous nous proposons, dans cet article, de démontrer la proposition de Cauchy, en suivant une méthode développée par Tisserand pour démontrer le théorème dans le cas restreint de la fonction $\frac{1}{r}$.

2. Considérons d'abord un polynome sphérique de degré n entier et positif

$$V_n(x, y, z) = \sum C_{i,j,k} x^i y^j z^k \qquad (i + j + k = n),$$

et proposons-nous d'évaluer sa valeur moyenne à l'intérieur de l'ellipsoïde

$$(S) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

A cet effet, remplaçons dans la valeur moyenne $\mathfrak{M}\, V_n(x, y, z)$, $V_n(x, y, z)$ par son expression explicite en x, y, z et prenons les valeurs moyennes de chaque terme.

Remarquons d'abord que la valeur moyenne d'un terme

$$C_{i,j,k} x^i y^j z^k,$$

où l'un des trois membres i, j, k est impair, est nulle, car elle se compose de parties qui se détruisent deux à deux; ce qui nous montre que l'on doit supposer n pair ainsi que les trois nombres entiers i, j, k. Nous poserons donc

$$n = 2p, \qquad i = 2\alpha, \qquad j = 2\beta, \qquad k = 2\gamma.$$

Observons, en outre, que $V_{2p}(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\Delta V_{2p} = 0,$$

il en résulte des relations linéaires entre les coefficients $C_{2\alpha,2\beta,2\gamma}$.

On les obtient en substituant les dérivées de V_{2p} dans l'équation de Laplace et en écrivant que les termes semblables ont un coefficient nul. On trouve ainsi, en écrivant que le coefficient du terme en $x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}$ est nul, la relation

$$\begin{aligned}&(2\alpha + 2)(2\alpha + 1) C_{2\alpha+2,2\beta,2\gamma} \\ &\quad + (2\beta + 2)(2\beta + 1) C_{2\alpha,2\beta+2,2\gamma} + (2\gamma + 2)(2\gamma + 1) C_{2\alpha,2\beta,2\gamma+2} = 0,\end{aligned}$$

où l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = p.$$

D'autre part, on trouve, sans effort, en utilisant une intégrale classique

$$\mathfrak{M}\, C_{2\alpha,2\beta,2\gamma} x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}$$
$$= C_{2\alpha,2\beta,2\gamma} \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1).1.3.5\ldots(2\beta-1).1.3.5\ldots(2\gamma-1)}{5.7.9\ldots(2p+3)} a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma}.$$

On a donc

$$\mathfrak{M}\, V_{2p}(x, y, z) = \sum C_{2\alpha,2\beta,2\gamma} \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1).1.3.5\ldots(2\beta-1).1.3.5\ldots(2\gamma-1)}{5.7.9\ldots(2p+3)} a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma}.$$

Pour démontrer la proposition en question, il faut montrer que cette valeur moyenne $\mathfrak{M}\, V_{2p}$ est de la forme

$$\mathfrak{F}(b^2 - c^2,\ c^2 - a^2,\ a^2 - b^2),$$

ou bien, ce qui revient au même, que la valeur moyenne est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial(a^2)} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial(b^2)} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial(c^2)} = 0.$$

Or, substituons l'expression trouvée de la valeur moyenne, dans cette dernière équation, et écrivons que cette équation est satisfaite. Nous obtenons ainsi des relations linéaires entre les coefficients C. La relation qui correspond au terme en $x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}$ est

$$\begin{aligned}
&C_{2\alpha+2,2\beta,2\gamma}(\alpha+1) \frac{1.3.5\ldots(2\alpha+1).1.3.5\ldots(2\beta-1).1.3.5\ldots(2\gamma-1)}{5.7.9\ldots(2p+3)} \\
&+ C_{2\alpha,2\beta+2,2\gamma}(\beta+1) \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1).1.3.5\ldots(2\beta+1).1.3.5\ldots(2\gamma-1)}{5.7.9\ldots(2p+3)} \\
&+ C_{2\alpha,2\beta,2\gamma+2}(\gamma+1) \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1).1.3.5\ldots(2\beta-1).1.3.5\ldots(2\gamma+1)}{5.7.9\ldots(2p+3)} = 0,
\end{aligned}$$

qui n'est autre que la relation écrite plus haut multipliée par le facteur différent de zéro

$$\frac{1}{2}\, \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1).1.3.5\ldots(2\beta-1).1.3.5\ldots(2\gamma-1)}{5.7.9\ldots(2p+3)},$$

et qui, par conséquent, est satisfaite. Donc la proposition est démontrée pour un polynome sphérique $V_n(x, y, z)$, n étant entier et positif.

3. Il s'en suit immédiatement que la même propriété subsiste pour toute fonction harmonique, pouvant se représenter par une série de la forme

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots,$$

uniformément convergente dans un domaine sphérique comprenant l'ellipsoïde (S) à son intérieur, à condition que l'ellipsoïde homofocal à (S) ne soit pas tel que V devienne discontinue à son intérieur.

4. On retombe sur le théorème de Maclaurin en prenant pour V la fonction $\frac{1}{r}$ qui est développable en une série uniformément convergente

$$\frac{1}{\rho} + \frac{V_1}{\rho^2} + \frac{V_2}{\rho^3} + \ldots + \frac{V_n}{\rho^{n+1}} + \ldots,$$

ρ désignant la distance du point attiré, au centre de l'ellipsoïde.

On retrouve d'ailleurs, dans ce cas, la démonstration même de Tisserand. (*Mémoires de l'Académie de Toulouse,* 1875.)