ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Laurent Clozel

Intégration de Hecke de fonctions singulières

Tome XXXII, nº 2 (2023), p. 319–335.

https://doi.org/10.5802/afst.1738

Publication membre du centre
Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2258-7519

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXXII, n° 2, 2023
pp. 319-335

Intégration de Hecke de fonctions singulières (*)

Laurent Clozel (1)

Pour Jean-Pierre Otal, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. — Soit Y une courbe modulaire, déduite d'un groupe de congruence de niveau N. On dispose sur Y des correspondances de Hecke T_n pour $(n,N)=1$. Si $z_1 \in Y$, la suite de mesures $\overline{T_n}z_1 = (\deg T_n)^{-1}\sum \delta_{z_i}$, où $T_n z_1$ est la somme (avec multiplicités) des z_i, tend faiblement (i.e., pour l'évaluation sur les fonctions $f \in C_c(Y)$) vers la mesure invariante normalisée sur Y. Dans cet article, on étend ce résultat à l'évaluation sur une fonction f ayant une singularité logarithmique en un point. La conclusion (f étant donnée) est alors vraie pour presque tout $z_1 \in Y$. Les démonstrations font appel à la théorie de Sobolev, déjà utilisée dans ce contexte dans [5, §8].

Abstract. — Consider a modular curve Y associated to a congruence subgroup of level N. The Hecke correspondences T_n, for $(n,N)=1$, are defined on Y. For $z_1 \in Y$, the sequence of measures $\overline{T_n}z_1 = (\deg T_n)^{-1}\sum \delta_{z_i}$, $T_n z_1$ being the sum (with multiplicities) of the z_i, converges to the invariant normalised measure on Y for the weak topology, viz., the evaluation against functions $f \in C_c(Y)$. Here this is extended to the evaluation against a function f that has a logarithmic singularity at a given point. For f given, the convergence is then achieved for almost all z_1. The proof relies on Sobolev theory, already used in this context in [5, §8].

Introduction

Soit G un groupe semi-simple défini sur $\mathbb{Q}$, $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ son espace symétrique, $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ étant un sous-groupe compact maximal, et soit $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe de congruence. Soit $Y = \Gamma\backslash X$. On dispose sur Y des correspondances de Hecke, définies par exemple (cf. Shimura [11]) par des doubles classes

$$T = \Gamma\,\delta\,\Gamma\,,\ \ \delta \in G(\mathbb{Q})$$

(*) Reçu le 29 septembre 2020, accepté le 10 mai 2021.

(1) Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 307, 91407 Orsay Cedex, France — laurent.clozel@math.u-psud.fr

Article proposé par Vincent Guedj.

et aussi, de façon plus générale, dans le cadre adélique. Si T est une telle correspondance et $z \in Y$, son orbite de Hecke est l'ensemble Tz (défini avec ses multiplicités.).

Burger et Sarnak [1], pour des suites particulières T_n, puis Ullmo et l'auteur [5, Prop. 8.1], pour des suites très générales, ont montré que, si $z_1 \in Y$, les mesures normalisées $\overline{T}_n z_1 = \frac{1}{\deg(T_n)} \sum_{z \in T_n z_1} \delta_z$ (où z est compté avec sa multiplicité et δ_z est la mesure de Dirac) convergent vers la mesure invariante sur Y, normalisée par $\int_Y \mathrm{d}z = 1$. Ceci s'applique en particulier au cas où Y est une courbe modulaire et où les T_n sont les opérateurs de Hecke : pour $f \in C_c(Y)$ on a alors pour tout $z_1 \in Y$

$$\int_Y f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_n \frac{1}{\deg(T_n)} \sum_{z \in T_n z_1} f(z)\,. \tag{0.1}$$

Dans des travaux récents de François Charles et Salim Tayou, le problème s'est posé d'étendre de tels résultats au cas où f est une fonction présentant des singularités. Par exemple, dans le cas modulaire, f peut être à support compact, continue sauf en un point où elle présente une singularité logarithmique ; cf. [3, 10] ; f est alors intégrable, et on cherche à lui étendre la formule d'intégration (0.1), que nous appelons ici *intégration de Hecke*.

La formule n'a évidemment pas de sens si la singularité z_0 de f appartient à l'orbite $T_n z_1$. On peut se demander si elle est vraie (f, et donc z_0, étant donnés) pour un choix de z_1 « générique ». C'est ce que nous démontrons ici dans le cas des courbes modulaires.

Il est naturel de partir du résultat connu pour des fonctions continues (à support compact) et d'approximer f, par troncature, par des fonctions f_n (que l'on peut supposer C^∞ à support compact) nulles en z_0, et de plus en plus proches de f pour $n \to \infty$. Puisque $\overline{T}_n f(z_1)$ est donnée par des valeurs ponctuelles de f, et qu'il en est de même de $\overline{T}_n f_n(z_1)$, on est amené à utiliser la théorie de Sobolev pour contrôler celles-ci par les normes, dans des espaces H^s convenables, des $\overline{T}_n f_n$. Celles-ci sont, à leur tour, estimées par l'approximation connue, pour les formes de Maass et les formes modulaires, de la conjecture de Ramanujan : procédé introduit dans [5], voir ici la section 2.3.

On voit alors que la convergence des $\overline{T}_n f_n(z_1)$, et donc de $\overline{T}_n f(z_1)$, vers l'intégrale de f, dépend d'une part du contrôle des normes de Sobolev des f_n et, d'autre part, de la distance (pour la métrique hyperbolique sur Y) entre z_0 et l'orbite de Hecke $T_n z_1$. En comparant ces deux données, on obtient un résultat conditionnel (proposition 3.5) montrant que $\overline{T}_n f(z_1) \to \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z$ si la distance $d(z_0, T_n z_1)$, pour $n \to \infty$, n'est pas trop petite. Noter que cet argument nécessite le contrôle d'une norme de Sobolev fractionnaire (en fait celle d'un espace $H^{1+\alpha}$ pour le laplacien, avec α assez petit) : elle résulte ici du contrôle des normes dans H^1 et H^2 et d'un argument simple d'interpolation (proposition 3.3).

L'auteur s'était proposé tout d'abord de contrôler la distance $d(z_0, T_n z_1)$ par des arguments d'approximation diophantienne : un argument de ce type apparaît dans l'article de François Charles [3]. Il n'y a pas réussi. L'élément final de la démonstration, montrant que, pour z_0 (la singularité) fixé, l'intégration de Hecke converge pour presque tout choix de z_1, est pourtant similaire à un résultat de Khintchine en « théorie métrique » des nombres transcendants. Voir [7, Thm. 32], ainsi que Cassels [2, Ch. 7]. Il implique que z_0 est mal approximé par les orbites de Hecke $T_p z_1$ pour presque tout z_1 (section 4). Ceci permet de conclure et de démontrer le théorème principal : sous les hypothèses résumées ci-dessus, on a alors :

Théorème (Théorème 4.4). — *Pour presque tout $z_1 \in Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ étant le demi-plan de Poincaré, Γ un groupe de congruences),*

$$\overline{T}_p\, f(z_1) \longrightarrow \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z$$

quand $p \to \infty$ parmi les nombres premiers.

En fait, la démonstration s'étend simplement à la suite des T_n, on ne s'est limité aux T_p que pour simplifier quelques notations. (Utiliser les estimées $\|\overline{T_n}\| \leqslant n^{-1/2+\rho+\varepsilon}$ [5, (1.4)] ainsi que $\deg(T_n) = \sigma_1(n) \sim n$.)

La démonstration montre en fait que ce phénomène reste vrai même si f est plus singulière en z_0 : le résultat plus général est esquissé dans la section 4.2.

Remerciements

Je tiens à remercier Salim Tayou pour ses questions, ainsi que Marc Hindry et Michel Laurent pour la référence au résultat de Khintchine, Jean-Michel Bismut pour son aide en Analyse, et enfin le rapporteur pour une lecture attentive.

Ce texte aurait trouvé naturellement sa place dans le volume spécial des Annales Scientifiques de la Faculté des Sciences de Toulouse dédié à Jean-Pierre Otal en 2019. Il n'existait pas à l'époque… À l'occasion de sa rédaction j'ai relu l'article que nous avons écrit ensemble sur un sujet voisin [4]. J'ai découvert avec surprise que le problème ici résolu était posé, dans un cadre beaucoup plus général, dans notre article [4, p. 209].

1. Rappels de théorie de Sobolev

Nous aurons besoin d'utiliser des espaces de Sobolev H^a d'exposant non entier. Nous rappelons ici la théorie élémentaire sur le tore $T^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ (cf. [6, §0.6]). Soit $\mathbf{\Delta} = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le laplacien positif (1). Si $f(x) = \sum_n a_n e_n(x)$ est une fonction assez différentiable sur T^d ($n \in \mathbb{Z}^d$, $e_n(x) = \exp(2i\pi\langle n, x\rangle)$),

$$|f(x)| \ll \|f\|_2 + \alpha^{-1/2}\|\mathbf{\Delta}^a f\|_2$$

pour $a > \frac{d}{4}$, $\alpha = a - \frac{d}{4}$, la constante implicite étant uniforme en a. (Nous utilisons la notation usuelle $A \ll B$ pour $A = O(B)$, la dépendance des constantes implicites par rapport aux données, si elle n'est pas précisée, étant évidente.) En particulier, si $f \in H^{2a}$ (défini par $\|f\|_{2a} = \|f\|_2 + \|\mathbf{\Delta}^a f\|_2 < \infty$), f est continue et $\|f\|_\infty$ est majoré par $\|f\|_{2a}$.

2. Courbes modulaires : réduction aux estimées de Sobolev

2.1.

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré, et soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ un sous-groupe de congruences. On suppose pour simplifier que Γ opère sans point fixe sur $\mathcal{H}$(2). Soit $Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$. On dispose sur Y des correspondances de Hecke : soit $z \in Y$ et $\widetilde{z} \in \mathcal{H}$ un relèvement de z ; soit $\pi : \mathcal{H} \to Y$ la projection. Alors, si n est premier au niveau de Γ, i.e., premier à N où $\Gamma \supset \Gamma(N)$,

$$T_n z = \sum_{ad=n} \sum_{b=0}^{d-1} \pi\left(\frac{a\widetilde{z} + b}{d}\right), \tag{2.1}$$

un multi-ensemble de cardinal

$$d(n) = \deg(T_n) = \sigma_1(n),$$

ne dépend pas de $\widetilde{z}$. Si f est une fonction convenable (par exemple continue à support compact), on pose, z étant donné :

$$\overline{T}_n f(z) = \frac{1}{d(n)} \sum_{z_k \in T_n z} f(z_k), \tag{2.2}$$

les z_k étant comptés avec leurs multiplicités. Munissons Y de la mesure hyperbolique normalisée : $\int_Y \mathrm{d}z = 1$. Soit $f^0 = \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z$. Le résultat

(1) On désignera par Δ un laplacien, par $\mathbf{\Delta} = -\Delta$ le laplacien positif associé.

(2) Le lecteur vérifiera que ceci n'est pas nécessaire, mais le cas général compliquerait inutilement la rédaction.

fondamental (« équidistribution des orbites de Hecke ») est que, pour tout choix z_1 de z, et tout $f \in C_c(Y)$,

$$\overline{T}_n f(z_1) \longrightarrow f^0 . \tag{2.3}$$

Cf. Clozel–Ullmo [5] ; les arguments originaux sont dus à Burger–Sarnak [1].

Dans cet article, nous nous intéressons à l'extension de ce résultat à des fonctions f qui ne sont pas continues. Nous supposerons en fait :

Hypothèse 2.1. —

(i) *f est à support compact sur Y.*
(ii) *f est continue, sauf en un point $z_0 \in Y$; au voisinage de z_0, $f(z) = -\log|g(z)|$ où g est une fonction holomorphe définie au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$.*

Dans le cas (que nous avons exclu) où $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on pourrait donc prendre $f(z) = -\log|j(z) - j(z_0)|$ où j est l'invariant modulaire, cf. [3].

Lemme 2.2. — *Pour $z_0 \in Y$ et f_1, f_2 vérifiant l'hypothèse 2.1, la propriété d'approximation* (2.3) *(z_0 étant fixé) est vraie pour f_1 si et seulement si elle l'est pour f_2.*

Si g_1 et g_2 sont les fonctions holomorphes associées, on a alors au voisinage de z_0 :

$$|g_1(z)|^2 = (a + O(|z - z_0|))|g_2(z)|^2$$

pour un $a > 0$, donc $f_1(z) = f_2(z) - \frac{1}{2}\log a + O(|z - z_0|)$. En particulier,, $f_1 - f_2$ est continue à support compact, donc vérifie (2.3).

Noter que le même argument s'applique si f_2 est égale, au voisinage de z_0, à $-\log d(z, z_0)$ où d est la distance hyperbolique : c'est l'expression locale d'un noyau de Green sur Y.

Nous pouvons donc supposer que f est donnée au voisinage de z_0 par $-\log|g(z)|$ où $g(z)$ est une carte locale sur Y, i.e., $g(z) = \pi^{-1}(z)$ où $\pi : V(\widetilde{z}_0) \to V(z_0)$ est un isomorphisme analytique entre voisinages d'un relèvement $\widetilde{z}_0$ et de z_0. Puisque le laplacien hyperbolique Δ est multiple du laplacien euclidien Δ_e sur $\mathcal{H}$, on a alors au voisinage de z_0 :

$$\Delta f = \Delta_e\, f = 0 . \tag{2.4}$$

Le même argument que pour le lemme 2.2 montre que l'on peut supposer le support de f contenu dans un petit disque (euclidien) autour de z_0 ; on identifiera z_0 et $\widetilde{z}_0$, et on notera $B(z_0, r_0)$ ou $B(\widetilde{z}_0, r_0)$ ce disque. Puisque $f(z) = -\log|g(z)|$ est C^∞ sur $B(z_0, r_0) - \{z_0\}$, on peut aussi supposer que f est C^∞ en-dehors de z_0.

2.2.

L'expression (2.2) n'est évidemment pas définie si z_0 est dans l'orbite de Hecke $T_n z_1$. La relation étant réciproque, on suppose donc désormais que z_1 n'appartient à aucune orbite de Hecke de z_0. Pour tout n, soit alors

$$\varepsilon_h(n) = d(T_n z_1, z_0) = \inf_k d(z_k, z_0) \tag{2.5}$$

($z_k \in T_n z_0$), d étant la distance hyperbolique. Le résultat fondamental d'équidistribution montre que $\varepsilon_h(n) \to 0$ pour $n \to \infty$. En particulier, $\varepsilon_h(n) \sim \varepsilon(n)$, où $\varepsilon(n)$ est défini comme $\varepsilon_h(n)$, mais par la distance euclidienne au voisinage de z_0.

Soit $f_n \in C_c(Y)$ telle que

$$f_n(z) = f(z) \qquad (z \notin B(z_0, \varepsilon(n)))\,.$$

Alors

$$\overline{T}_n f_n(z_1) = \overline{T}_n f(z_1)\,. \tag{2.6}$$

Nous considérons une suite f_n telle que

$$\int_Y (f_n - f)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0\,. \tag{2.7}$$

Pour obtenir la formule limite (2.3) pour f, il suffit alors de vérifier

$$\overline{T}_n f_n(z_1) - f_n^0 \longrightarrow 0\,. \tag{2.8}$$

Posons, pour $r = |z - z_0| \leqslant r_0$,

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f(z) && (z \notin B(z_0, \varepsilon(n))) \\ &= \chi_n(r) f(z) && (r \leqslant \varepsilon(n))\,. \end{aligned}$$

Dans les calculs qui suivent, n étant donné, on écrira simplement ε pour $\varepsilon(n)$. On choisit $\chi_n(r)$, C^∞, telle que $\chi_n(r) \in [0, 1]$ et

$$\chi_n(r) = \begin{cases} 0 & r \leqslant 1/2\,\varepsilon \\ 1 & r \geqslant \varepsilon\,. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Sup} |\chi_n'| &\gg \varepsilon^{-1} \\ \operatorname{Sup} |\chi_n''| &\gg \varepsilon^{-2}\,, \end{aligned}$$

les dérivées étant prises par rapport à r, et on peut réciproquement choisir $\chi_n(r)$ telle que ces ordres de grandeur soient exacts. Alors

$$\int_Y |f_n - f|\,\mathrm{d}z \asymp \int_{B(z_0, r)} |f_n - f|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(la seconde intégrale étant prise pour la mesure euclidienne)

$$\ll \int_{r\leqslant\varepsilon} |\log r| r \,\mathrm{d}r \ll \varepsilon^2 |\log\varepsilon|$$

d'où (2.7). Il s'agit donc de contrôler (2.8).

2.3.

Le terme $\overline{T}_n f_n(z_1) = d_n^{-1}\sum_{z\in T_n z_1} f_n(z)$ dépend d'estimées ponctuelles sur f_n, que nous contrôlons grâce au lemme de Sobolev. C'est la méthode (classique) utilisée dans [5, §8.1]. Dans cet article, elle est appliquée aux fonctions sur $\Gamma\backslash G$ et not $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. On pourrait l'appliquer à $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, mais l'utilisation d'une paramétrix amène à considérer Δ^2 [5, p. 251] et n'amène pas à des estimées adéquates : nous devons faire un usage plus précis de lemme de Sobolev, reposant sur la section 1.

On peut identifier $B(z_0, r_0)$, avec sa métrique *euclidienne*, donc plate, à un ouvert d'un tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Pour h à support compact et C^2 dans $B(z_0, r_0)$, nous avons donc l'inégalité

$$|h(z)| \leqslant C_1\|h\|_2 + C_2\|\Delta_e h\|_2 \tag{2.9}$$

pour $z \in \mathrm{Supp}(h)$. Nous voudrions appliquer ceci à $z = z_1$ et

$$h_0(z) = \overline{T}_n f_n(z) - f_n^0\,. \tag{2.10}$$

Dans une première étape, nous sommes donc amené à supposer :

Hypothèse 2.3. — *$z_1 \in B(z_0, r_0)$.*

Mais la fonction h_0 de (2.10) n'est pas à support dans $B(z_0, r_0)$. Soit alors $\varphi(z)$ une fonction positive, C^∞ à support compact proche de z_1, et telle que $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ et $\varphi(z_1) = 1$. Nous considérons

$$h(z) = \varphi(z)(\overline{T}_n f_n(z) - f_n^0) = \varphi(z) h_0(z) \tag{2.11}$$

de sorte que $h(z_1) = h_0(z_1)$ et que (2.9) s'applique à h.

On a tout d'abord

$$\|h\|_2^2 \leqslant \int_{B(z_0,r_0)} |h_0(z)|^2 \, d_e\, z$$

où $d_e\, z$ est la mesure euclidienne ; celle-ci étant comparable sur $B(z_0, r_0)$ à la mesure hyperbolique,

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &\ll \int_{B(z_0,r_0)} |h_0(z)|^2 \,\mathrm{d}z \\ &\leqslant \int_Y |h_0(z)|^2 \,\mathrm{d}z = \|h_0\|_Y^2\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\Delta_e\, h &= \Delta_e(\varphi\, h_0)\\ &= (\Delta_e\varphi)h_0 + \varphi\,\Delta_e\, h_0 + R\end{aligned}$$

où $R(z) = R(x+iy) = 2(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h_0}{\partial y})$.

On a de même, en écrivant $B = B(z_0, r_0)$:

$$\|\Delta_e\varphi)h_0\|_B \ll \|h_0\|_B \leqslant \|h_0\|_Y\,, \tag{2.13}$$

les normes étant les normes L^2, et

$$\|\varphi\,\Delta_e h_0\| \ll \|\Delta_e h_0\|_B \ll \|\Delta h_0\|_B \ll \|\Delta h_0\|_Y \tag{2.14}$$

puisque Δ_e est aussi comparable au laplacien hyperbolique Δ.

Il nous faut contrôler la norme L^2 du terme rectangle, dont le support est dans B. Pour ceci, nous devons interpréter les dérivées partielles comme dérivées de Lie.

Le laplacien euclidien Δ_e s'écrit aussi

$$\Delta_e = \partial\bar\partial\,, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad \bar\partial = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

de sorte que

$$R(z) = \bar\partial\varphi\;\partial\, h_0 + \partial\;\varphi\;\bar\partial\, h_0\,.$$

Nous devons majorer la norme L^2 de $\bar\partial h_0$ ($|\partial\varphi|$ étant borné), soit

$$\int_B |\bar\partial\; h_0|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Soit $G^+ = \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) : \det g > 0\}$, de sorte que l'on a la décomposition

$$G^+ = \left\{\begin{pmatrix} t & \\ & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x\\ & 1\end{pmatrix} K_\infty\right\}$$

où t, $y \in \mathbb{R}_+^\times$, $x \in \mathbb{R}$, $K_\infty = \mathrm{SO}(2)$.

Soit $Z^+ = \left\{\left(\begin{smallmatrix} t & \\ & t\end{smallmatrix}\right)\right\}$, $K^+ = Z^+K_\infty$. Le demi-plan $\mathcal{H}$ s'identifie à G^+/K^+, via $g \mapsto g\cdot i$. En particulier $x+iy = \left(\begin{smallmatrix} y & x\\ & 1\end{smallmatrix}\right) i$. Soit $\widetilde{B} \subset G^+$ le relèvement de B :

$$\widetilde{B} = \left\{t\begin{pmatrix} y & x\\ & 1\end{pmatrix} k\,, \quad x+i\,y \in B\right\}.$$

Soit $(\bar\partial h_0)^\sim$ l'image inverse de $\overline{\partial h_0}$: elle est invariante par Z^+ et par K_∞.

Notons par ailleurs $E^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i\\ -i & -1\end{smallmatrix}\right)$, $E^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ i & -1\end{smallmatrix}\right)$ les éléments nilpotents de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ associés à l'élément semi-simple « compact » $H = \left(\begin{smallmatrix} & -1\\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$. (Lang [9, p. 102]). Pour une fonction $\widetilde{f}$ sur G^+, invariante à droite par K^+, notons $R_{E^-}(\widetilde{f})$ la dérivée à droite de $\widetilde{f}$ par l'élément E^-. On a alors, $\widetilde{f}$ étant identifiée à une fonction de (x, y) :

$$R_{E^-}(\widetilde{f})(g) = -2iye^{-2i\theta}\bar{\partial}f\,,$$

cf. Lang [9, p. 116]. Si dz est la mesure *hyperbolique* sur $\mathfrak{H}$, on voit que

$$\int_B |\bar{\partial}h_0|^2 \mathrm{d}z = \int_{\tilde{B}} |(\bar{\partial}h_0)^{\sim}|^2 \mathrm{d}g/\mathrm{d}z^+ = \int_{\tilde{B}} \frac{1}{4y^2}|R_{E^-}(\widetilde{h}_0)|^2 \mathrm{d}g/\mathrm{d}z^+\,. \quad (2.15)$$

Les mesures hyperboliques et euclidiennes étant, comme toujours, comparables, et y étant borné, on en déduit enfin le résultat suivant. Si f est une fonction sur $\Gamma Z^+\backslash G^+ = \Gamma\backslash\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, notons $f * X$ la dérivée de Lie par un élément $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

Lemme 2.4. — $\|R\|_2$ *est dominé par la somme de* $\left(\int_{\Gamma\backslash G} |\widetilde{h}_0 * E^-|^2 \mathrm{d}g\right)^{1/2}$ *et de* $\left(\int_{\Gamma\backslash G} |\widetilde{h}_0 * E^+|^2 \mathrm{d}g\right)^{1/2}$.

Corollaire 2.5. — *On suppose* $z_1 \in B(z_0, r_0)$. *Alors*

$$\begin{aligned}|\overline{T}f_n(z_0) - f_n^0| \ll \|\overline{T}_n f_n - f_n^0\|_2 + \|\Delta(\overline{T}_n f_n - f_n^0)\|_2 \\ + \|(\overline{T}_n \widetilde{f}_n - \widetilde{f}_n^0) * E^+\|_2 + \|(\overline{T}_n \widetilde{f}_n - \widetilde{f}_n^0) * E^-\|_2\,.\end{aligned}$$

Les deux premières normes L^2 sont calculées dans $Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$, les deux secondes dans $\Gamma\backslash\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \widetilde{Y}$. Noter par ailleurs que $\Delta\, f_n^0$, ainsi que $\widetilde{f}_n^0 * E^+$, $\widetilde{f}_n^0 * E^-$, sont nuls.

2.4.

Nous utilisons maintenant l'argument de [5, §2], voir aussi [5, (14)]. Rappelons que $\overline{T}_n$ opère naturellement dans $L^2(Y)$ et $L^2(\widetilde{Y})$. D'après Kim et Sarnak [8], $\overline{T}_n$ opère sur les formes paraboliques (sphériques ou non) avec des valeurs propres $\leqslant n^{-1/2+\rho}$, où $\rho \leqslant \frac{7}{64} + \varepsilon'$ pour tout $\varepsilon' > 0$ (conjecturalement, $\rho \leqslant \varepsilon'$). Dans le sous-espace de $L^2(Y)$, $L^2(\widetilde{Y})$ donné par les séries d'Eisenstein, les valeurs propres (continues) sont majorées par $n^{-1/2+\varepsilon'}$ (cf. [5, (17)]). On a donc (sur Y ou $\widetilde{Y}$) une telle majoration dans tout l'orthogonal des fonctions constantes, L_0^2. L'opérateur Δ (hyperbolique) commute à T_n, de sorte que $\Delta(\overline{T}_n f_n) = \overline{T}_n\,\Delta f_n$; de même T_n commute aux dérivées à droite par E^+, E^-. Le corollaire 2.5 implique alors :

Proposition 2.6. — *Pour* $z_1 \in B(z_0, r_0)$, $|\overline{T}_n f_n(z_1) - f_n^0|$ *est dominé par la somme des termes*

(i) $n^{-1/2+\rho}\|f_n\|_2$

(ii) $n^{-1/2+\rho}\{\|\Delta f_n\|_2 + \|\widetilde{f}_n * E^+\|_2 + \|\widetilde{f}_n * E^-\|_2\}$.

(Les normes L^2 sont calculées pour les mesures invariantes). Rappelons que le second terme majore (à une constante près) $\|\Delta_e h\|_2$, où $h(z) = \varphi(z)(\overline{T}_n f(z) - f_n^0)$.

On verra dans la section 4 que la majoration (ii) n'est pas suffisante pour conclure. Revenant à la section 1, nous voyons qu'il suffirait de majorer $\|\boldsymbol{\Delta}_e^a\, h\|_2$ pour $a > \frac{1}{2}$. Après avoir estimé le terme (ii), nous en déduirons tout d'abord une majoration de $\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2}\, h\|$ d'après l'inégalité évidente

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2}\, h\|^2 &= \langle \boldsymbol{\Delta}_e^{1/2}\, h, \boldsymbol{\Delta}_e^{1/2}\, h\rangle = \langle \boldsymbol{\Delta}_e\, h, h\rangle \\ &\leqslant n^{-1+2\rho}\|f_n\|_2\{\|\Delta f_n\|_2 + \|\widetilde{f}_n * E^+\|_2 + \|\widetilde{f}_n * E^-\|_2\}\,. \quad (2.16)\end{aligned}$$

On utilise alors une inégalité de convexité, cf. section 3.3.

2.5.

Nous voulons maintenant lever l'hypothèse 2.3. L'argument est simple. Supposons maintenant $z_1 \in Y$ arbitraire. Soit $\widetilde{z}_1$, $\widetilde{z}_0$ des relèvements dans $\mathcal{H}$ de z_1, z_0 tels que $d_{\mathcal{H}}(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_0) = d_Y(z_1, z_0)$ (cf. section 4 pour des rappels sur les distances géodésiques). Une géodésique γ de z_0 à z_1 dans Y se relève alors en une géodésique $\widetilde{\gamma}$ de $\widetilde{z}_0$ à $\widetilde{z}_1$ dans $\mathcal{H}$.

Soit V un voisinage ouvert assez petit de $\gamma([0,1])$ dans Y, et $W = V \cup B(z_0, r_0)$. On suppose W connexe et simplement connexe, de sorte que W se relève uniquement en un ouvert $\widetilde{W}$ de $\mathcal{H}$ contenant l'image de $\widetilde{\gamma}$. Avec la même définition de h (section 2.3), l'inégalité (2.9) reste vraie pour $z \in W$ (plonger $\widetilde{W}$, avec sa métrique euclidienne, dans un tore). Noter que $y^{\pm 1}$ reste borné sur $\widetilde{W}$. L'inégalité (2.12) reste valide, en remplaçant B par W. De même pour (2.13), (2.14) et (2.15). On voit enfin que la proposition 2.6 reste vraie (les constantes implicites dépendant évidemment de W, et z_1).

3. Majoration des normes L^2 relatives à f_n

3.1.

Nous revenons à l'approximation f_n de f introduite dans la section 2.2. Nous pouvons supposer que $f(z) = -\log r$ au voisinage de z_0, où $r = |z - z_0|$ (distance euclidienne), soit $f(z) = -\log r$, $(r \leqslant r_1 < r_0)$.

Considérons le terme (i) dans la proposition 2.6. On peut calculer à l'aide de la métrique euclidienne. Soit $\varepsilon = \varepsilon(n)$. On a (si $\varepsilon < r_1$)

$$\|f_n\|_2^2 \leqslant 2\pi \int_{r_1}^{r_0} |f^{\#}(z)|^2 \ r\,\mathrm{d}r + 2\pi \int_{\varepsilon/2}^{r_1} |\log r|^2 \ r\,\mathrm{d}r$$

où $f^{\#}(z)$ est la fonction f rendue invariante par rotation, soit

$$\|f_n\|_2 \ll 1 \qquad (\varepsilon \to 0)\,, \tag{3.1}$$

Considérons le terme (ii). En coordonnées polaires, $\Delta_e = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}$, donc sur $[\varepsilon/2,\ \varepsilon]$:

$$\begin{aligned}\Delta_e f_n &= \Delta_e(\chi_n f)\\ &= \frac{1}{r}\chi_n' f + \chi_n'' f + 2\chi_n' f'\end{aligned}$$

puisque $\Delta_e f = \Delta_e(-\log r) = 0$. Ainsi

$$\|\Delta_e f_n\|_2^2 \ll \int_{r_1}^{r_0} |\Delta_e f^{\#}(z)|^2 r\,\mathrm{d}r + \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\chi_n' f + \chi_n'' f + 2\,\chi_n' f'\right)^2 r\,\mathrm{d}r\,.$$

On a $f' = -\frac{1}{r}$, $\chi_n' \ll \varepsilon^{-1}$, $\chi_n'' \ll \varepsilon^{-2}$, donc dans le second intervalle (où $r \asymp \varepsilon$) :

$$\frac{1}{r}\chi_n' f \ll \varepsilon^{-2} f\,,\ \chi_n'' f \ll \varepsilon^{-2} f\,,\ \chi_n' f' \ll \varepsilon^{-2}$$

et la seconde intégrale est donc dominée par

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \varepsilon^{-4} |\log r|^2\, r\,\mathrm{d}r \ll \varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2\,.$$

Ainsi

$$\|\Delta_e f_n\| \ll \varepsilon^{-1}|\log\varepsilon|\,.$$

Considérons le terme $\|\widetilde{f}_n * E^-\|_2^2$. Nous revenons au calcul de la section 2.3. D'après (2.15), ceci est dominé par $\int_B |\bar\partial f_n|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \|\bar\partial f_n\|^2$. Ainsi

$$\|\widetilde{f}_n * E^+\|_2 + \|\widetilde{f}_n * E^-\|_2 \ll \|\bar\partial f_n\| + \|\partial f_n\| \ll \left\|\frac{\partial f_n}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial f_n}{\partial y}\right\|.$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$,

$$\begin{aligned}\int_B \left|\frac{\partial f_n}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\ll \int_B \left|\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}r}\right|^2 r\,\mathrm{d}r\\ &\ll \int_{\varepsilon}^{r_0} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|^2 r\,\mathrm{d}r + \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \left|\chi_n' \log r + \chi_n \cdot \frac{1}{r}\right|^2 \ r\,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

La première intégrale est dominée par la somme d'une constante et de

$$\int_{\varepsilon}^{r_1} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r \asymp |\log\varepsilon|\,;$$

on a $|\chi'_n| \ll \varepsilon^{-1}$, donc la seconde est dominée par $\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \varepsilon^{-2} \log^2 r \, dr \ll \log^2 \varepsilon$. D'après la proposition 2.6, on voit enfin que

Lemme 3.1. — *Pour $n \to \infty$, $\varepsilon(n) \to 0$,*

$$|\overline{T}_n f_n(z_1) - f^0| \ll n^{-1/2+\rho}(\varepsilon(n)^{-1}|\log \varepsilon(n)|)\,.$$

En particulier, ce terme majore aussi $\|\Delta_e h\|$ (cf. la remarque après la proposition 2.6).

3.2.

Revenant à l'inégalité (2.9), avec $h = \varphi h_0$, nous pourrions à l'aide des calculs précédents majorer $\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2} h\|_2^2 = \langle \boldsymbol{\Delta}_e h, h\rangle$. Ceci amène à contrôler tous les produits scalaires avec h dans l'expression

$$\Delta_e h = (\Delta_e \varphi) h_0 + \varphi\, \Delta_e h_0 + R\,.$$

Nous ne l'avons pas fait, bien que ceci amène peut-être à une majoration plus fine. Utilisons plutôt (2.16). On a pour $\varepsilon \to 0$

$$\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2} h\|_2^2 \ll n^{-1+2\rho}\, \varepsilon^{-1} |\log \varepsilon|$$

puisque $\|f_n\|_2$ est borné et $\|\widetilde{f}_n * E^{\pm}\|_2$ est négligeable par rapport à $\|\Delta f_n\|_2$. Ainsi

Lemme 3.2. — $\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2} h\|_2 \ll n^{-1/2+\rho} \varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{1/2}$.

3.3.

D'après les rappels de la section 1, l'estimée de $\|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2} h\|_2$ ne suffit pas à contrôler $h(z_1)$. Nous avons en revanche, pour tout $a > \frac{1}{2}$, une inégalité

$$|h(z_1)| \leqslant C'_1 \|h\|_2 + C'_2 \|\boldsymbol{\Delta}_e^a h\|_2\,,$$

les constantes dépendant de a. Nous devons recourir à une inégalité de convexité. Rappelons que $-\Delta_e$ est un opérateur auto adjoint positif sur $L^2(\mathbb{T}^2)$ où $\mathbb{T}^2$ est le tore contenant $B(z_0, r_0)$ (ou $\widetilde{W}$ dans le cas général.) Nous n'avons pas trouvé de référence explicite pour le résultat suivant :

Proposition 3.3. — *Soit T un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert $\mathcal{K}$. Soit $p, q > 1$ des exposants conjugués, $\alpha, \beta > 0$ et soit $v \in \mathcal{K}$ un vecteur dans le domaine de $T^{\alpha p}$ et de $T^{\beta q}$. Alors v est dans le domaine de $T^{\alpha+\beta}$ et*

$$\langle T^{\alpha+\beta} v, v\rangle \leqslant \langle T^{\alpha p} v, v\rangle^{1/p} \langle T^{\beta q} v, v\rangle^{1/q}\,.$$

En effet, pour tout $\gamma > 0$,

$$\langle T^\gamma v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} t^\gamma \,\mathrm{d}\mu_v(t)$$

où $\mathrm{d}\mu_v(t) = d(\langle p_t(v), v\rangle)$, p_t étant la mesure à valeurs projecteurs déduite de T. Le résultat se déduit du théorème spectral et de l'inégalité de Hölder.

Posons $a = \frac{1+c}{2}$. En appliquant la proposition à $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{2}{q}$, $\alpha + \beta = 1 + c$, on voit que pour $T = -\Delta_e$:

$$\langle T^{1+c}h, h\rangle \leqslant \langle Th, h\rangle^{1-c}\langle T^2h, h\rangle^c$$

soit

$$\|\boldsymbol{\Delta}_e^a h\| \leqslant \|\boldsymbol{\Delta}_e^{1/2} h\|^{1-c}\|\boldsymbol{\Delta}_e h\|^c\,;$$

d'après les lemmes 3.1 et 3.2, et en négligeant le terme (borné) $\|f_n\|$:

Proposition 3.4. — *Pour $1/2 < a < 1$, et $n \to \infty$,*

$$|\overline{T}_n f_n(z_1) - f_n^0| \ll \varepsilon(n)^{-a}|\log \varepsilon(n)|^a n^{-1/2+\rho}.$$

La constante implicite ne dépend que de a (section 1), de celle figurant dans la majoration de $\|\Delta_e h\|$, qui a son tour dépend de z_1 et des choix de l'identification de W à un ouvert d'un tore, ainsi que de la fonction φ.

Proposition 3.5. — *Fixons $a > \frac{1}{2}$, et soit (n) une suite tendant vers l'infini telle que*

$$\varepsilon(n) \gg n^{\frac{1}{a}(\rho-1/2)}\,.$$

Alors $|\overline{T}_n f_n(z_1) - f_n^0| \to 0$ pour cette suite

En effet l'hypothèse implique que $\varepsilon(n)^{-a} \ll n^{1/2-\rho}$, donc, pour tout a' tel que $\frac{1}{2} < a' < a$, $\varepsilon(n)^{-a'}|\log \varepsilon(n)|^{a'} n^{-1/2+\rho} \to 0$. D'où le résultat.

4. Existence de z_1

4.1.

Dans ce paragraphe on va montrer que presque tous les éléments de Y réalisent l'intégration de Hecke pour f, i.e., vérifient les hypothèses de la proposition 3.5. Pour simplifier, on ne considère que les opérateurs T_p pour p premier. La norme de T_p dans L_0^2 (sur Y ou $\widetilde{Y}$) est alors majorée par $2p^{1/2+\rho}$, $\rho = \frac{7}{64}$, celle de $\overline{T}_p$ par $(p+1)^{-1} \cdot 2\,p^{1/2+\rho} \asymp p^{\rho-1/2}$.

Soit $\varepsilon_h(p) = d(T_p z_1, z_0)$ où d est la distance hyperbolique. On a tout d'abord le lemme bien connu suivant. On écrit $d_{\mathcal{H}}$, d_Y pour les distances hyperboliques sur $\mathcal{H}$ et Y.

Lemme 4.1. — *Soit z, $w \in Y$, de relèvements $\widetilde{z}$, $\widetilde{w}$. Alors*

$$d_Y(z,w) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d_{\mathcal{H}}(\gamma\widetilde{z},\widetilde{w}) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d_{\mathcal{H}}(\widetilde{z},\gamma\widetilde{w})\,.$$

Lemme 4.2. — *On a $\varepsilon_h(p) = d_Y(z_1, T'_p z_0)$*

(T'_p est défini ci-dessous.)

Soit $\delta_p = \begin{pmatrix} p & \\ & 1\end{pmatrix}$, $\eta_p = \begin{pmatrix} 1 & \\ & p\end{pmatrix}$: l'opérateur T_p est donné par la double classe $\mathcal{T}_p = \Gamma\delta_p\Gamma$; soit T'_p donné par $\Gamma\eta_p\Gamma$, et $\Gamma\delta_p\Gamma = \mathcal{T}_p = \coprod \Gamma\delta_k$. Soit $\widetilde{z}_0$, $\widetilde{z}_1$ des relèvements de z_0 z_1. Alors

$$d_Y(T_p z_1, z_0) = \inf_{\gamma,k} d_{\mathcal{H}}(\gamma\delta_k\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_0) = \inf_{\delta\in\mathcal{T}_p} d_{\mathcal{H}}(\delta\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_0) = \inf_{\delta\in\mathcal{T}_p} d_{\mathcal{H}}(\widetilde{z}_1,\delta^{-1}\widetilde{z}_0).$$

Or $\delta_p^{-1} = p^{-1}\,\eta_p$; une matrice scalaire opérant trivialement sur $\mathcal{H}$, on en déduit que la dernière expression est $d(z_1, T'_p z_0)$. Noter que le degré de T'_p est égal à celui de T_p.

Pour $a > \frac{1}{2}$ fixé (que l'on spécifiera plus tard), on cherche z_1 vérifiant l'hypothèse de la proposition 3.5. Nous devons spécifier où est situé z_1, car les constantes implicites de la proposition 3.5 dépendent de la construction d'un ouvert W contenant z_1 et z_0.

Revenons à la section 2.3, et supposons tout d'abord $z_1 \in B(z_0, r_0)$ (hypothèse 2.3). La construction dépend d'une fonction φ, à support compact dans $B(z_0,r_0)$, et telle que $\varphi(z_1) = 1$. Fixons $r > 0$, soit $z_2 \in B(z_0,r_0)$, et supposons que $B(z_2,r) \subset B(z_0,r_0)$. On peut supposer que $\varphi \equiv 1$ sur $B(z_2, r/2)$. Alors le corollaire 2.5, et par conséquent aussi la proposition 3.5, sont vrais pour tout $z_1 \in B(z_2,r/2)$, la constante implicite dans ce dernier Corollaire étant uniforme.

Considérons le cas général (section 2.5). On a maintenant $z_2 \in W = V \cup B(z_0,r_0)$. Si $B(z_2,r) \subset W$, on aura de même des estimées uniformes si $z_1 \in B(z_2,r/2)$.

Considérons pour l'instant une telle boule $B(z_2,r/2) \subset W$, où W est construit comme dans la section 2.5.

Lemme 4.3. — *Pour presque tout $z_1 \in B(z_2,r/2)$,*

$$\overline{T}_p f(z_1) \longrightarrow \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (p\to\infty)\,.$$

Fixons $a > \frac{1}{2}$. On cherche à assurer, pour quelque constante positive C, l'estimée

$$\varepsilon(p) \geqslant C\; p^{\frac{-1}{a}\cdot\frac{25}{64}} \tag{4.1}$$

pour $p \to \infty$. Supposons l'inverse. Alors il existe une suite (p_n) tendant vers l'infini telle que

$$\varepsilon(p) < C\ p^{-1/a \cdot \frac{25}{64}}$$

si $p = p_n$. Pour tout tel p, z_1 appartient d'après le Lemme 4.2 à une réunion de $(p+1)$ disques de rayon $\varepsilon(p)$, donc à un ensemble Y_p d'aire $\ll p\varepsilon(p)^2 \ll p^{1-\frac{25}{32a}}$. Pour $a = 1/2$, la mesure de Y_p serait $\ll p^{-9/16}$; si $a > \frac{1}{2}$ est proche de $1/2$, elle est dominée par $p^{-9/16+\varepsilon'}$. La mesure de l'intersection des Y_{p_i} (la suite étant indépendante de z_1) est nulle, d'où le lemme.

Nous avons déjà démontré que le Théorème principal était vrai pour un ensemble de z_1 de mesure non nulle. Le cas général se déduit du Lemme par un argument simple de recouvrement.

La courbe modulaire $Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ a un nombre fini de pointes s ; pour A assez grand, Y s'écrit $Y = Y_A \cup \coprod_{s\in S} Y_s$, où Y_s est métriquement le quotient de $\mathcal{H}_A = \{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Im} z \geqslant A\}$ par un groupe $N_s = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n\xi \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, ξ étant un rationnel positif. La métrique sur $\mathcal{H}_A$ étant $\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}s}{y}$, le rayon d'injectivité de Y en un point image de $z \in \mathcal{H}_A$ tend vers 0 si $y \to \infty$. Il est borné inférieurement sur le compact Y_A.

Soit $\iota = \iota(A)$ ce rayon. On peut recouvrir Y_A par un nombre fini de boules $B(z_i, \frac{\iota}{2})$.

Chaque boule $B(z_i, \iota)$ est isomorphe à chacun de ses relèvements à $\mathcal{H}$. On construit comme dans la section 2.5 un ouvert W_i, contenant $B(z_i, \iota)$ et $B(z_0, r_0)$ et simplement connexe[(3)] . Alors l'argument précédent montre que le lemme 4.2 s'applique à $z_1 \in B(z_i, \iota/2)$. Par conséquent, l'ensemble des $z_1 \in Y_A$ qui ne vérifient pas la conclusion du lemme 4.2 est de mesure nulle. En considérant une *suite* $A \to \infty$, on en déduit enfin :

Théorème 4.4. — *Pour presque tout $z_1 \in Y$,*

$$\overline{T}_p f(z_1) \longrightarrow \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (p \to \infty)\,.$$

Remarque 4.5. — Le lemme 3.1, qui ne repose que sur l'estimée de Sobolev dans H^2, ne suffit pas à conclure : la proposition 3.4 donne alors une majoration, pour p premier, en $\varepsilon(p)^{-1}|\log \varepsilon(p)|\, p^{-1/2+\rho}$, $\rho = \frac{7}{64}$. Le volume des voisinages de rayon ε de $T_p z_0$ (en négligeant le terme logarithmique) est alors d'ordre $p\varepsilon(p)^2 \leqslant p \cdot p^{-1+2\rho}$, qui tend vers l'infini.

(3) Noter que y et y^{-1} sont bornés sur Y_A

4.2.

En fait ce résultat est vrai pour des fonctions plus singulières. Supposons qu'au voisinage de z_0, $f(z) \asymp r^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ où $r = |z - z_0|$; soit $f^{\#}$ la fonction f rendue invariante par rotation au voisinage de z_0 et supposons aussi que $(f^{\#})'(r)$, $(f^{\#})''(r)$ sont comparables aux dérivées de $r^{-\alpha}$.

On peut alors reprendre les calculs de la section 3.1. Nous ne donnons que les résultats. On vérifie que $\|\Delta f_n\| \ll \varepsilon^{-1-\alpha}$; les termes en $\|\widetilde{f}_n * E^{\pm}\|$ sont d'ordre $\varepsilon^{-\alpha}$, donc négligeables. On a ainsi pour p premier

$$\|\Delta_e h\| \ll p^{\frac{-1+\rho}{2}} \varepsilon^{-1-\alpha} \qquad (\varepsilon = \varepsilon(p))$$

et on déduit de (2.13) que

$$\|\Delta_e^{1/2} h\| \ll p^{-1/2+\rho} \varepsilon^{-1/2-\alpha/2}\,.$$

Par convexité, et pour $a > 1/2$, on voit que l'analogue de la proposition 3.4 est

$$|\overline{T}_p f_p(z_1) - f_p^0| \ll \varepsilon^{(-1-\alpha)a} p^{-1/2+\rho}$$

où $\rho = \frac{7}{64}$; la proposition 3.5 implique que l'on a convergence si

$$\varepsilon(p) \gg p^{\frac{1}{a(1+\alpha)}(\rho-1/2)}\,.$$

Dans le cas contraire, $p\,\varepsilon(p)^2 \ll p^{1-\frac{1}{a(1+\alpha)}\cdot\frac{25}{32}}$. En prenant $a = 1/2$, on voit que la démonstration du théorème 4.4 s'applique si

$$\frac{25}{16}\,\frac{1}{1+\alpha} > 1\,,$$

i.e., si $\alpha < \frac{9}{16}$. Ainsi :

Théorème 4.6. — *Supposons que f vérifie la variante suivante de l'hypothèse 2.1 : au voisinage de z_0, $|f(z)| \asymp r^{-\alpha}$ (et les dérivées première et seconde de $f^{\#}$ sont comparables à celles de $r^{-\alpha}$).*

Alors, si $\alpha < \frac{9}{16}$,

$$\overline{T}_p f(z_1) \longrightarrow \int_Y f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (p \to \infty)$$

pour presque tout $z_1 \in Y$.

Ce résultat est loin d'être optimal : en remplaçant l'estimée grossière (2.16) par un calcul direct de $\|\Delta_e^{1/2} h\|^2 = \langle \Delta_e h, h\rangle$, on obtient très certainement le résultat pour tout $\alpha < 1$.

Bibliographie

[1] M. Burger & P. Sarnak, « Ramanujan duals. II », *Invent. Math.* **106** (1991), n° 1, p. 1-11.

[2] J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Hafner Publishing Co., 1972, facsimile reprint of the 1957 edition.

[3] F. Charles, « Exceptional isogenies between reductions of pairs of elliptic curves », *Duke Math. J.* **167** (2018), n° 11, p. 2039-2072.

[4] L. Clozel & J.-P. Otal, « Unique ergodicité des correspondances modulaires », in *Essays on geometry and related topics.*, Monographies de l'Enseignement Mathématique, vol. 38, L'Enseignement Mathématique, 2001, p. 205-216.

[5] L. Clozel & E. Ullmo, « Equidistribution des points de Hecke », in *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins University Press, 2004, p. 193-254.

[6] P. Griffiths & J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1978.

[7] A. Y. Khinchin, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd., 1963.

[8] H. H. Kim, « Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 », *J. Am. Math. Soc.* **16** (2003), n° 1, p. 139-183.

[9] S. Lang, $SL_2(R)$, Addison-Wesley Publishing Group, 1975.

[10] A. N. Shankar, A. Shankar, Y. Tang & S. Tayou, « Exceptional jumps of Picard ranks of reductions of K3 surfaces over number fields », *Forum Math. Pi* **10** (2022), article no. e21 (49 pages).

[11] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 11, Princeton University Press, 1971.