ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Camille Laurent-Gengoux et Mohsen Masmoudi

Infinis morphismes de Leibniz pour les crochets dérivés

Tome XXX, nº 1 (2021), p. 1–31.

https://doi.org/10.5802/afst.1664

Publication membre du centre
Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
http://www.centre-mersenne.org/

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXX, n° 1, 2021
pp. 1-31

Infinis morphismes de Leibniz pour les crochets dérivés [(*)]

Camille Laurent-Gengoux [(1)] et Mohsen Masmoudi [(2)]

Résumé. — Il est connu que le crochet dérivé d'un élément de Maurer–Cartan d'une algèbre de Lie différentielle graduée (DGLA) définit une algèbre de Leibniz différentielle graduée. Il est connu aussi qu'un morphisme de Lie-infini entre DGLAs envoie un élément de Maurer–Cartan sur un autre élément de Maurer–Cartan. Étant donnés un morphisme Lie-infini, un élément de Maurer–Cartan et son image, nous construisons entre leurs algèbres de Leibniz différentielles graduées un morphisme de Leibniz infini, et ce de façon totalement explicite. Nous utilisons cette construction pour retrouver une formule de Dominique Manchon à propos du commutateur du produit-étoile.

Abstract. — The derived bracket of a Maurer–Cartan element in a differential graded Lie algebra (DGLA) is well-known to define a differential graded Leibniz algebra. It is also well-known that a Lie infinity morphism between DGLAs maps a Maurer–Cartan element to a Maurer–Cartan element. Given a Lie-infinity morphism, a Maurer–Cartan element and its image, we show that both derived differential graded Leibniz algebras are related by a Leibniz-infinity morphism, and we construct it explicitely. As an application, we recover a well-known formula of Dominique Manchon about the commutator of the star-product.

1. Introduction

Il y a dans la littérature sur la quantification deux faits bien connus concernant les algèbres de Lie graduées différentielles (que l'on appellera dorénavant DGLA).

[(*)] Reçu le 23 juillet 2018, accepté le 22 mars 2019.
Mots-clés : Algèbres de Leibniz, algèbre de Lie-infinies, formalité et quantification.
[(1)] Institut Elie Cartan de Lorraine (IECL), UMR 7502, Université de Lorraine, Metz et Nancy (France) — camille.laurent-gengoux@univ-lorraine.fr
[(2)] Institut Elie Cartan de Lorraine (IECL), UMR 7502, Université de Lorraine, Metz et Nancy (France) — mohsen.masmoudi@univ-lorraine.fr
Article proposé par Lucia DiVizio.

(1) Un Lie_∞-morphisme entre deux DGLA $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ induit une application entre éléments de Maurer–Cartan de $\mathfrak{g}$ et éléments de Maurer–Cartan de $\mathfrak{g}'$ [4, 6, 13].
(2) Avec un élément de Maurer–Cartan d'une DGLA $\mathfrak{g}$, on peut définir une structure d'algèbre de Leibniz différentielle graduée (ce que l'on appellera DGLeibA) sur $\mathfrak{g}[1]$, dont le crochet est ce que l'on appelle le crochet dérivé [5, 9].

Donnons-nous un Lie_∞-morphisme Φ entre deux DGLA $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ et un élément de Maurer–Cartan α de $\mathfrak{g}$. Par le premier point, on peut lui associer un élément de Maurer–Cartan β de $\mathfrak{g}'$. Par le second point, on peut utiliser α et β pour construire des DGLeibA. A notre connaissance, personne ne s'est posé la question suivante : existe t-il un morphisme Leibniz-infini de la DGLeibA $\mathfrak{g}[1]$ vers la DGLeibA $\mathfrak{g}'[1]$? Pour donner un sens précis à cette question, il nous faut définir ce que l'on entend par morphisme Leibniz-infini, ce que l'on appellera un Leib_∞-morphisme. Nous utilisons ici des idées similaires à [2]. Rappelons d'abord qu'une DGLA $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot], d)$ induit sur la cogèbre $(S^+(\mathfrak{g}[-1]), \Delta)$ une codérivation Q de carré nul. Celle-ci a deux coefficients de Taylor éventuellement non nuls : le premier coefficient de Taylor est donné par d, et le second est donné par le crochet. Réciproquement, toute codérivation Q de carré nul sur la cogèbre graduée $(S^+(\mathfrak{g}[-1]), \Delta)$ dont les coefficients de Taylor sont tous nuls sauf éventuellement le linéaire et le quadratique induit une structure de DGLA.

Pour les algèbres de Leibniz graduées, il faudra remplacer algèbre symétrique par algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g}[-1])$. La comultiplication est alors toujours donnée par la formule explicite que nous rappellerons dans l'équation (3.1), et qui est, comme dans le cas symétrique, l'unique morphisme d'algèbres graduées $T(\mathfrak{g}[-1]) \to T(\mathfrak{g}[-1]) \otimes T(\mathfrak{g}[-1])$ dont la restriction à $\mathfrak{g}$ est donnée par $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Une difficulté est que cette comultiplication n'est pas colibre sur $\mathfrak{g}$. Il n'en reste pas moins vrai que structure de DGLeibA induit une codérivation de carré nul de cette cogèbre [1, 8, 10]. La notion de coefficient de Taylor garde un sens (non-canonique) et, dans ce cas, les deux seuls coefficients éventuellement non-nuls sont la différentielle et le crochet de Leibniz.

Nous pouvons alors définir les morphismes Leib_∞ entre deux DGLeibA comme étant les morphismes de cogèbres qui respectent ces codérivations. Notre question a maintenant un sens précis. Nous montrons dans cet article que la réponse est oui : il existe un Leib_∞-morphisme de la DGLeibA $\mathfrak{g}[1]$ vers la DGLeibA $\mathfrak{g}'[1]$. Nous en décrivons les coefficients par récurrence d'une façon explicite. Qui plus est, la réponse est loin d'être triviale : les formules que nous obtenons sont riches en structures et font ressortir des propriétés subtiles des algèbres de Leibniz.

Expliquons la construction. Une première complication, comme on l'a dit, est que la cogèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ (avec $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel gradué) n'est pas colibre sur $\mathfrak{g}$. Lorsque l'on traite des algèbres de Leibniz, l'identité de Jacobi suggère un choix lorsque l'on fait des battages : il faut se contenter des sommes que nous appelons *respectueuses* et que l'on note $\dot{\sum}$. Pour faire comprendre le principe, rappelons que l'identité de Jacobi pour les Leibniz s'écrit :

$$[x_1,[x_2,x_3]] - [[x_1,x_2],x_3] - (-1)^{|x_1||x_2|}[x_2,[x_1,x_3]] = 0.$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$ homogènes. Dans cette formule, les signes obéissent aux lois de Koszul. L'ordre dans les lesquels les indices apparaissent obéit à la loi suivante : les parenthésages sont d'abord des battages : c'est-à-dire que dans les parenthèses l'ordre est respecté. Mais on ne conserve dans les battages que ceux qui préservent l'ordre du plus grand élément de la parenthèse. Par exemple $[[x_2,x_3],x_1]$ ne peut apparaître car $3>1$. D'une manière générale, ces sommes sont définies ainsi :

$$\dot{\sum_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_j=[1;n]}} = \sum_{\substack{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_j=[1;n] \\ I_1,\dots,I_j\neq\emptyset, \\ \max(I_1)<\cdots<\max(I_j)}} .$$

Une autre difficulté apparaît classiquement quand on fait de la déformation : il faut bien choisir les cobords. C'est-à-dire que pour étendre le morphisme au degré supérieur, on doit chercher une certaine quantité dont l'image par une différentielle est contrainte. Évidemment, on peut ajouter à la quantité cherchée un cobord plus ou moins arbitraire (en tenant compte éventuellement des autres contraintes). Néanmoins, un mauvais choix dans cet ajout peut empêcher de continuer la construction à un ordre plus élevé. Cela signifie en particulier que l'on ne pouvait pas répondre à la question par de simples considérations cohomologiques.

Quand on essaye de trouver des formules explicites, on voit qu'il faut briser la symétrie qui est pourtant présente dans le morphisme Lie-infini initial (qui est défini sur une algèbre symétrique graduée). Par exemple, on fera usage d'une application de l'algèbre tensorielle vers l'algèbre symétrique qui est définie ainsi :

$$x_1\otimes\cdots\otimes x_n \mapsto (-1)^{|x_1|+\cdots+|x_n|}Q_1(x_1)\cdots Q_1(x_{n-1})\cdot x_n$$

pour tous $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{g}$.

Décrivons maintenant le théorème principal de notre article. Soit $\mathcal{F}$ un Lie_∞-morphisme d'une DGLA $\mathfrak{g}$ vers une DGLA $\mathfrak{g}'$. Soit α un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{g}$ et β son image par $\mathcal{F}$.

Nous allons donner des formules très explicites car nous pensons que le lecteur expert peut comprendre la logique de notre construction en se contentant de regarder celles-ci. Nous reprendrons les constructions plus en détail tout au long du texte. On note les dérivées d'ordre n en α par $T^n_\alpha\mathcal{F}$ (voir section 3.1 pour un rappel de cette notion). On définit une suite d'applications $\mathcal{B}^j_n : \otimes^n\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ avec $n \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ par récurrence. Les premiers termes sont construits ainsi :

$$\mathcal{B}^0_1(x_1) = T^1_\alpha\mathcal{F}(x_1).$$

Ensuite, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$, on impose :

$$\mathcal{B}^0_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|}\ T^n_\alpha\mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1})\cdot x_n\big).$$

Ici, $Q_{\alpha,1} = Q_1 + Q_2(\alpha, \cdot\,)$ est la différentielle associée à l'élément de Maurer–Cartan α (Q_1 étant la différentielle de $\mathfrak{g}$ et Q_2 son crochet de Lie gradué symétrique). Enfin, on construit pour tout $n \geqslant 3$ et $j \in \{1, \dots, n-2\}$ une relation de récurrence sur j par :

$$\mathcal{B}^j_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1}{j} \sum^{\bullet}_{I \sqcup J = [1;n]} \varepsilon_x(I, J)\ (-1)^{|x_I|}(|I| - 1) \sum_{k=0}^{j-1} Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big).$$

Ici, Q'_2 est le crochet de Lie gradué symétrique de $\mathfrak{g}'$ (à ne pas confondre avec le crochet dérivé). Le signe $\varepsilon_x(I, J)$ obéit à la règle de Koszul. Dans la formule ci-dessus, $|I|$ est le cardinal de $I \subset \{1, \dots, n\}$. On convient que $\mathcal{B}^j_n = 0$ pour $j \geqslant n - 1$.

Théorème. — *Soit $\mathcal{F}$ un* Lie$_\infty$ *morphisme d'une DGLA $\mathfrak{g}$ vers une DGLA $\mathfrak{g}'$. Soit α un élément de Maurer–Cartan et $\mathfrak{g}$ et β son image par $\mathcal{F}$.*

Les applications $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $\mathcal{B}_n := \sum_{j\geqslant 0} \mathcal{B}^j_n$ sont les coefficients de Taylor d'un Leib$_\infty$*-morphisme entre les algèbres de Leibniz différentielles graduées associées à α et β.*

On voit bien que les formules ci-dessus brisent la symétrie et qu'elles font appel à la notion de somme respectueuse. Qui plus est, comme mentionné ci-dessus, le choix des cobords est important. Par exemple si on ajoute à $\mathcal{B}_2$ un terme du type $[\mathcal{B}_1(x_1), \mathcal{B}_1(x_2)]$, on obtient toujours un prolongement d'ordre 2 mais on peut montrer qu'on ne peut pas le prolonger à l'ordre 3. On voit aussi que ce Leib$_\infty$-morphisme n'est pas obtenu comme une composition du Lie$_\infty$-morphisme $\mathcal{F}$ avec des opérateurs entre les algèbres symétriques et tensorielles graduées.

Comme application, nous retrouvons une formule due à Dominique Manchon [12] qui montre que la dérivée de l'application de formalité de Kontsevich n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie formelles et que le défaut est donné par la dérivée seconde.

Remerciements

Nous remercions Ricardo Campos pour ses commentaires éclairants. Nous remercions aussi le referee, pour ses commentaires qui ont grandement amélioré l'article.

2. Les algèbres de Leibniz graduées différentielles

Commençons par définir l'objet principal de notre étude.

Définition 2.1.

(1) *Une* algèbre de Leibniz graduée différentielle *est un triplet* $(\mathfrak{g},[\,\cdot\,,\cdot\,],d)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est un espace vectoriel gradué* $\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$ *muni*
 (a) *d'un crochet* $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ *(=application bilinéaire* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\mapsto\mathfrak{g}$ *de degré* 0*)*
 (b) *d'un endomorphisme* $d:\mathfrak{g}\mapsto\mathfrak{g}$ *de degré* $+1$

tels que et tels que pour tous x,y,z *homogènes :*

$$\begin{aligned}[x,[y,z]] &= [[x,y],z]+(-1)^{|x||y|}[y,[x,z]]\\ d([x,y]) &= [dx,y]+(-1)^{|x|}[x,dy]\\ d^2 &= 0\end{aligned}$$

(2) *Une* algèbre de Lie graduée différentielle *est une algèbre de Leibniz graduée différentielle pour laquelle le crochet est antisymétrique gradué :*

$$[x,y]=-(-1)^{|x||y|}[y,x].$$

(3) *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie graduée différentielle. Un élément* α *de* $\mathfrak{g}_1$ *est dit de* Maurer–Cartan *s'il vérifie :*

$$d\alpha-\frac{1}{2}[\alpha,\alpha]=0.$$

Pour $\alpha\in\mathfrak{g}_1$, on pose

$$d_\alpha:=[\alpha,\cdot\,]-d=\operatorname{ad}_\alpha-d.$$

Lemme 2.2. — *Soit* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot], d)$ *une algèbre de Leibniz graduée différentielle. Pour tout* $\alpha \in \mathfrak{g}$ *de degré* 1*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(d_\alpha)^2 = 0$
(ii) *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$*, la relation* $[d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha], x] = 0$ *est satisfaite.*

En particulier, ces conditions sont vérifiées si $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot], d)$ *est une algèbre de Lie graduée différentielle et* α *est de Maurer–Cartan.*

On pose pour x, $y \in \mathfrak{g}$:

$$[x, y]_\alpha = \Big[(-1)^{|x|} d_\alpha(x), y\Big] .$$

On adopte la notation habituelle sur le décalage de graduation. Ainsi, si V est un espace vectoriel gradué et n un entier relatif, un vecteur est de degré j dans $V[n]$ s'il est de degré $j - n$ dans V. Le crochet $[\cdot\,,\cdot]_\alpha$ défini ci-dessus est de degré 0 sur $\mathfrak{g}[1]$.

Proposition 2.3 (Crochet dérivé [5, 9]). — *Soit* $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot], d)$ *une algèbre de Leibniz graduée différentielle. Pour tout* $\alpha \in \mathfrak{g}$ *de degré* 1 *qui satisfait les conditions équivalentes du lemme 2.2, le triplet* $(\mathfrak{g}[1], [\cdot\,,\cdot]_\alpha, d_\alpha)$ *est une algèbre de Leibniz graduée différentielle.*

Cette proposition est en général énoncée pour α un élément Maurer–Cartan d'une algèbre de Lie graduée différentielle $(\mathfrak{g}, [\cdot\,,\cdot], d)$, mais la généralisation ci-dessus est évidente.

3. Algèbres de Lie et de Leibniz homotopiques

3.1. Lie$_\infty$-algèbres

On rappelle brièvement quelques notions désormais devenues classiques sur les algèbres de Lie à homotopie près, ou algèbres L_∞. Soit V un espace vectoriel gradué, l'algèbre symétrique de V est définie par

$$S(V) := T(V)/\langle x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x\rangle.$$

On appelle $S^n(V)$ l'image de $V^{\otimes n}$ dans ce quotient et on définit une graduation par $S(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n(V)$. On considère aussi

$$S^+(V) := \bigoplus_{n\geqslant 1} S^n(V).$$

L'algèbre $S^+(V)$ est munie d'une comultiplication coassociative :

$$\Delta(x_1 \cdots x_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ I,J \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I,J) x_I \otimes x_J,$$

où $\varepsilon_x(I,J)$ désigne la signature de l'effet sur les x_i impairs de la permutation appelée « battement » ou « battage » consistant à ranger d'abord les éléments de I en ordre, puis ceux de J.

Théorème 3.1 ([3, 4]). — *Soient i un entier et V, V' des espaces vectoriels gradués. Considérons deux suites d'applications linéaires $Q_n : S^n(V) \longrightarrow V$ et $\mathcal{F}_n : S^n(V) \longrightarrow V'$ de degrés respectifs i et 0. Alors il existe une unique codérivation Q de degré i de $S^+(V)$ et un unique morphisme de cogèbres $\mathcal{F} : S^+(V) \longrightarrow S^+(V')$ dont les Q_n et les $\mathcal{F}_n$ sont les coefficients de Taylor respectifs. De plus, Q et $\mathcal{F}$ sont donnés par :*

$$Q(x_1 \cdots x_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ I,J \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I,J) Q_I(x_I).x_J$$

tandis que

$$\mathcal{F}(x_1 \cdots x_n) = \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_j = [1;n] \\ I_1,\ldots,I_j \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I_1,\ldots,I_j)\ \mathcal{F}_{|I_1|}(x_{I_1}) \cdots \mathcal{F}_{|I_j|}(x_{I_j}).$$

Définition 3.2.

(1) *Une algèbre de Lie homotopique ou L_∞-algèbre est une paire (V,Q), où V est un espace vectoriel gradué, et où Q est une codérivation de degré 1 de la cogèbre $(S^+(V),\Delta)$ vérifiant $[Q,Q]=0$. On rappelle que $[Q,Q]=2Q^2$.*

(2) *Un L_∞-morphisme entre algèbres de Lie homotopiques est un morphisme de cogèbres graduées :*

$$\mathcal{F} : S^+(V) \to S^+(V')$$

vérifiant :

$$\mathcal{F} \circ Q = Q' \circ \mathcal{F}$$

(3) *La dérivée d'ordre k d'un L_∞-morphisme $\mathcal{F}$ en un point α de degré 0 et vérifiant $Q(e^\alpha - 1) = 0$ est définie par :*

$$T_\alpha^k \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \mathcal{F}_{n+k}(x_1 \cdots x_k.\alpha \cdots \alpha)$$

Le cas particulier $V = \mathfrak{g}[-1]$ où $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée est très important et admet des applications très intéressantes dans la théorie de la quantification par déformation. Dans ce cas, le champ de vecteurs Q sur $S^+(\mathfrak{g}[-1])$ a des coefficients de Taylor nuls sauf les deux premiers :

$$Q_1(x) = (-1)^{|x|} dx \quad \text{et} \quad Q_2(x.y) = (-1)^{|x|(|y|-1)}[x, y],$$

où $|x|$ désigne le degré de x dans $\mathfrak{g}$, et l'équation $[Q, Q] = 0$ traduit les trois relations qui définissent une algèbre de Lie graduée différentielle.

3.2. Leib$_\infty$-algèbres

Comme on a vu dans la section précédente, les algèbres L_∞, en particulier les DGLA, sont encodées par des codérivations de carré nul d'algèbres symétriques graduées. Pour les algèbres de Leibniz différentielles graduées, comme le crochet n'est plus antisymétrique gradué, ce codage ne peut plus se faire avec des algèbres symétriques graduées. Il peut se faire, néanmoins, avec des algèbres tensorielles graduées. Précisons ce point.

Pour alléger les écritures et éviter l'introduction de nouvelles notations, dans la suite un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est toujours représenté par $\{i_1, \dots, i_k\}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Soit V un espace vectoriel gradué, l'algèbre tensorielle pointée $T^+(V)$ munie de la comultiplication :

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I, J)\ x_I \bigotimes x_J, \tag{3.1}$$

est une cogèbre cocommutative. Elle n'est pas colibre sur V. La notion de codérivation de carré nul garde évidemment un sens et on définit les algèbres de Leibniz infinies comme étant les paires (V, Q), où V est un espace vectoriel gradué, et où Q est une codérivation de degré 1 de la cogèbre $(T^+(V), \Delta)$ vérifiant $[Q, Q] = 0$.

Les morphismes entre de tels objets sont les morphismes de cogèbres qui respectent les codérivations.

La notion de coefficients de Taylor demande à être précisée, car $T^+(V)$ n'est pas colibre. Cependant, on peut choisir une façon de construire des codérivations et des morphismes de cogèbres en partant d'une suite d'applications comme dans le cas de l'algèbre symétrique [4]. Le choix pour les codérivations est motivé par la construction analogue au cas symétrique d'un champ de vecteur et celui pour les morphismes nous paraît naturel.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3. — *Soit V un espace vectoriel gradué.*

(1) *Considérons une suite d'applications linéaires $Q_n : T^n(V) \longrightarrow V$ de degré $q \in \mathbb{Z}$. Considérons l'application Q de $T^+(V)$ dans $T^+(V)$ définie par*

$$Q(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \varepsilon_{x,i_1,\ldots,i_k}\ x_1 \otimes \cdots \otimes \breve{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes Q_k(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}) \otimes \breve{x_{i_k}} \otimes \cdots \otimes x_n$$

où le signe obéit aux règles usuelles à condition de considérer que Q_k est de degré q, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{x,i_1,\ldots,i_k} := \varepsilon_{x'}(\{i_1, \ldots, i_k\}, \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\})$$

où $x'_0 = Q_k$ est de degré q et $x'_l = x_l$ pour tout $l \in \{1, \ldots, n\}$. L'application Q est une codérivation de degré q dont les projections sur V sont données par les Q_n.

(2) *Soit $\mathcal{F}_n : T^n(V) \longrightarrow V'$ une suite d'applications de degré 0. L'application $\mathcal{F}$ de $T^+(V)$ dans $T^+(V')$ définie par*

$$\mathcal{F}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \dot{\sum_{I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_j = [1;n]}} \varepsilon_x(I_1, \ldots, I_j) \mathcal{F}_{|I_1|}(x_{I_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{|I_j|}(x_{I_j})$$

est un morphisme de cogèbres dont les projections sur V' sont données par les $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une codérivation construite à partir d'une suite d'applications $(Q_n)_{n \geqslant 1}$ comme dans le premier point de la proposition 3.3 sera dite *bien faite*. De même, un morphisme de cogèbre construit à partir d'une suite d'applications $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ comme dans le second point de la proposition 3.3 sera dit *bien fait*. On appelle, pour tout $n \geqslant 1$, *coefficients de Taylor* d'une dérivation ou d'un morphisme bien fait les applications $Q_n : V^{\otimes n} \to V$ et $\mathcal{F}_n : V^{\otimes n} \to V'$.

Proposition 3.4. — *Soient V et V' deux espaces vectoriels gradués, Q et Q' des dérivations bien faites sur V et V' et $\mathcal{F} : T(V) \to T(V')$ un morphisme bien fait.*

(1) *La relation $Q' \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ Q$ est vérifiée si et seulement si la projection sur V' de la quantité $Q' \circ \mathcal{F} - \mathcal{F} \circ Q$ est nulle.*

(2) *Si de plus $Q_n = 0$ et $Q'_n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$, la relation $Q' \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ Q$ est vérifiée si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_n \circ Q_1(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) + \mathcal{F}_{n-1} \circ Q_2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\quad = Q'_1 \circ \mathcal{F}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) + \dot{\sum_{I \sqcup J = [1;n]}} \varepsilon_x(I, J) Q'_2\left(\mathcal{F}_{|I|}(x_I) \otimes \mathcal{F}_{|J|}(x_J)\right) \end{aligned}$$

Démonstration. — L'application de $T(V)$ dans $T(V')$ définie par $C := Q' \circ \mathcal{F} - \mathcal{F} \circ Q$ est encore « bien faite » au sens où elle vérifie

$$C(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_j = [1;n]}^{\bullet} \sum_{k=1}^{j} \varepsilon'_x(I_1, \ldots, I_j, k) \mathcal{F}_{|I_1|}(x_{I_1}) \otimes \cdots \otimes C_{|I_k|}(x_{I_k}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{|I_j|}(x_{I_j})$$

où $C_j : V^{\otimes j} \to V'$ est obtenu en projetant sur V' la restriction de C à $V^{\otimes j}$ et où $\varepsilon'_x(I_1, \ldots, I_j, k) \in \{-1, +1\}$ est donné par la règle de Koszul. Dans le cas particulier où seuls Q_1 et Q_2 sont éventuellement non-nulles, ces relations se simplifient et donnent les relations du second point. $\square$

Supposons maintenant que $V = \mathfrak{g}[-1]$ où $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel muni d'un crochet $[\cdot, \cdot]$ de degré 0 et d'un endomorphisme d de degré 1. Pour $x, y \in \mathfrak{g}$ posons :

$$Q_1(x) = (-1)^{|x|} dx \quad \text{et} \quad Q_2(x \otimes y) = (-1)^{|x|(|y|-1)} [x, y],$$

où $|x|$ désigne le degré de x dans $\mathfrak{g}$.

Appelons Q la codérivation construite à partir de Q_1 et Q_2 comme dans le premier point de la proposition 3.3. On a bien

$$Q^2(x) = Q_1^2(x)$$

et

$$Q^2(x \otimes y) = Q_1^2(x) \otimes y + x \otimes Q_1^2(y) + Q_1(Q_2(x \otimes y)) + Q_2(Q_1(x) \otimes y) + (-1)^{|x|-1} Q_2(x \otimes Q_1(y)),$$

Un calcul direct montre que pour tout entier naturel n supérieur à 3 et pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathfrak{g}[-1]$ on a :

$$\begin{aligned}
Q^2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \cdots \otimes Q_1^2(x_i) \otimes \cdots \otimes x_n \\
&+ \sum_{i<j} \varepsilon_x(\{i,j\}, \{1, \ldots, n\} \setminus \{i,j\}) x_1 \otimes \cdots \otimes \check{x}_i \otimes \cdots \\
&\otimes \Big(Q_1\big(Q_2(x_i \otimes x_j)\big) + Q_2\big(Q_1(x_i) \otimes x_j\big) \\
&+ (-1)^{|x_i|-1} Q_2\big(x_i \otimes Q_1(x_j)\big) \Big) \otimes \check{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n \\
&+ \sum_{i<j<k} \varepsilon_x(\{i,j,k\}, \{1, \ldots, n\} \setminus \{i,j,k\}) \, x_1 \otimes \cdots \otimes \check{x}_i \otimes \cdots \otimes \check{x}_j \otimes \cdots \\
&\otimes \Big(Q_2\big(Q_2(x_i \otimes x_j) \otimes x_k\big) + (-1)^{|x_i|-1} Q_2\big(x_i \otimes Q_2(x_j \otimes x_k)\big) \\
&+ (-1)^{|x_i|(|x_j|-1)} Q_2\big(x_j \otimes Q_2(x_i \otimes x_k)\big) \Big) \otimes \check{x_k} \otimes \cdots \otimes x_n.
\end{aligned}$$

Pour voir que les termes du type :

$$x_1 \otimes \cdots \otimes Q_1(x_i) \otimes \check{x}_i \otimes \cdots \otimes \check{x}_j \otimes \cdots \otimes Q_2(x_j \otimes x_k) \otimes \widecheck{x_k} \otimes \cdots \otimes x_n$$

se simplifient, il suffit de remarquer qu'un tel terme apparaît quand on applique Q_1 à $Q_2(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ sans que Q_1 et Q_2 ne se rencontrent mais aussi quand on applique Q_2 à $Q_1(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ sauf que dans ce cas Q_2 est passé au dessus de Q_1, ce qui fait naître un signe opposé.

On déduit alors la proposition suivante, qui généralise quelques résultats de [8, 10] :

Proposition 3.5. — *Soient* $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$, *un espace vectoriel gradué, muni d'une application bilinéaire de degré* 0 *et une application linéaire de degré* $+1$. *Soit* Q *la codérivation construite comme dans le premier point de la proposition 3.3. Alors* $Q^2 = 0$ *si et seulement si* $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ *est une algèbre de Leibniz différentielle graduée.*

4. De Lie à Leibniz

Soient $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ et $(\mathfrak{g}', [\,\cdot\,,\cdot\,]', d')$ deux algèbres de Lie graduées différentielles. On a donc deux L_∞-algèbres $(S^+(\mathfrak{g}[-1]), Q)$ et $(S^+(\mathfrak{g}'[-1]), Q')$. Supposons qu'il existe un L_∞-morphisme $\mathcal{F}$ entre ces deux L_∞-algèbres.

Soit α un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{g}$, on a donc :

$$Q_1(\alpha) + \frac{1}{2} Q_2(\alpha.\alpha) = 0.$$

Posons :

$$\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{F}_n(\alpha \cdots \alpha) = \mathrm{pr}(\mathcal{F}(e^\alpha - 1)) \in \mathfrak{g}'_1.$$

Les relations suivantes découlent du lemme 4.1 rappelé ci-dessous :

$$\mathcal{F}(e^\alpha - 1) = e^\beta - 1.$$

$$\left(Q'_1(\beta) + \frac{1}{2} Q'_2(\beta.\beta)\right) e^\beta = Q'(e^\beta - 1) = Q'(\mathcal{F}(e^\alpha - 1)) = \mathcal{F}(Q(e^\alpha - 1)) = 0.$$

Il s'ensuit que β est un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{g}'$. En considérant les structures dérivées correspondant à α et β, on obtient deux algèbres de Leibniz graduées différentielles $(\mathfrak{g}[1], [\,\cdot\,,\cdot\,]_\alpha, d_\alpha)$ et $(\mathfrak{g}'[1], [\,\cdot\,,\cdot\,]'_\beta, d'_\beta)$ (et par suite deux algèbres de Leibniz « homotopiques ») :

$$(T^+(\mathfrak{g}[1][-1], Q_\alpha) = (T^+(\mathfrak{g}), Q_\alpha) \quad \text{et} \quad (T^+(\mathfrak{g}'), Q_\beta).$$

Précisément, on a :

$$Q_{\alpha,1}(x) = (-1)^{|x|+1} d_\alpha(x), \quad Q_{\alpha,2}(x \otimes y) = (-1)^{(|x|+1)|y|} [x, y]_\alpha$$

et

$$Q'_{\beta,1}(x) = (-1)^{|x|+1} d'_\beta(x), \quad Q'_{\beta,2}(x \otimes y) = (-1)^{(|x|+1)|y|}[x,y]'_\beta.$$

Le lemme suivant est une réécriture d'un résultat classique donné dans [4] et [12] ([12] utilise d'ailleurs les notations du paragraphe précédent) et le fait que pour tout x dans $\mathfrak{g}$

$$Q_{\alpha,1}(x) = Q_1(x) + Q_2(x.\alpha).$$

Le calcul se fait dans l'algèbre symétrique décalée, c'est-à-dire dans $S^+(\mathfrak{g}[-1])$ et $S^+(\mathfrak{g}'[-1])$. En particulier, les signes $\varepsilon_x(I_1, \dots, I_j)$ sont ceux qui apparaissent dans cette algèbre. Par exemple, $\varepsilon_{x,2} = (-1)^{|x_1|-1}$ si $|x_1|$ est le degré de x_1 dans $\mathfrak{g}$.

Lemme 4.1 ([4, 12]). — *Soit $\mathcal{F} : S^+(\mathfrak{g}[1]) \to S^+(\mathfrak{g}'[1])$ un L_∞-morphisme d'une DGLA $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ vers une DGLA $(\mathfrak{g}', [\,\cdot\,,\cdot\,]', d')$. Soit $\alpha \in \mathfrak{g}$ un élément de Maurer–Cartan. Pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$, on a :*

$$\mathcal{F}(x_1 \dots x_n . e^\alpha) = \left(\sum_{j \geqslant 1} \dot{\sum_{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = [1;n]}} \varepsilon_x(I_1, \dots, I_j) T_\alpha^{|I_1|} \mathcal{F}(x_{I_1}) \dots T_\alpha^{|I_j|} \mathcal{F}(x_{I_j}) \right) e^\beta.$$

$$Q(x_1 \cdots x_n e^\alpha) = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{x,i}\ x_1 \cdots \check{x}_i Q_{\alpha,1}(x_i) \cdots x_n \right.$$
$$\left. + \sum_{i<j} \varepsilon_{x,i,j}\ x_1 \cdots \check{x}_i \cdots Q_2(x_i . x_j) \check{x}_j \cdots x_n \right) e^\alpha.$$

Définissons maintenant une suite d'applications de $T^n(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}'$. On pose

$$\mathcal{B}_1^0(x_1) = T_\alpha^1 \mathcal{F}(x_1)$$

et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

$$\mathcal{B}_n^0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^{|x_1| + \cdots + |x_{n-1}|}\ T_\alpha^n \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1) \cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}) . x_n\big).$$

C'est-à-dire, en utilisant les notations précédentes

$$\mathcal{B}_n^0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varepsilon_{x,n}\ T_\alpha^n \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1) \cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}) . x_n\big).$$

Pour tout $n \geqslant 3$, on définit $\mathcal{B}_n^j$ par une relation de récurrence sur $j \in \{1, \dots, n-2\}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{B}_n^j(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \frac{1}{j} \dot{\sum_{I \sqcup J = [1;n]}} \varepsilon_x(I, J)\ (-1)^{|x_I|}(|I| - 1)$$
$$\sum_{k=0}^{j-1} Q'_2\big(\mathcal{B}_{|I|}^k(x_I) . \mathcal{B}_{|J|}^{j-k-1}(x_J)\big).$$

Ici, $|I|$ désigne le cardinal de $I \subset \{1, \dots, n\}$. On convient de poser $\mathcal{B}_n^j = 0$ dans les autres cas. Finalement, on pose

$$\mathcal{B}_n = \sum_{j \geqslant 0} \mathcal{B}_n^j.$$

Voici le résultat principal de notre article :

Théorème 4.2. — *Soit $\mathcal{F}$ un L_∞-morphisme d'une DGLA $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ vers une DGLA $(\mathfrak{g}', [\,\cdot\,,\cdot\,]', d')$. Soit $\alpha \in \mathfrak{g}_1$ un élément de Maurer–Cartan de $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,], d)$ et $\beta \in \mathfrak{g}'_1$ l'élément de Maurer–Cartan image dans $\mathfrak{g}'$.*

La suite d'applications $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite des coefficients de Taylor d'un Leib_∞*-morphisme $\mathcal{B} : T^+(\mathfrak{g}) \to T^+(\mathfrak{g}')$ entre les algèbres de Leibniz différentielles graduées $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,]_\alpha, d_\alpha)$ et $(\mathfrak{g}', [\,\cdot\,,\cdot\,]'_\beta, d'_\beta)$.*

La preuve de ce théorème est une conséquence des deux propositions 4.3 et 4.4 suivantes. Considérons la quantité :

$$\mathcal{C}_n^0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \big(\mathcal{B}_n^0 \circ Q_{\alpha,1} + \mathcal{B}_{n-1}^0 \circ Q_{\alpha,2} - Q'_{\beta,1} \circ \mathcal{B}_n^0\big)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

Proposition 4.3. — *Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathfrak{g}$*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_n^0&(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\\ &= \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n]\\ |I|=1}} \varepsilon_x(I,J) Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_1^0(x_I) \otimes \mathcal{B}_{n-1}^0(x_J)\big)\\ &\quad + \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n]\\ |I|\geqslant 2}} (-1)^{|x_I|} \varepsilon_x(I,J) Q'_2\Big(\mathcal{B}_{|I|}^0\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big) \otimes \mathcal{B}_{|J|}^0(x_J)\Big)\end{aligned}$$

Démonstration. — En utilisant le lemme 4.1 et en remarquant que $Q_{\alpha,1}^2 = 0$, on peut voir que la projection de la relation (écrite dans $S^+(\mathfrak{g}'[-1])$) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \circ Q\big(&Q_{\alpha,1}(x_1) \cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).x_n e^\alpha\big)\\ &= Q' \circ \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1) \cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).x_n e^\alpha\big)\end{aligned}$$

se traduit par :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{x',n}\, T^n_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).Q_{\alpha,1}(x_n)\big)\\
&\quad + \sum_{i<j<n} \varepsilon_{x',i,j}\; T^{n-1}_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots \widetilde{Q_{\alpha,1}(x_i)}\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad Q_2\big(Q_{\alpha,1}(x_i).Q_{\alpha,1}(x_j)\big).\widetilde{Q_{\alpha,1}(x_j)}\cdots x_n\big)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{x',i,n}\; T^{n-1}_\alpha \mathcal{F}\Big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots \widetilde{Q_{\alpha,1}(x_i)}\cdots Q_2\big(Q_{\alpha,1}(x_i).x_n\big)\Big)\\
&= Q'_{\beta,1}\Big(T^n_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).x_n\big)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad + \dot{\sum_{I\sqcup J=[1;n]}} \varepsilon_{x'}(I,J) Q'_2\big(\, T^{|I|}_\alpha \mathcal{F}(x'_I).T^{|J|}_\alpha \mathcal{F}(x'_J)\big)
\end{aligned}$$

où $x'_i = Q_{\alpha,1}(x_i)$ si $i<n$ et $x'_n = x_n$.

Or $Q_2\big(Q_{\alpha,1}(x_i).Q_{\alpha,1}(x_j)\big) = -Q_{\alpha,1}\big(Q_{\alpha,2}(x_i\otimes x_j)\big)$ et $Q_2\big(Q_{\alpha,1}(x_i).x_n\big) = (-1)^{|x_i|} Q_{\alpha,2}(x_i\otimes x_n)$.

En multipliant par $\varepsilon_{x',n}$ l'égalité devient :

$$\begin{aligned}
&T^n_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).Q_{\alpha,1}(x_n)\big)\\
&\quad + \sum_{i<j<n} \varepsilon_{x',i,j}(-\varepsilon_{x',n})\; T^{n-1}_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots \widetilde{Q_{\alpha,1}(x_i)}\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad Q_{\alpha,1}\big(Q_{\alpha,2}(x_i\otimes x_j)\big).\widetilde{Q_{\alpha,1}(x_j)}\cdots x_n\big)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{x',i,n}\varepsilon_{x',n}(-1)^{|x_i|}\; T^{n-1}_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots \widetilde{Q_{\alpha,1}(x_i)}\cdots Q_{\alpha,2}(x_i\otimes x_n)\big)\\
&\quad - Q'_{\beta,1}\Big(\varepsilon_{x',n}\; T^n_\alpha \mathcal{F}\big(Q_{\alpha,1}(x_1)\cdots Q_{\alpha,1}(x_{n-1}).x_n\big)\Big)\\
&= \varepsilon_{x',n} \dot{\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|=1}}} \varepsilon_{x'}(I,J) Q'_2\big(\, T^1_\alpha \mathcal{F}(x'_I).T^{|J|}_\alpha \mathcal{F}(x'_J)\big)\\
&\qquad\qquad + \varepsilon_{x',n} \dot{\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|>2}}} \varepsilon_{x'}(I,J) Q'_2\big(\, T^{|I|}_\alpha \mathcal{F}(x'_I).T^{|J|}_\alpha \mathcal{F}(x'_J)\big)
\end{aligned}$$

Pour pouvoir conclure, il faut remarquer que pour tout $i\in\{1,\dots,n-1\}$, $\mathcal{B}^0_n\big(x_1\otimes\cdots\otimes Q_{\alpha,1}(x_i)\otimes\cdots\otimes x_n\big) = 0$ et qu'en passant de $S^+(\mathfrak{g}[-1])$ à $T^+(\mathfrak{g})$ on a

$$\varepsilon_{x',n} = \varepsilon_{x,n} = (-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|}, \quad \varepsilon_{x',i,j} = \varepsilon_{x,i,j}$$

et puisqu'il s'agit d'une somme respectueuse

$$\varepsilon_{x'}(I,J)=\varepsilon_x(I,J).$$

Enfin, il faut aussi se rappeler que T^1_α est un morphisme de complexes :

$$T^1_\alpha\circ Q_{\alpha,1}=Q'_{\beta,1}\circ T^1_\alpha,$$

ce qui donne le résultat. □

Pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 1 et pour tout $x_1,\dots,x_n$ $(n\geqslant j+2)$ dans $\mathfrak{g}$, on introduit :

$$\mathcal{C}^j_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\big(\mathcal{B}^j_n\circ Q_{\alpha,1}+\mathcal{B}^j_{n-1}\circ Q_{\alpha,2}-Q'_{\beta,1}\circ\mathcal{B}^j_n\big)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)$$

Proposition 4.4. — *Pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 1 et pour tous $x_1,\dots,x_n$ (avec $n\geqslant j+2$) dans $\mathfrak{g}$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^j_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=&\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)\\ &+\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|=1}}\varepsilon_x(I,J)\sum_{k=0}^{j}Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^k_1(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k}_{n-1}(x_J)\big)\\ &+R^j_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)-R^{j+1}_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\end{aligned}$$

où pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}R^m_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=&\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|+1}\\ &\qquad\sum_{k=0}^{m-1}Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{m-k-1}_{|J|}(x_J)\big).\end{aligned}$$

Remarque 4.5. — D'après la proposition 4.3, la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{C}^0_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|=1}}\varepsilon_x(I,J)Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^0_1(x_I)\otimes\mathcal{B}^0_{n-1}(x_J)\big)-R^1_n.$$

La preuve de la proposition 4.4 utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 4.6. — *Les deux relations suivantes sont satisfaites :*

$$\mathcal{B}_n^j\big(Q_{\alpha,1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\big)$$
$$=\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|+1}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)$$
$$+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\Big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}\big(Q_{\alpha,1}(x_J)\big)\Big)$$

et :

$$\mathcal{B}_{n-1}^j\big(Q_{\alpha,2}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\big)$$
$$=\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|-1}\big(Q_{\alpha,2}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)$$
$$+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|J|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\Big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|-1}\big(Q_{\alpha,2}(x_J)\big)\Big).$$

Démonstration du lemme 4.6. — En utilisant la définition de $\mathcal{B}_n^j$, on obtient :

$$\mathcal{B}_n^j\big(Q_{\alpha,1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\big)$$
$$=\sum_{i=1}^n\varepsilon_{x,i}\mathcal{B}_n^j(x_1\otimes\cdots\otimes Q_{\alpha,1}(x_i)\otimes\cdots\otimes x_n)$$
$$=\sum_{i=1}^n\varepsilon_{x,i}\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_{x'}(I,J)\ (-1)^{|x'_I|}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x'_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x'_J)\big)$$
$$=\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\i\in I}}\varepsilon_{x,i}\frac{1}{j}\varepsilon_{x'}(I,J)\ (-1)^{|x'_I|}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x'_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x'_J)\big)$$
$$+\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\i\in J}}\varepsilon_{x,i}\frac{1}{j}\varepsilon_{x'}(I,J)\ (-1)^{|x'_I|}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x'_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x'_J)\big)$$

où $x'_k=x_k$ si $k\neq i$ et $x'_i=Q_{\alpha,1}(x_i)$. On remarque que les termes de la somme $\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}(x'_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x'_J)\big)$, sont, au signe près, les mêmes termes que ceux de la somme $\sum_{k=0}^{j-1}Q_2'\big(\mathcal{B}^k_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)$. Pour conclure, il faut vérifier les signes. Si $i\in I$ alors

$$\varepsilon_{x'}(I,J)=(-1)^{\sum_{k<i,k\in J}|x_k|}\ \varepsilon_x(I,J),\quad |x'_I|=|x_I|+1$$

par suite
$$\varepsilon_{x,i}\varepsilon_{x'}(I,J)(-1)^{|x'_I|} = (-1)^{\sum_{k<i,k\in I}|x_k|}(-1)^{|x_I|+1}\varepsilon_x(I,J),$$
et si $i \in J$ alors
$$\varepsilon_{x'}(I,J) = (-1)^{\sum_{k>i,k\in I}|x_k|}\,\varepsilon_x(I,J), \quad |x'_I| = |x_I|$$
par suite
$$\varepsilon_{x,i}\varepsilon_{x'}(I,J)(-1)^{|x'_I|} = (-1)^{\sum_{k<i,k\in J}|x_k|}\varepsilon_x(I,J).$$
Ceci montre la première formule.

Pour la seconde formule, on a aussi :
$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}^j_{n-1}(Q_{\alpha,2}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n))\\
&\quad= \sum_{l<s}\varepsilon_{x,l,s}\,\mathcal{B}^j_{n-1}(x'_1\otimes\cdots\otimes x'_{n-1})\\
&\quad= \sum_{l<s}\varepsilon_{x,l,s}\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I'\sqcup J'=[1;n-1]}\varepsilon_{x'}(I',J')\;(-1)^{|x'_{I'}|}(|I'|-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I'|}(x'_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J'|}(x'_{J'})\big)\\
&\quad= \sum_{l<s}\varepsilon_{x,l,s}\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I'\sqcup J'=[1;n-1]\\ s-1\in I'}}\varepsilon_{x'}(I',J')\;(-1)^{|x'_{I'}|}(|I'|-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I'|}(x'_{I'}).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J'|}(x'_{J'})\big)\\
&\qquad+\sum_{l<s}\varepsilon_{x,l,s}\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I'\sqcup J'=[1;n-1]\\ s-1\in J'}}\varepsilon_{x'}(I',J')\;(-1)^{|x'_{I'}|}(|I'|-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I'|}(x'_{I'}).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J'|}(x'_{J'})\big)
\end{aligned}$$
où $x'_1 = x_1;\ldots;x'_{l-1} = x_{l-1};x'_l = x_{l+1};\ldots;x'_{s-2} = x_{s-1};\ x'_{s-1} = Q_{\alpha,2}(x_l\otimes x_s);x'_s = x_{s+1};\ldots;x'_{n-1} = x'_n$.

Pour l et s fixés tels que $l<s$, à un sous ensemble I' de $\{1,\ldots,n-1\}$ on associe un sous-ensemble I de $\{1,\ldots,n\}$ de la façon suivante :

(a) si $s-1\in I'$, alors I contiendra les éléments de I' inférieurs strictement à l, l et s et les autres éléments de I sont de la forme $j+1$ avec $j\in I'$ et $j\leqslant l$.

(b) sinon I sera formé des éléments de I' strictement inférieurs à l et des éléments de la forme $j+1$ avec $j \in I'$ et $j \leqslant l$.

Il est clair que si $s-1 \in I'$, $|I| = |I'|+1$ et $(-1)^{|x'_{I'}|} = (-1)^{|x_I|+1}$, sinon $|I| = |I'|$ et $(-1)^{|x'_{I'}|} = (-1)^{|x_I|}$.

Les termes du second membre de l'égalité précédente sont alors de même nature que ceux de la formule donnée dans le lemme. Pour les signes il suffit de voir que : Si $s-1 \in I'$, alors

$$\varepsilon_{x'}(I,J) = (-1)^{\sum_{k<l, k\in J} |x_k| + \sum_{l\leqslant k<s-1, k\in J'} |x_{k+1}|(|x_l|+1)} \ \varepsilon_x(I,J)$$

sinon

$$\varepsilon_{x'}(I,J) = (-1)^{\sum_{k>s-1, k\in I'} |x_{k+1}| + \sum_{l\leqslant k<s-1, k\in I'} |x_{k+1}||x_l|} \ \varepsilon_x(I,J) \qquad \square$$

Lemme 4.7. — *Les deux relations suivantes sont satisfaites :*

$$\sum_{l=0}^{m} \Bigg(\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|\geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J) \ (-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I \\ |I_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)(-1)^{|x_{I_1}|} Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J) \ (|I|-1)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{J_1\sqcup J_2=J \\ |J_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|} Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|I|}(x_I).Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\mathcal{B}^k_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big)\Bigg)$$

$$= \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J) \ (-1)^{|x_I|}(m+1) Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m+1}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+ \sum_{l=0}^{m} \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|\geqslant 2, |J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|} \ Q'_2\Bigg(\mathcal{B}^{m-l}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big)$$

$$. \sum^{\bullet}_{J_1\sqcup J_2=J} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|}(|J_1|-1) Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|J_1|}(x_{J_1}).\mathcal{B}^k_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Bigg)$$

et

$$\sum_{l=0}^{m}\Bigg(\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I\\|I_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)Q'_2\Big(Q'_{\beta,2}\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}(x_{I_1})\otimes\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big).\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{J_1\sqcup J_2=J\\|J_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I|}(x_I).Q'_{\beta,2}\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|J_1|}(x_{J_1})\otimes\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big)\Bigg)$$

$$=\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (m+1)Q'_{\beta,2}\Big(\mathcal{B}^{m+1}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2,|J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|}\ Q'_2\Big(Q'_{\beta,1}\big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I|}(x_I)\big)$$

$$.\sum^{\bullet}_{J_1\sqcup J_2=J} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|}(|J_1|-1)Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}(x_{J_1}).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big).$$

Démonstration du lemme 4.7. — Pour expliciter les calculs, on revient aux sommes respectueuses sur trois parties de $\{1,\ldots,n\}$. Il faut tout simplement remarquer que si on casse le premier sous-ensemble d'une somme respectueuse on obtient une somme respectueuse, mais que si on sépare le deuxième sous-ensemble, on obtient deux sommes dont l'une est respectueuse mais l'autre ne l'est pas. Mais cette dernière le devient si on permute les deux premiers sous-ensembles, ce qui revient à multiplier par un signe. Le calcul se fait ainsi :

$$\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I\\|I_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)(-1)^{|x_{I_1}|}Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\Big).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})).\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |J| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{J_1 \sqcup J_2 = J \\ |J_1| \geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|} Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I|}(x_I).Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big)$$

$$= \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |I| \geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = I \\ |I_1| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)(-1)^{|x_{I_1}|} Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big).\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |J| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{J_1 \sqcup J_2 = J \\ |J_1| \geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|+|x_I|}$$

$$Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big)\Big).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |J| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)$$

$$\sum^{\bullet}_{\substack{J_1 \sqcup J_2 = J \\ |J_1| \geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{|x_{J_1}|+|x_I|(|x_{J_1}|+1)}$$

$$Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big)$$

$$= \sum^{\bullet}_{\substack{K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 = [1;n] \\ |K_1|+|K_2| \geqslant 3}} \varepsilon_x(K_1,K_2,K_3)\ (-1)^{|x_{K_2}|+1}(|K_1|+|K_2|-2)$$

$$Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|K_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{K_1})\big).\mathcal{B}^{m-l}_{|K_2|}(x_{K_2})\Big).\mathcal{B}^{k}_{|K_3|}(x_{K_3})\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 = [1;n]} \varepsilon_x(K_1, K_2, K_3)\ (|K_1| - 1)(-1)^{|x_{K_1}| + |x_{K_2}|}$$

$$Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|K_1|}(x_{K_1}).\mathcal{B}^{l}_{|K_2|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{K_2})\big)\Big).\mathcal{B}^{k}_{|K_3|}(x_{K_3})\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 = [1;n]} \varepsilon_x(K_1, K_2, K_3)(-1)^{|x_{K_1}||x_{K_2}|}\ (|K_2| - 1)(-1)^{|x_{K_1}| + |x_{K_2}|}$$

$$Q'_2\Big(Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|K_2|}(x_{K_2}).\mathcal{B}^{l}_{|K_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{K_1})\big)\Big).\mathcal{B}^{k}_{|K_3|}(x_{K_3})\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 = [1;n]} \varepsilon_x(K_1, K_2, K_3)\ (|K_1| - 1)(-1)^{|x_{K_1}| + |x_{K_2}| +\ |x_{K_1}||x_{K_2}|}$$

$$Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|K_2|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{K_2})\big).\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|K_1|}(x_{K_1}).\mathcal{B}^{k}_{|K_3|}(x_{K_3})\Big)\Big)$$

$$+ \sum^{\bullet}_{K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 = [1;n]} \varepsilon_x(K_1, K_2, K_3) x_{K_1}|\ (|K_2| - 1)(-1)^{|x_{K_1}| + |x_{K_2}|}$$

$$Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|K_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{K_1})\big).\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|K_2|}(x_{K_2}).\mathcal{B}^{k}_{|K_3|}(x_{K_3})\Big)\Big)$$

$$= \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |I| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I, J)\ (-1)^{|x_I|} Q'_2\Bigg[\sum^{\bullet}_{I_1 \sqcup I_2 = I} \varepsilon_x(I_1, I_2)(|I_1| - 1)$$

$$\Big((-1)^{|x_{I_1}|+1} Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1}).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big)$$

$$+ Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I_1|}(x_{I_1}.\mathcal{B}^{l}_{|I_2|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_2})\big)\Big)\Big).\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Bigg]$$

$$+ \sum^{\bullet}_{\substack{I \sqcup J = [1;n] \\ |J| \geqslant 2}} \varepsilon_x(I, J)(-1)^{|x_I|}\ Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).$$

$$\sum^{\bullet}_{J_1 \sqcup J_2 = J} \varepsilon_x(J_1, J_2)(-1)^{|x_{J_1}|}(|J_1| - 1) Q'_2\Big(\mathcal{B}^{m-l}_{|J_1|}(x_{J_1}).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big).$$

En faisant la somme sur l et en utilisant le lemme 4.7, on déduit le résultat. La preuve de la deuxième formule est analogue puisque :

$$Q'_{\beta,2}\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}(x_{I_1}) \otimes \mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big) = (-1)^{|x_{I_1}|} Q'_2\Big(Q'_{\beta,1}\big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big)$$

et :

$$(-1)^{|x_{I_1}|}Q'_{\beta,1}\Big(Q'_2\big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}(x_{I_1}).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\big)\Big)$$
$$= (-1)^{|x_{I_1}|+1}Q'_2\Big(Q'_{\beta,1}\big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big)$$
$$+ Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}(x_{I_1}).Q'_{\beta,1}\big(\mathcal{B}^{m-l}_{|I_2|}(x_{I_2})\big)\Big). \quad \square$$

Montrons maintenant la proposition 4.4.

Démonstration. — On va démontrer le résultat par récurrence. La remarque 4.5 donne l'initialisation pour $j = 0$. Supposons que la propriété énoncée dans la proposition 4.4 est vraie jusqu'à l'ordre $j-1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}^j_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\\
&= \frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|+1}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|}(Q_{\alpha,1}(x_I)).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(Q_{\alpha,1}(x_J)))\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|+1}(|I|-2)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|-1}(Q_{\alpha,2}(x_I)).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |J|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|-1}(Q_{\alpha,2}(x_J)))\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|}(|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(Q'_{\beta,1}(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I)).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))\\
&\quad-\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I).Q'_{\beta,1}(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)))\\
&= \frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_{\beta,2}(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))\\
&\quad+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^k_{|I|}(Q_{\alpha,1}(x_I)).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}}\varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ (|I|-2)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{C}^{j-k-1}_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J))$$

$$+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|J|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}(x_I).\mathcal{C}^k_{|J|}(x_J))$$

$$=\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_{\beta,2}(\mathcal{B}^k_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J))+\frac{1}{j}R^j_n+V^j_n$$

où :

$$R^j_n=\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}}\varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ (|I|-2)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{C}^{j-k-1}_{|I|}(x_I).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J))$$
$$+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|J|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\ \sum_{k=0}^{j-1}Q'_2(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}(x_I).\mathcal{C}^k_{|J|}(x_J))$$

Il s'agit de voir qu'une fois écrits seulement à l'aide des $\mathcal{B}^0_s$, les termes $\mathcal{C}^m_q$ ou V^m_q ($m\geqslant 1$) sont la somme de deux quantités « homogènes » vis-à-vis du nombre d'occurrence de Q'_2. Plus exactement, la première contient m nombre d'occurrences de Q'_2 et l'autre quantité en contient $m+1$. Ceci n'est pas vrai pour $\mathcal{C}^0_q$, la partie ne contenant aucune occurrence de Q'_2 est nulle.

La partie de V^j_n contenant j nombre d'occurrences de Q'_2 est donnée par :

$$\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}}\varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ (|I|-2)\ \sum_{k=0}^{j-2}Q'_2\Bigg(\Bigg[\sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I\\|I_1|\geqslant 2}}\varepsilon_x(I_1,I_2)$$
$$\sum_{l=0}^{j-k-2}\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}(x_{I_1})\otimes\mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I_2|}(x_{I_2})\big)$$
$$-(-1)^{|x_{I_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big)\Big]\Bigg].\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{j}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\ \sum_{l=1}^{j-1} Q'_2\Bigg(\mathcal{B}^{j-l-1}_{|I|}(x_I).\Bigg[\sum^{\bullet}_{\substack{J_1\sqcup J_2=I\\ |J_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)\\
&\quad \sum_{k=0}^{l-1}\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{l-k-1}_{|J_1|}(x_{J_1})\otimes \mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\big)\\
&\qquad -(-1)^{|x_{J_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l-k-1}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big]\Bigg]\Bigg)\\
&=\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{l=0}^{j-k-2}\Bigg[\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ (|I|-2)\ \sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I\\ |I_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)\\
&\quad Q'_2\Big(\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}(x_{I_1})\otimes \mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I_2|}(x_{I_2})\big)\\
&\qquad -(-1)^{|x_{I_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big)\Big].\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)\\
&\quad +\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1)\ \sum^{\bullet}_{\substack{J_1\sqcup J_2=I\\ |J_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)\\
&\quad Q'_2\Big(\mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I|}(x_I).\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}(x_{J_1})\otimes \mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\big)\\
&\qquad -(-1)^{|x_{J_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^{l}_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big]\Big)\Bigg]\\
&=\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-2}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(j-k-1)\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}(x_I)\otimes \mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\big)\\
&\qquad -(-1)^{|x_I|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{k}_{|J|}(x_J)\Big)\Big]\\
&\quad +\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-2}\sum_{l=0}^{j-k-2}\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\ |J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|}\\
&\quad Q'_2\Bigg(\Big[Q'_{\beta,1}\big(\mathcal{B}^{l}_{|I|}(x_I)\big)-\mathcal{B}^{l}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big)\Big]\\
&\qquad .\sum^{\bullet}_{J_1\sqcup J_2=J} \varepsilon_x(J_1,J_2)(-1)^{+|x_{J_1}}(|J_1|-1)Q'_2\big(\mathcal{B}^{j-k-l-2}_{|I|}(x_{J_1}).\mathcal{B}^{k}_{|J_2|}(x_{J_2})\big)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-2}\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(j-k-1)\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\big)\\
&\qquad - Q'_2\big(\mathcal{B}^{j-k-1}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\big)\Big]\\
&\quad + \frac{1}{j}\sum_{l=0}^{j-2}\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(j-l-1)\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{l}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-l-1}_{|J|}(x_J)\big)\\
&\qquad - Q'_2\big(\mathcal{B}^{l}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-l-1}_{|J|}(x_J)\big)\Big]\\
&= \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j-1}\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)k\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{k}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)\\
&\qquad - Q'_2\big(\mathcal{B}^{k}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)\Big]\\
&\quad + \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-2}\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)(j-k-1)\Big[Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{k}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)\\
&\qquad - Q'_2\big(\mathcal{B}^{k}_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big)\Big]\\
&= \frac{j-1}{j}\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\sum_{k=0}^{j-1} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^{k}_{|I|}(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k-1}_{|J|}(x_J)\big) + \frac{j-1}{j}R^j_n.
\end{aligned}$$

Pour les termes contenant $(j+1)$ nombre d'occurrences de Q'_2, on commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
&\sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|=1}} \varepsilon_x(I,J)Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^k_1(x_I)\otimes\mathcal{B}^{m-k}_{n-1}(x_J)\big)\\
&\qquad\qquad = \sideset{}{^\bullet}\sum_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|=1}} \varepsilon_x(I,J)(-1)^{|x_I|}Q'_2\big(\mathcal{B}^k_1\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big)\mathcal{B}^{m-k}_{n-1}(x_J)\big).
\end{aligned}$$

On peut donc rajouter ces termes à $-R^{m+1}_n$ et on supprime la condition $|I|\geqslant 2$. Il n'est pas difficile de voir que dans les égalités du lemme 3, la suppression des conditions $|I_1|\geqslant 2$ et $|J_1|\geqslant 2$ dans le premier membre se traduit par la suppression de la condition $|I|\geqslant 2$ dans le second membre.

Les termes contenant $(j+1)$ nombre d'occurrences de Q'_2 seront alors :

$$\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=0}^{j-k-1}\Bigg[\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|\geqslant 3}} \varepsilon_x(I,J)\ (-1)^{|x_I|+1}\ (|I|-2) \sum^{\bullet}_{\substack{I_1\sqcup I_2=I\\|I_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I_1,I_2)$$
$$Q'_2\Big((-1)^{|x_{I_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|I_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{I_1})\big).\mathcal{B}^{j-k-l-1}_{|I_2|}(x_{I_2})\Big).\mathcal{B}^k_{|J|}(x_J)\Big)$$
$$+\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|J|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J)\ (|I|-1) \sum^{\bullet}_{\substack{J_1\sqcup J_2=I\\|J_1|\geqslant 2}} \varepsilon_x(J_1,J_2)$$
$$Q'_2\Big(\mathcal{B}^{j-k-l-1}_{|I|}(x_I).(-1)^{|x_{J_1}|}Q'_2\Big(\mathcal{B}^l_{|J_1|}\big(Q_{\alpha,1}(x_{J_1})\big).\mathcal{B}^k_{|J_2|}(x_{J_2})\Big)\Big)\Bigg].$$

Par les mêmes transformations que ci-dessus, ces termes sont égaux à

$$\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]} \varepsilon_x(I,J)(j-k)Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k}_{|J|}(x_J)\big)\Big]$$
$$+\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]} \varepsilon_x(I,J)(k)Q'_2\big(\mathcal{B}^k_{|I|}\big(Q_{\alpha,1}(x_I)\big).\mathcal{B}^{j-k}_{|J|}(x_J)\big)\Big]$$
$$=\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n]\\|I|=1}} \varepsilon_x(I,J)\sum_{k=0}^{j} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}^k_1(x_I)\otimes\mathcal{B}^{j-k}_{n-1}(x_J)\big)-R^{j+1}_n(x_1\otimes\cdots\otimes x_n). \quad \square$$

Démontrons maintenant le théorème 4.2.

Démonstration. — Donnons-nous des applications $\mathcal{B}_n : T^n\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ de degré 0 qui vérifient les relations suivantes :

$$\mathcal{B}_n\circ Q_{\alpha,1}\ (x_1\otimes\cdots\otimes x_n)+\mathcal{B}_{n-1}\circ Q_{\alpha,2}\ (x_1\otimes\cdots\otimes x_n)$$
$$= Q'_{\beta,1}\circ\mathcal{B}_n\ (x_1\otimes\cdots\otimes x_n)+\sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]} \varepsilon_x(I,J)\ Q'_{\beta,2}\left(\mathcal{B}_i(x_I)\otimes\mathcal{B}_j(x_J)\right).$$

Par la proposition 3.3, les applications $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ s'étendent en un morphisme bien fait.

Par définition des $\mathcal{C}^j_n$, pour tout entier $n\geqslant 2$ et tout $x_1,\ldots,x_n\in\mathfrak{g}$:

$$\sum_{j\geqslant 0}\mathcal{C}^j_n=\sum_{j\geqslant 0}\Big(B^j_n\circ Q_{\alpha,1}+B^j_{n-1}\circ Q_{\alpha,1}-Q'_{\beta,1}\circ B^j_n\Big)\,(x_1\otimes\cdots\otimes x_n). \quad (4.1)$$

Par les propositions 4.3 et 4.4, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geqslant 0} \mathcal{C}_n^j &= \mathcal{C}_n^0 + \sum_{j\geqslant 1} \mathcal{C}_n^j \\
&= \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|=1}} \varepsilon_x(I,J) Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_1^0(x_I)\otimes \mathcal{B}_{n-1}^0(x_J)\big) - R_n^1 \\
&\quad + \sum_{j\geqslant 1} \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J) \sum_{k=0}^{j-1} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_{|I|}^k(x_I)\otimes \mathcal{B}_{|J|}^{j-k-1}(x_J)\big) \\
&\quad + \sum_{j\geqslant 1} \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|=1}} \varepsilon_x(I,J) \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k=0}^{j} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_1^k(x_I)\otimes \mathcal{B}_{n-1}^{j-k}(x_J)\big) \\
&\quad + \sum_{j\geqslant 1} \big(R_n^j(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) - R_n^{j+1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\big)
\end{aligned}$$

Les termes $(R_n^j)_{j\geqslant 1}$ se simplifient deux à deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geqslant 0} \mathcal{C}_n^j = &\sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|=1}} \varepsilon_x(I,J) Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_1^0(x_I)\otimes \mathcal{B}_{n-1}^0(x_J)\big) \\
&\quad + \sum_{j\geqslant 1} \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|\geqslant 2}} \varepsilon_x(I,J) \sum_{k=0}^{j-1} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_{|I|}^k(x_I)\otimes \mathcal{B}_{|J|}^{j-k-1}(x_J)\big) \\
&\quad + \sum_{j\geqslant 1} \sum^{\bullet}_{\substack{I\sqcup J=[1;n] \\ |I|=1}} \varepsilon_x(I,J) \sum_{k=0}^{j} Q'_{\beta,2}\big(\mathcal{B}_1^k(x_I)\otimes \mathcal{B}_{n-1}^{j-k}(x_J)\big)
\end{aligned}$$

Les sommes du côté droit se réunissent en une seule somme par un simple jeu sur les indices :

$$\sum_{j\geqslant 0} \mathcal{C}_n^j = \sum^{\bullet}_{I\sqcup J=[1;n]} \varepsilon_x(I,J)\; Q'_{\beta,2}\left(\left(\sum_{k\geqslant 0} \mathcal{B}_{|i|}^k(x_I)\right)\otimes\left(\sum_{l\geqslant 0} \mathcal{B}_{|J|}^l(x_J)\right)\right)$$

En comparant avec l'équation (4.1), on obtient pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\geqslant 0} B_n^j\right) \circ Q_{\alpha,1}\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) + \left(\sum_{j\geqslant 0} B_{n-1}^j\right) \circ Q_{\alpha,2}\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ = Q'_{\beta,1} \circ \left(\sum_{j\geqslant 0} B_n^j\right)\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ + \dot{\sum_{I\sqcup J=[1;n]}} \varepsilon_x(I,J)\ Q'_{\beta,2}\left(\left(\sum_{k\geqslant 0} \mathcal{B}^k_{|i|}(x_I)\right) \otimes \left(\sum_{l\geqslant 0} \mathcal{B}^l_{|J|}(x_J)\right)\right)\end{aligned}$$

De la proposition 3.3, il suit que la famille $(\sum_{j\geqslant 0} B_n^j)_{n\geqslant 1}$ est la famille des coefficients de Taylor d'un Leib$_\infty$-morphisme bien fait. $\square$

5. Applications et questions

Nous allons utiliser notre construction pour retrouver la formule due à Dominique Manchon [12], qui relie -selon ses mots- le crochet de Poisson, le commutateur du star-produit, l'application tangente du morphisme de formalité de Kontsevich, et sa dérivée seconde.

On prend les notations de [3, 4, 12], qui sont désormais classiques. Soit M une variété différentielle, et soit $\gamma \in T_{poly}(M)[\![\hbar]\!]$ une structure de Poisson formelle. On applique notre construction à $\mathfrak{g} := T_{poly}(M)[\![\hbar]\!]$, $\mathfrak{g}' := \mathcal{D}_{poly}(M)[\![\hbar]\!]$, $\alpha = \hbar\gamma$ et $\mathcal{F}$ la formalité de Kontsevich. Considérons $f, g \in C^\infty(M)$. D'un côté, on a

$$\begin{aligned}Q_\alpha(f \otimes g) &= Q_{\alpha,1}(f) \otimes g - f \otimes Q_{\alpha,1}(g) + Q_{\alpha,2}(f \otimes g) \\ &= \hbar\left(H_f \otimes g - f \otimes H_g - \{f,g\}\right).\end{aligned}$$

Appliquons $\mathcal{B}$ et projetons sur $D_{poly}(M)[\![\hbar]\!]$. Sachant que $\mathcal{B}_2(H_f \otimes g) = 0$ par définition de $\mathcal{B}_2$, on obtient la quantité :

$$-\hbar\big(\mathcal{B}_2(f \otimes H_g) + \mathcal{B}_1(\{f,g\})\big). \tag{5.1}$$

D'un autre côté, appliquons $Q'_\beta \circ \mathcal{B}$ à $f \otimes g$, et projetons sur $D_{poly}(M)[\![\hbar]\!]$. Sachant que $\mathcal{B}_2(f \otimes g) = 0$ pour des raisons de degré, le seul terme qui reste est $Q'_{\beta,2}(\mathcal{B}_1(f) \otimes \mathcal{B}_1(g))$ En comparant avec (5.1), on obtient la formule :

$$-\hbar\left(\mathcal{B}_2(f \otimes H_g) + \mathcal{B}_1(\{f,g\})\right) = Q'_{\beta,2}(\mathcal{B}_1(f) \otimes \mathcal{B}_1(g))$$

Or, par définition du crochet de Gerstenhaber et du crochet dérivé :

$$\begin{aligned} Q'_{\beta,2}(\mathcal{B}_1(f), \mathcal{B}_1(g)) &= [\mathcal{B}_1(f), \mathcal{B}_1(g)]'_\beta \\ &= -[[\star, \mathcal{B}_1(f)]_G, \mathcal{B}_1(g)]_G \\ &= -(\mathcal{B}_1(f) \star \mathcal{B}_1(g) - \mathcal{B}_1(g) \star \mathcal{B}_1(f)). \end{aligned}$$

Utilisons les notations de [12] et notons $\Phi := T^1_\alpha \mathcal{F}$ la dérivée première de $\mathcal{F}$ et $\Psi = T^2_\alpha \mathcal{F}$ la dérivée seconde en $\alpha = \hbar\gamma$, on obtient :

$$\Psi(H_f, H_g) = \frac{1}{\hbar}\left(\Phi(\{f,g\}) - \frac{\Phi(f) \star \Phi(g) - \Phi(g) \star \Phi(f)}{\hbar}\right).$$

Nous finissons par un certain nombre de questions. Notre construction donne l'existence d'un Leib_∞-morphisme entre deux algèbres de Leibniz dérivées. Mais il serait intéressant de se demander ce qu'il en est des algèbres de Leibniz générales. Par exemple, sous quelles conditions le théorème de transfert reste-t-il vrai pour le contexte Leibniz ?

Par ailleurs, une question qui nous paraît intéressante est de savoir ce qu'est un Maurer–Cartan pour une algèbre de Leibniz différentielle graduée $\mathfrak{g}$. Une réponse possible est de dire que c'est un élément de type groupe g et de degré 0 dans la cogèbre $(T(\mathfrak{g}[-1]), \Delta)$ telle que $Dg = 0$. Il n'est plus en général vrai que les éléments de type groupe sont de la forme e^a avec $a \in \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}[-1]_0$. Mais ces éléments doivent exister en général. Or, étant donné un morphisme de DGLA, le théorème 4.2 induit un morphisme d'algèbres de Leibniz différentielles graduées, qui induit à son tour une application entre leurs eléments de Maurer–Cartan au sens précédent. De manière générale, une approche intéressante consiste à déterminer des objets fonctoriellement associées aux algèbres Leibniz-infinis, les éléments de Maurer–Cartan n'étant qu'un exemple.

Enfin, le cas $T_{poly}(M), D_{poly}(M)$ nous semble mériter une étude plus approfondie. Nous avons pu dériver une formule de Dominique Manchon, mais il nous semble clair que d'autres applications existent.

Au moment de finir cet article, Ricardo Campos (Université de Montpellier) nous a décrit un argument théorique et non-constructif donnant l'existence du morphisme d'algèbres L_∞ annoncé au théorème 4.2, sans donner de formule explicite. Cet argument est très intéressant, mais mérite encore d'être complété. Nous le décrivons brièvement ici.

Pour tout morphisme L_∞ d'une DGLA $\mathfrak{g}$ vers une DGLA $\mathfrak{g}'$, il existe une troisième DGLA $\mathfrak{h}$, un quasi-isomorphisme de DGLA $\varphi : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{g}$ et un morphisme de DGLA $\psi : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{g}'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{h} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[rr, "\mathcal{F}"'] & & \mathfrak{g}' \end{tikzcd}$$

Le cas des quasi-isomorphismes se trouve dans [4], et le cas général suit du corollaire 11.3.6 de [11]. L'application φ étant un quasi-isomorphisme de DGLA, il est possible de trouver un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{h}$ dont les images par φ et ψ soient des éléments de Maurer–Cartan équivalents à jauge près à α et β. Pour la suite du raisonnement, il faudrait vérifier que l'on peut changer par une transformation de jauge l'élément de Maurer–Cartan α dans le théorème 2 sans affaiblir le résultat final, ce qui ne nous paraît pas évident.

Une fois α et β transformés, φ et ψ sont aussi des morphismes d'algèbres de Leibniz différentielles graduées. Il se trouve que l'opérade des algèbres de Leibniz est une opérade de Koszul [7]. Or, dans une opérade de Koszul O, tous les quasi-isomorphismes O_∞ sont quasi-inversibles (cf. [11, théorème 10.4.7]). Il est donc possible d'inverser φ en un morphisme $Leib_\infty$ que l'on notera φ^{-1}. La composition $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un morphisme $Leib_\infty$ de $\mathfrak{g}_\alpha$ vers $\mathfrak{g}'_\beta$. Il reste toutefois à vérifier qu'il envoie α sur β et étend $\mathfrak{F}$, ce qui ne nous semble pas trivial et demanderait de voir explicitement la construction de l'inverse à homotopie près φ^{-1}.

Bibliographie

[1] T. S. Alexei Kotov, « Communication personnelle ».

[2] M. Ammar & N. Poncin, « Coalgebraic approach to the Loday infinity category, stem differential for $2n$-ary graded and homotopy algebras », *Ann. Inst. Fourier* **60** (2010), n° 1, p. 355-387.

[3] D. Arnal, D. Manchon & M. Masmoudi, « Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich », *Pac. J. Math.* **203** (2002), n° 1, p. 23-66.

[4] M. Kontsevich, « Deformation quantization of Poisson manifolds », *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), n° 3, p. 157-216.

[5] Y. Kosmann-Schwarzbach, « Derived brackets », *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), p. 61-87.

[6] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau & P. Vanhaecke, *Poisson structures*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 347, Springer, 2013, xxiv+461 pages.

[7] M. Livernet, « Homotopie rationnelle des algèbres de Leibniz », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), n° 8, p. 819-823.

[8] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 301, Springer, 1992, Appendix E by María O. Ronco, xviii+454 pages.

[9] ———, « Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz », *Enseign. Math.* **39** (1993), n° 3-4, p. 269-293.

[10] J.-L. Loday & T. Pirashvili, « Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology », *Math. Ann.* **296** (1993), n° 1, p. 139-158.

[11] J.-L. Loday & B. Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer, 2012, xxiv+634 pages.

[12] D. Manchon, « Poisson bracket, deformed bracket and gauge group actions in Kontsevich deformation quantization », *Lett. Math. Phys.* **52** (2000), n° 4, p. 301-310.

[13] B. Vallette, « Homotopy Theory Of Homotopy Algebras », `https://arxiv.org/abs/1411.5533`.