ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Guy Henniart

# *Correspondance de Langlands et facteurs $\varepsilon$ des carrés extérieur et symétrique*

Tome XXXII, nº 4 (2023), p. 639–653.

https://doi.org/10.5802/afst.1748



*Publication membre du centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2258-7519

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXXII, n° 4, 2023
pp. 639-653

# Correspondance de Langlands et facteurs $\varepsilon$ des carrés extérieur et symétrique (*)

Guy Henniart (1)

**Résumé.** — Soit $p$ un nombre premier et $F$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, $\pi$ une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, et $\sigma$ la représentation de groupe de Weil–Deligne de $F$ associée à $\pi$ par la correspondance de Langlands. Cogdell, Shahidi et Tsai ont prouvé les égalités

$$\varepsilon(\pi, \Lambda^2, s, \psi = (\Lambda^2\sigma, s, \psi)$$
$$\text{et } \varepsilon(\pi, \mathrm{Sym}^2, s, \psi) = \varepsilon(\mathrm{Sym}^2\sigma, s, \psi).$$

pour tout caractère non trivial $\psi$ de $F$.

Nous donnons ici une preuve très différente de ces égalités, en reprenant les techniques d'un article précédent, qui les obtenait à une racine de l'unité près. Ce raffinement est permis par des résultats de Harris, Lan, Taylor, Thorne, et aussi Scholze, qui améliorent notre connaissance de la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_n$ sur un corps de nombres. Nous traitons aussi le cas des facteurs $\varepsilon$ d'Asai, où nous prouvons par notre méthode l'égalité due à Shankman.

**Abstract.** — Let $p$ be a prime number and $F$ a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. Let $n$ be a positive integer, $\pi$ smooth irreducible representation of $\mathrm{GL}_n(F)$, and $\sigma$ the Weil–Deligne representation associated to $\pi$ by the Langlands correspondence. Cogdell, Shahidi and Tsai have proved, for any non-trivial character $\psi$ of $F$, the equalities

$$\varepsilon(\pi, \Lambda^2, s, \psi = (\Lambda^2\sigma, s, \psi)$$
$$\text{and } \varepsilon(\pi, \mathrm{Sym}^2, s, \psi) = \varepsilon(\mathrm{Sym}^2\sigma, s, \psi).$$

Here we give a very different proof of those equalities, using the techniques of a previous paper where we proved them up to a root of unity. The refinement is now possible due to the results of Harris, Lan, Taylor, Thorne, and also Scholze, on the Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_n$ over number fields. We also treat Asai $\varepsilon$-factors, reproving an equality due to Shankman.

(*) Reçu le 27 mai 2021, accepté le 28 juin 2021.

*Mots-clés :* Corps $p$-adique, représentation lisse, correspondance de Langlands, facteurs $\varepsilon$.

(1) Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France — guy.henniart@math.u-psud.fr

Article proposé par Damian Rössler.

# 1. Introduction

## 1.1.

Soit $p$ un nombre premier, $F$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. Soit $n$ un entier strictement positif.

Pour certaines représentations $r$ du groupe dual $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_n/F$, on sait associer, par exemple par la méthode de Langlands–Shahidi [18] des facteurs $L(\pi, r, s)$ et $\varepsilon(\pi, r, s, \psi)$ à toute représentation lisse irréductible $\pi$ de $\mathrm{GL}_n(F)$. Si $\sigma$ est la représentation de Weil–Deligne associée à $\pi$ par la correspondance de Langlands, on conjecture les égalités

$$L(\pi, r, s) = L(r\ o\ \sigma, s) \tag*{$(*)_L$}$$

$$\text{et}\quad \varepsilon(\pi, r, s, \psi) = \varepsilon(r\ o\ \sigma, s, \psi) \tag*{$(*)_\varepsilon$}$$

où les facteurs de droite sont ceux d'Artin, Langlands et Deligne, cf. [20].

Dans un article précédent [10] nous avons, pour les représentations carré extérieur $r = \Lambda^2$ et carré symétrique $r = \mathrm{Sym}^2$, prouvé ces égalités, mais seulement à une racine de l'unité près pour la seconde $(*)_\varepsilon$. Dans [1] Cogdell, Shahidi et Tsai ont obtenu les égalités exactes par une méthode en bonne partie locale. Ils effectuent une analyse asymptotique de certaines intégrales locales, dites de Bessel, donnant les facteurs de gauche. De cette analyse ils déduisent la propriété de stabilité de ces facteurs, à savoir que si l'on tord $\pi$ par un caractère suffisamment ramifié $\chi$ de $F^*$, le facteur $L$ vaut 1 et le facteur $\varepsilon$ ne dépend plus que du caractère central $\omega_\pi$ de $\pi$ et de $\psi$. Un argument classique entraîne alors les égalités voulues.

Nous reprenons ici les méthodes de [10] pour donner une preuve très différente de celle de [1].

Théorème 1.1. — *Pour $\psi$, $\pi$ et $\sigma$ comme plus haut, on a*

$$\varepsilon(\pi, \Lambda^2, s, \psi) = \varepsilon(\Lambda^2\sigma, s, \psi)$$
$$\textit{et}\quad \varepsilon(\pi, \mathrm{Sym}^2, s, \psi) = \varepsilon(\mathrm{Sym}^2\sigma, s, \psi).$$

*Remarque.* —

(1) Dans notre approche, nous obtenons ces identités directement, la propriété de stabilité de [1] est alors conséquence de la propriété de stabilité de [2] pour les facteurs de droite.
(2) Voir section 2.2 pour des résultats plus fins et section 4 pour le cas des facteurs d'Asai.

## 1.2.

Notre méthode n'utilise aucune analyse asymptotique, mais plutôt un raffinement des arguments de nature locale-globale de [10]. Certes une approche purement locale du théorème, d'énoncé local, serait préférable, mais d'une part la définition même des facteurs locaux par la méthode de Langlands–Shahidi est de nature locale-globale, et d'autre part de tels raisonnements apparaissent aussi dans [1]. Nous espérons donc que notre approche n'est pas sans intérêt.

Ce qui nous permet cette fois d'obtenir l'égalité dans le théorème, et non l'égalité à une racine de l'unité près, est le progrès substantiel suivant, dû à Harris, Lan, Taylor et Thorne, vers la conjecture de Langlands pour $\mathrm{GL}_n$ sur un corps de nombres.

Theorem A ([4, Thm. A]). — *Soit $l$ un nombre premier et $\iota$ un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$.*

*Soit $L$ un corps de nombres CM ou totalement réel. Soit $\Pi$ une représentation cuspidale automorphe de $\mathrm{GL}_n(A_L)$ dont le composant à l'infini a le même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique de $\mathrm{Res}_{L/Q}(\mathrm{GL}_n)$. Alors il existe une représentation semi-simple continue $r_{l,\iota}(\Pi)$, de dimension $n$, du groupe de Galois absolu de $L$, déterminée à isomorphisme près par la condition suivante : si $q$ est un nombre premier distinct de $l$, tel que $\Pi_v$ soit non ramifiée en les places $v$ de $L$ au-dessus de $q$, alors, pour une telle place $v$, $r_{l,\iota}(\Pi)$ est non ramifiée en $v$, et la semi-simplifiée de sa restriction au groupe de Weil de $L_v$ correspond via $\iota$ à la représentation complexe de ce groupe de Weil associée à $\Pi_v|\det|_v^{(1-n)/2}$ par la correspondance de Langlands locale.*

Un énoncé équivalent est obtenu par Scholze [15, Thm. 1.4, Cor. V.4.2]. Le point est qu'il n'y a pas d'hypothèse d'auto-dualité imposée à $\Pi$, alors que c'était le cas dans [5, Thm. VII.1.9], que nous utilisions dans [10]).

## 1.3.

Notre méthode dans [10] était basée sur l'approche due à M. Harris [3], reprise dans [5, Ch. VII], pour établir la correspondance locale pour $\mathrm{GL}_n$. Esquissons-la.

Il suffit d'établir $\varepsilon(\pi, \Lambda^2, s, \psi) = \varepsilon(\Lambda^2\sigma, s, \psi)$, le cas de $\mathrm{Sym}^2$ provenant de la décomposition $\sigma \otimes \sigma = \Lambda^2\sigma \oplus \mathrm{Sym}^2\,\sigma$. On peut même supposer que $\sigma$ est une représentation monomiale du groupe de Weil $W_F$ de $F$, et l'idée est de globaliser $\sigma$. On trouve un corps de nombres $CM$ $L$, une place $v$ de $L$, un isomorphisme $\eta$ de $L_v$ sur $F$, et une représentation monomiale $\Sigma$ du groupe de Weil $W_L$ de $L$ dont la restriction à $W_{L_v}$ corresponde à $\sigma$ via $\eta$. On peut s'arranger pour que $\Sigma$ soit algébrique et régulière à l'infini, et irréductible à une place finie bien choisie, éventuellement la place $v$. Les arguments de loc. cit. donnent qu'il existe alors une représentation automorphe cuspidale $\Pi$, comme dans le théorème A plus haut, telle qu'en fait $\Pi$ et $\Sigma$ soient associées par la correspondance de Langlands globale, les $r_{l,\iota}(\Pi)$ constituant les avatars $l$-adiques de $\Sigma$.

On utilise alors les équations fonctionnelles globales des facteurs $L$ pour $\Lambda^2$ [18, Thm. 3.5], pour obtenir $\prod \varepsilon(\Pi_w, \Lambda^2, s, \Psi_w) = \prod \varepsilon(\Lambda^2\Sigma_w, s, \Psi_w)$, où $\Psi$ est un caractère non-trivial de $A_L/L$ (on peut supposer que $\Psi_w = \psi \circ \eta$) et le produit porte sur un ensemble fini $S$ de places finies de $L$, contenant $v$ et assez grand. L'ensemble $S$ ne contient pas les places infinies car à ces places les égalités $(*)_L$ et $(*)_\varepsilon$ sont connues [17].

Si l'on prouve les égalités $\varepsilon(\Pi_w, \Lambda^2, s, \Psi_w) = \varepsilon(\Lambda^2\Sigma_w, s, \Psi_w)$ pour $w$ dans $S$ distinct de $v$, l'égalité pour la place $v$ en découle, ce qui donne notre théorème.

L'argument pour obtenir l'égalité en une place $w$ distincte de $v$ est un peu délicat, mais sans mystère. Il consiste à contrôler le processus de globalisation (de $\sigma$ en $\Sigma$) de sorte que $\Sigma_w$ soit plus simple que $\sigma$, en fait somme de représentations monomiales de degré moindre que celui de $\sigma$. Cet argument est détaillé en section 3. Il ne pouvait être utilisé dans [10] car l'hypothèse d'auto-dualité imposée à $\Pi$ dans la version alors disponible du Théorème A [5, Thm. VII.1.9] entraînait l'existence dans $S$ d'une place distincte de $v$ où l'égalité n'était pas plus contrôlée qu'en $v$. Plus précisément, le composant de $\Pi$ en $v$ étant imposé, la condition que la duale de $\Pi$ soit essentiellement sa conjuguée par la conjugaison complexe de $L$ impose que cette conjugaison envoie $v$ sur une place différente $v'$, et l'on n'a pas plus de renseignement sur le composant en $v'$ de $\Pi$ que sur celui en $v$.

### 1.4.

L'organisation de l'article est la suivante. En section 2 nous donnons les notations et rappelons brièvement les étapes déjà établies dans [10]. En section 3 nous mettons en place l'argument pour l'égalité plus haut en $w$ distinct de $v$. On doit en fait raisonner en deux temps à cause de la condition que $\Sigma$ soit irréductible en une place au moins : on traite d'abord le cas où $\Sigma$ est induite d'une extension cyclique. En section 4 traite le cas des facteurs d'Asai.

**Remerciements**

C'est à la suite de conversations avec Luis Lomeli qu'il y a quelques années j'ai entrevu la possibilité d'appliquer les résultats de [4]. Mais l'approche plus locale de [1] était alors en cours, et la thèse de Shankman [19] a suivi. Je m'étais promis de revenir à ces réflexions pour la « 2017 Paul J. Sally Midwest Representation Theory Conference », à l'occasion du 70ème anniversaire de F. Shahidi, mais je n'ai pu m'y rendre, et ce n'est qu'en 2018 que j'ai repris l'idée. Je remercie F. Shahidi et J. Cogdell pour des échanges anciens sur la propriété de stabilité, et de m'avoir informé des progrès de [1]. Je remercie de même D. Shankman qui m'a tenu au courant de l'évolution de sa thèse et Luis Lomeli pour de nombreuses conversations sur la méthode de Langlands–Shahidi. Je remercie enfin J. Fintzen pour une invitation à présenter les résultats présents lors d'un séminaire à Cambridge U.K. début 2020. Enfin, un grand merci à Madame Le Bronnec qui assure la frappe du manuscrit.

## 2. Notations et rappels de résultats

### 2.1.

On fixe un nombre premier $p$ et une extension finie $F$ de $\mathbb{Q}_p$. On fixe également une clôture algébrique $\overline{F}$ de $F$ et on note $G_F$ le groupe de Galois de $\overline{F}/F$, $W_F$ le groupe de Weil. Pour chaque entier $n > 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{G}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations de Weil–Deligne de dimension $n$ pour $F$, et $\mathcal{A}_F(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$. On dispose de la correspondance de Langlands, une bijection naturelle $\sigma \to \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(n)$ sur $\mathcal{A}_f(n)$, par [5, VII.2], [7, 14]. Pour $n = 1$, c'est la bijection donnée par la théorie des corps de classes ; selon l'usage de [5, p. 19] nous normalisons l'application de réciprocité de cette théorie en envoyant les substitutions de Frobenius géométriques sur les uniformisantes. La correspondance de Langlands est compatible au passage à la contragrédiente : $\pi(\sigma^\wedge) = \pi(\sigma)^\wedge$ ; à la torsion par les caractères : $\pi(\chi\sigma) = (\pi(\chi) \circ \det) \cdot \pi(\sigma)$ pour tout caractère $\chi$ de $W_F$, identifié à un élément de $\mathcal{G}_F(1)$. Pour $n$, $n' > 0$ et $\sigma$ dans $\mathcal{G}_F(n)$, $\sigma'$ dans $\mathcal{G}_F(n')$, on a, pour tout caractère non trivial $\psi$ de $F$, les égalités

$$L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s)$$
$$\text{et} \quad \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \varepsilon(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s, \psi).$$

Les facteurs de gauche sont ceux définis par Artin, Langlands et Deligne (cf. [20]), ceux de droite sont obtenus par la méthode de Rankin–Selberg [13] ou celle de Langlands–Shahidi [18], l'équivalence entre les deux approches étant due à Shahidi [16]. Les propriétés précédentes caractérisent la famille de bijections de $\mathcal{G}_F(n)$ sur $\mathcal{A}_F(n)$, cf. [5, §1] et [11].

On pose $\gamma(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) L(\sigma^\wedge \otimes \sigma'^\wedge, 1-s)/L(\sigma \otimes \sigma', s)$ et on définit de façon analogue $\gamma(\pi \times \pi', s, \psi)$ pour $\pi$ dans $\mathcal{A}_F(n)$ et $\pi'$ dans $\mathcal{A}_F(n')$, de sorte que $\gamma(\sigma \otimes \sigma', s, \psi) = \gamma(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s, \psi)$.

### 2.2.

La méthode de Langlands–Shahidi [18] permet de définir d'autres facteurs. Le groupe dual de $\mathrm{GL}_n/F$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Notant $\rho_n$ la représentation naturelle, dans $\mathbb{C}^n$, de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, et $\Lambda^2$ l'opération carré extérieur, $\mathrm{Sym}^2$ l'opération carré symétrique, nous nous intéressons ici, comme dans [10], aux facteurs $\gamma(\pi, \chi, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \psi)$ et $\gamma(\pi, \chi, \mathrm{Sym}^2 \rho_n \otimes \rho_1, s, \psi)$, pour $\pi$ dans $\mathcal{A}_F(n)$ et $\chi$ dans $\mathcal{A}_F(1)$.

Notre résultat principal est :

Théorème 2.1. — *Soit $\sigma$ dans $\mathcal{G}_F(n)$, $\eta$ dans $\mathcal{G}_F(1)$, $\pi = \pi(\sigma)$, $\chi = \pi(\eta)$. Alors on a*

$$\gamma(\pi, \chi, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\eta \cdot \Lambda^2\sigma, s, \psi) \qquad (*)_\Lambda$$

$$\gamma(\pi, \chi, \mathrm{Sym}^2 \rho_n \otimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\eta \cdot \mathrm{Sym}^2 \sigma, s, \psi). \qquad (*)_S$$

*Remarques.* —

(1) Quand $\chi$ est le caractère trivial, on retrouve le résultat de [1]. Notre méthode est très différente.
(2) Le résultat principal de [10] donnait ces égalités à une racine de l'unité près, et établissait l'égalité analogue pour les facteurs $L$, de sorte que les égalités du théorème équivalent à celles pour les facteurs $\varepsilon$ ; pour $\chi$ trivial cela implique le Théorème 1.1.

### 2.3.

Bon nombre de réductions du problème sont établies dans loc. cit. Rappelons-les.

Tout d'abord, il suffit de prouver $(*)_\Lambda$, parce que $\rho_n \otimes \rho_n$ est somme directe de $\Lambda^2\rho_n$ et $\mathrm{Sym}^2 \rho_n$ (loc. cit. 2.16).

Ensuite il suffit d'établir cette égalité pour un choix de $\psi$, elle s'ensuit alors pour les autres choix (loc. cit. 2.6).

Comme les facteurs $\gamma$ de Langlands–Shahidi ne dépendent que du support supercuspidal de $\pi$, et les facteurs $\gamma$ galoisiens que de la restriction de $\sigma$ à $W_F$, on peut supposer que $\sigma$ est une représentation semi-simple de $W_F$. Tenant compte de l'isomorphisme $\Lambda^2(\sigma \oplus \sigma') = \Lambda^2(\sigma) \oplus \Lambda^2(\sigma') \oplus \sigma \otimes \sigma'$, on obtient (loc. cit. 3.1, 3.2) qu'il suffit de prouver $(*)_\Lambda$ quand $\sigma$ est une représentation monomiale de $W_F$.

La situation à traiter est donc la suivante : on a une extension finie $E$ de $F$ dans $\overline{F}$, un caractère $\theta$ de $E^*$, qu'on peut supposer d'ordre fini, et $\sigma$ est l'induite de $W_E$ à $W_F$ du caractère de $W_E$ correspondant à $\theta$ ; on écrira simplement $\sigma = \mathrm{Ind}_E^F \theta$.

Ce cas est traité dans la section 3 en deux étapes : tout d'abord le cas où $E/F$ est cyclique, puis le cas général. On utilisera également que tordre $\theta$ par un caractère non ramifié de $E^*$ ne change pas l'égalité à prouver.

## 3. Démonstration de $(*)_\Lambda$

On garde la situation qu'on vient de décrire, et on démontre $(*)_\Lambda$ dans cette situation.

### 3.1.

Traitons d'abord le cas où $E/F$ est cyclique, ce qui ne requiert pas le théorème A.

On procède par récurrence sur le degré $d$ de $E/F$. Si $d = 1$, $\Lambda^2\sigma$ est nulle et les facteurs $\gamma$ de $(*)_\Lambda$ valent 1 des deux côtés. On suppose donc $d > 1$.

Si le caractère $\theta$ de $E^*$ n'est pas régulier sous l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$, alors $\theta = \theta' \circ N_{E/E'}$, où $E'$ est une sous-extension de $E/F$ distincte de $E$, et $\theta'$ un caractère de $E'^*$. En ce cas $\sigma = \mathrm{Ind}_E^F \theta$ est somme des représentations $\mathrm{Ind}_{E'}^F \omega\theta'$, où $\omega$ parcourt les caractères de $E^*$ triviaux sur $N_{E'/E}(E^*)$ ; le résultat est alors conséquence de l'hypothèse de récurrence.

On suppose donc que $\theta$ est régulier, de sorte que $\sigma$ est irréductible.

On choisit une extension $L/K$ de corps de nombres (par corps de nombres nous entendons une extension finie de $\mathbb{Q}$ dans le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques), de degré $d$ munie d'une place $w$ de $L$, induisant une place $v$ de $K$, et d'un isomorphisme $\iota$ de $L_w/K_v$ sur $E/F$. C'est loisible par [6, Lem. 3.4]. On peut même choisir $L$ totalement réel.

On prend alors un caractère $X$ de $A_{L^*/L^*}$ tel que $X_w = \theta \circ \iota$ et qui soit non ramifié en les autres places finies $x$ de $L$. Un tel caractère existe bien : on peut prolonger à $A_{L^*}$ le caractère de son sous-groupe $L^*(\prod_x U_{L_x})$ qui est trivial sur le groupe des unités $U_{L_x}$ de $L_x$ pour $x$ distinct de $w$ et coïncide avec $\theta \circ \iota$ sur $U_{L_w}$ ; le caractère $X'$ ainsi obtenu coïncide avec $\theta \circ \iota$ sur $U_{L_w}$ et il suffit de tordre $X'$ par une puissance complexe de la norme adélique de $A_{L^*}$ pour obtenir un caractère $X$ adéquat.

Par la théorie globale des corps de classes, on voit $X$ comme un caractère du groupe de Weil $W_L$ de $\overline{Q}/L$, et on forme son induite $\Sigma$ à $W_K$. D'autre part on peut aussi former l'induite automorphe $\Pi$, de $L$ à $K$ de $X$, cf. [5, I.4 ou He12]. Comme $\theta$ est régulier sous l'action de $\mathrm{Gal}(E/F)$, a fortiori $X$ est régulier sous l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$, et ainsi $\Pi$ est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_d(A_K)$, et $\Sigma$ est une représentation irréductible de $W_K$. Par construction $\Sigma$ et $\Pi$ se correspondent, par la correspondance de Langlands, aux places infinies et aux places finies non ramifiées dans $L/K$, mais aussi en fait, par [9, §5] à toutes les places finies de $K$.

On choisit un caractère non trivial $\Psi$ de $A_K/K$ et on va prouver l'égalité désirée $(*)_\Lambda$, pour $\sigma = \mathrm{Ind}_E^F \theta$ et $\psi \circ \iota = \Psi_v$ : cela suffit d'après la section 2.3. On choisit aussi un caractère $\xi$ de $A_{K^*}/K^*$ tel que $\xi_v = \chi \circ \iota$, et on note encore $\xi$ le caractère correspondant de $W_K$.

L'équation fonctionnelle globale pour $L(\Pi, \xi, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s)$ et celle pour $L(\xi \cdot \Lambda^2\Sigma, s)$ donnent [10, 4.2]

$$\prod \gamma(\Pi_y, \xi_y, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \Psi_y) = \prod \gamma(\xi_y \cdot \Lambda^2\Sigma_y, s, \Psi_y),$$

où le produit porte sur l'ensemble fini $S$ des places finies de $K$ où l'un de $\Pi_y$, $\xi_y$ ou $\Psi_y$ est ramifié. Cet ensemble $S$ contient $v$ puisque $\Sigma_v$ est irréductible de degré $d > 1$.

En une place $y$ dans $S$ distincte de $v$, $\Sigma_y$ est somme de représentations monomiales de degré $< d$, parce que de toute façon $X_y$ est non ramifié. Donc par l'hypothèse de récurrence pour $y$ distinct de $v$ les facteurs $\gamma$ de droite et de gauche indexés par $y$ sont égaux. On obtient alors :

$$\gamma(\Pi_v, \xi_v, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \Psi_v) = \gamma(\xi_v \cdot \Lambda^2\Sigma_v, s, \Psi_v),$$

ce qui se traduit via $\iota$ en

$$\gamma(\pi, \chi, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\chi \cdot \Lambda^2\sigma, s, \psi), \quad \text{ce qu'on voulait.}$$

## 3.2.

Il nous faut maintenant traiter le cas d'une représentation monomiale $\sigma = \mathrm{Ind}_E^F\, \theta$, où $E/F$ n'est plus cyclique. Nous procédons par récurrence sur le degré $d'$ de la clôture galoisienne $E'/F$ de $E/F$. On peut supposer $d' > 1$.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous utilisons la méthode de [3, §4], reprise dans [5, VII.2.7], mais armé cette fois du théorème A, outre la correspondance de Langlands locale.

Cependant, avant de donner le raisonnement local-global, vérifions que le cas où $\theta$ est non ramifié s'ensuit de l'hypothèse de récurrence ; cela sera utile en section 3.5.

Supposons donc $\theta$ non ramifié ; alors $\sigma = \omega \cdot \mathrm{Ind}_E^F\, 1$ pour un caractère non ramifié $\omega$ de $F^*$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ind}_E^F\, 1$ est somme de représentations monomiales induites de sous-extensions $E_1/F$ de $E'/F$ dont la clôture galoisienne dans $E'$ n'est pas $E'$.

Posons $G = \mathrm{Gal}(E'/F)$, $H = \mathrm{Gal}(E'/E)$, et voyons $\mathrm{Ind}_E^F\, 1$ comme la représentation $\mathrm{Ind}_H^G\, 1$ de $G$. Comme $E/F$ n'est pas cyclique, $E'/F$ est ramifiée. Soit $G_a$ le dernier sous-groupe de ramification non trivial de $G$.

Il suffit de prouver que $\lambda = \mathrm{Ind}_H^{HG_a}\, 1$ est somme de représentations monomiales de la forme $\mathrm{Ind}_{H_1}^{HG_a}\, \theta_1$, où $H_1$ est un sous-groupe de $HG_a$ contenant $G_a$. La clôture galoisienne de l'extension de $F$ fixée par $H_1$ est fixée par $G_a$, donc n'est pas $E'$, et le résultat s'ensuit par induction de $H_{G_a}$ à $G$.

Mais la restriction à $G_a$ de $\lambda$ est $\mathrm{Ind}_{H\cap G_a}^{G_a}\, 1$, donc est la somme directe de tous les caractères de $G_a$ triviaux sur $H \cap G_a$.

Par la théorie de Clifford, un tel caractère $\nu$, qui intervient avec multiplicité 1 dans la restriction de $\lambda$ à $G_a$, s'étend en un caractère $\nu'$ de son stabilisateur $S_\nu$ dans $HG_a$, et $I_\nu = \mathrm{Ind}_{S_\nu}^{HG_a}\, \nu'$ est un composant irréductible de $\lambda$. De plus, $\lambda$ est la somme directe des $I_\nu$ quand $\nu$ parcourt les orbites sous $HG_a$ des caractères de $G_a$ triviaux sur $H \cap G_a$. Cela donne le résultat voulu.

## 3.3.

Nous reprenons maintenant, en plus simple, la démarche de [5, VII.2.7], dont nous gardons les notations. Commençons par décrire la situation globale considérée.

On a des corps $CM$ $L_1$ inclus dans $L_2$ lui-même inclus dans $L_3$ et $L_3/L_1$ est galoisienne finie de groupe de Galois résoluble. On note $c$ l'action de la conjugaison complexe, et $L_i^+$ le sous-corps de $L_i$ fixé par $c$. On note $e$ le degré de $L_2/L_1$.

On fixe un nombre premier $l$ et un isomorphisme $\iota$ d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$ avec $\mathbb{C}$. On se donne un caractère $X$ de $A_{L_2}^*/L_2^*$ tel que :

(1) Pour chaque plongement complexe $\tau$ de $L_2$, correspondant à une place infinie $x$ de $L_2$, on a $X_x(z) = (\tau z/c\tau z)^{p_\tau}$ où $p_\tau$ est un entier ; on suppose $p_\tau$ différent de $p_{\tau'}$ si $\tau'$ est distinct de $\tau$.
(2) Il existe une place finie $y$ de $L_1$, inerte dans $L_3$ et non ramifiée au-dessus de $L_1^+$, qui ne divise pas $l$ et telle que le stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(L_3/L_1)$ du caractère $X \circ N_{L_3/L_2}$ de $A_{L_3}^*/L_3^*$ soit exactement $\mathrm{Gal}(L_3/L_2)$.

Si le degré $L_2/L_1$ est impair, on choisit, ce qui est permis par la preuve du Corollary VII.2.8 de [5], un caractère auxiliaire $\varphi$ de $\mathbb{A}_{L_1}^*/L_1^*$ tel que :

(1) $\varphi^c = \varphi^{-1}$
(2) pour tout plongement complexe $\tau$ de $L_1$, correspondant à une place infinie $x$, on ait, pour $z$ dans $L_1$, $\varphi_x(z) = (\tau z/|\tau z|)^\varepsilon$ avec $\varepsilon = 1$ ou $-1$.
(3) $\varphi_y$ est non ramifié.

Si le degré de $L_2/L_1$ est pair, on pose $\varphi = 1$.

Proposition. — *Il existe une représentation automorphe cuspidale $I_{L_2}^{L_1}(X)$ de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{A}_{L_1})$ telle que :*

(1) $(I_{L_2}^{L_1}(X) \otimes \varphi \circ \det)_\infty$ *a le même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique des* $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{L_1} \mathrm{GL}_e$.
(2) $I_{L_2}^{L_1}(X)_y$ *est supercuspidal.*
(3) *La représentation $l$-adique de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L_1)$ *attachée à* $I_{L_2}^{L_1}(X) \otimes \varphi \circ \det$ *par le théorème A est l'induite de $L_2$ à $L_1$ de la représentation $l$-adique de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L_2)$ *attachée, par le procédé rappelé dans* [5, p. 20] *au caractère algébrique* $X \cdot (\varphi \circ N_{L_1/L_2}) |\cdot|^{(1-e)/2}$.

## 3.4.

La preuve, adaptée de [5], est par récurrence sur le degré de $L_3/L_1$. Il n'y a rien à prouver si ce degré vaut 1, on suppose donc que $L_3$ est différente de $L_1$, et on choisit une sous-extension $L_4/L_1$ de $L_3/L_1$, cyclique de degré premier.

Supposons d'abord $L_4$ incluse dans $L_2$. On pose $\varphi' = 1$ si le degré de $L_2/L_4$ est impair, et sinon $\varphi' = \varphi \circ N_{L_2/L_4}$. On applique l'hypothèse de récurrence pour former $I_{L_2/L_4}(X)$, et on forme l'induite automorphe de $I_{L_2}^{L_4}(X)$, de $L_4$ à $L_1$, qu'on note $I_{L_2}^{L_1}(X)$. Son composant en $y$ est supercuspidal par [12, Prop. 5.5]. Alors, cf. [5, p. 240], $(I_{L_2}^{L_1}(X) \otimes \varphi \circ \det)_\infty$ a bien le même caractère infinitésimal qu'une représentation algébrique de $\mathrm{Res}_{L_1/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_e$. On dispose donc de la représentation $l$-adique associée à $I_{L_2}^{L_1}(X) \otimes \varphi \circ \det$ par le théorème A.

La propriété désirée (3) de cette représentation provient alors de cette même propriété pour la représentation $l$-adique associée à $I_{L_2}^{L_4}(X) \otimes \varphi' \circ \det$ et de la construction de l'induite automorphe.

Supposons qu'au contraire $L_2$ ne contienne pas $L_4$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la situation $L_3 \supset L_2 L_4 \supset L_4$ pour obtenir $\pi_4 = I_{L_2 L_4}^{L_4}(\chi \circ N_{L_2 L_4}/L_4)$ d'où une représentation $l$-adique $R_4$ via la propriété 3) de la proposition. Elle est invariante par $\mathrm{Gal}(L_4/L_1)$, et il s'ensuit que $\pi_4$ provient, par changement de base de $L_1$ à $L_4$, d'une représentation $\pi_1$ de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{A}_{L_1})$. On peut appliquer à $\pi_1$ le théorème A, ce qui donne une représentation $l$-adique $R_1$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L_1)$ dont la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L_4)$ est $R_4$. Ainsi $R_1$ diffère de la représentation désirée par un caractère de $\mathrm{Gal}(L_4/L_1)$, et, en tordant $\pi_1$ par l'inverse du caractère correspondant de $\mathbb{A}_{L_1}^*/L_1^*$, on obtient la représentation $I_{L_2}^{L_1}(X)$ voulue.

On peut interpréter la proposition en disant que la représentation automorphe cuspidale $\Pi = \Pi(X)$, égale à $I_{L_2}^{L_1}(X)|\cdot|^{(e-1)/2}$ est associée à la représentation complexe $\Sigma = \Sigma(X)$ du groupe de Weil $W_{L_1}$ de $L_1$ qui est induite du caractère de $W_{L_2}$ correspondant à $X$. Alors les composants locaux de $\Pi$ et $\Sigma$ se correspondant à toutes les places [8, §6] et en particulier à la place $y$.

Si $\xi$ est un caractère de $\mathbb{A}_{L_1}^*/L_1^*$, on déduit comme en section 3.2 l'égalité

$$\prod \gamma(\Pi_y, \xi_y, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \Psi_y) = \prod \gamma(\xi_y \cdot \Lambda^2\Sigma_y, s, \Psi_y) \qquad (**)$$

pour tout caractère non trivial $\Psi$ de $\mathbb{A}_{L_1}/L_1$, où le produit porte sur un ensemble fini $S$ de places finies de $L_1$, contenant $y$ et les places $x$ où l'un de $\Psi_x$, $\Pi_x$ ou $\xi_x$ est ramifié.

**3.5.**

Il s'agit maintenant de globaliser $\sigma = \mathrm{Ind}_E^F \theta$ (où $\theta$ est un caractère ramifié de $E^*$) afin d'appliquer $(**)$.

Commençons par globaliser l'extension $E'/F$.

Par [6, Lem. 3.4] on choisit une extension galoisienne $K_3/K_1$ de corps de nombres totalement réels, de degré $d' = \deg(E'/F)$, munie d'une place finie $w_3$ de $K_3$, induisant une place $w_1$ de $K_1$, et d'un isomorphisme $\iota$ de $E'/F$ sur $K_{3,w_3}/K_{1,w_1}$, d'où un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(E'/F)$ sur $\mathrm{Gal}(K_3/K_1)$ via le groupe de décomposition en $w_3$. On note $K_2$ le sous-corps de $K_3$ fixé par le sous-groupe $\iota(\mathrm{Gal}(E'/E))$ de $\mathrm{Gal}(K_3/K_1)$ et $w_2$ la place de $K_2$ induite par $w_3$.

On choisit un corps quadratique imaginaire $L_0$ linéairement disjoint de $K_3$ sur $\mathbb{Q}$ et déployé en $p$, et on pose $L_i = K_i L_0$ pour $i = 1, 2, 3$ ; les $L_i$ sont donc des corps $CM$. On note $y_3$ et $y_3'$ les deux places de $L_3$ au-dessus de $w_3$ et $y_2$, $y_2'$, $y_1$, $y_1'$ les places induites de $L_2$ et $L_1$. L'isomorphisme $\iota$ induit des isomorphismes $\iota_3$ de $E'$ sur $L_{3,w_3}$, $\iota_3'$ de $E'$ sur $L_{3,w_3'}$, et on note $\iota_2$, $\iota_2'$ et $\iota_1$, $\iota_1'$ les isomorphismes provenant des restrictions à $L_2$ et $L_1$.

Pour chaque plongement complexe $\tau$ de $L_2$ on choisit un entier $p_\tau$ de façon que $p_\tau = -p_{c\tau}$ (comme plus haut $c$ désigne l'action de la conjugaison complexe) et que $p_\tau$ soit distinct de $p_{\tau'}$ si $\tau$ est distinct de $\tau'$. Considérons le caractère $Y_\infty$ de $(L_{2,\infty})^*$ donné, en une place complexe $x$ correspondant au plongement $\tau$ par la formule $z \to (\tau z / c\tau z)^{p_\tau}$. Certainement ce caractère est trivial sur le groupe des unités $U_{K_2}$ de $K_2$ ; comme ce groupe est d'indice fini dans le groupe des unités $U_{L_2}$ de $L_2$, on peut, quitte à multiplier tous les $p_\tau$ par un même entier strictement positif convenable, supposer que $Y_\infty$ est trivial sur $U_{L_2}$ ; il correspond alors à un caractère $Y$ de $\mathbb{A}_{L_2}^*/L_2^*$ non ramifié en toutes les places finies.

Soit $\lambda$ un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}_{L_2}^*/L_2^*$ tel que le stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(L_3/L_1)$ de $\lambda \circ N_{L_3 L_2}$ soit $\mathrm{Gal}(L_3/L_2)$. On peut alors appliquer les sections 3.3 et 3.4 à $X = \lambda Y$, à un caractère non trivial quelconque $\Psi$ et un caractère quelconque $\xi$ de $\mathbb{A}_{L_1}^*/L_1^*$. On dispose alors de l'égalité $(**)$ de 3.4. Si pour une place $x$ de $S$, $X_x$ est non ramifié (ce qui équivaut à $\lambda_x$ non ramifié puisque $Y_x$ est non ramifié lui-même) alors les facteurs $\gamma$ en $x$ des deux membres de $(**)$ sont égaux par le raisonnement de la section 3.2.

Fixons alors $\xi$ de sorte que $\xi_{w_1} \circ \iota_1 = \chi$ ; fixons aussi $\Psi$ et notons $\psi$ le caractère $\Psi_{w_1} \circ \iota_1$ de $F$ (nous savons qu'il suffisait de prouver $(*)_\Lambda$ pour un choix quelconque de $\psi$).

Notons $T$ l'ensemble des places finies de $L_1$ consistant en $w_1$, $w_1'$, les places où $L_2/L_1$ est ramifiée et les places où l'un de $\Psi_x$ ou $\xi_x$ est ramifié. Avec $\lambda$ et $X = \lambda Y$, on dispose de l'égalité $(**)$ pour $S$ union de $T$ et de l'ensemble des places finies $x$ de $L_1$ au-dessus desquelles $\lambda$ est ramifié. Pour $x$ dans $S - T$ l'extension $L_2/L_1$ est non ramifiée en $x$, donc les extensions locales de $L_{1'x}$ complétées de $L_2$ sont cycliques et par le raisonnement de la section 3.2 les facteurs $\gamma$ en $x$ des deux côtés de $(**)$ sont égaux. L'équation $(**)$ vaut donc avec $T$ à la place de $S$.

## 3.6.

Supposons d'abord que le stabilisateur de $\theta \circ N_{E'/E}$ dans $\mathrm{Gal}(E'/F)$ soit $\mathrm{Gal}(E'/E)$. Par le théorème de Grunwald–Wang, on peut choisir le caractère d'ordre fini $\lambda$ de $\mathbb{A}^*_{L_2}/L_2^*$ non ramifié en les places de $L_2$ au-dessus des places de $T$ mais différentes de $w_2$, et tel que $(Y\lambda)_{w_2} \circ \iota_2$ coïncide avec $\theta$ sur $U_E$. On a vu qu'on peut tordre $\theta$ par un caractère non ramifié de $E^*$ sans changer l'identité à prouver, et on peut donc supposer que $\theta = (Y\lambda)_{w_2} \circ \iota_2$.

Comme $\lambda$ est non ramifié en les places $v$ de $L_2$ au-dessus de $T$ distinctes de $w_2$, les facteurs $\gamma$ dans $(**)$ correspondant à $x$ dans $T$ différent de $w_1$ sont les mêmes à droite et à gauche, et on obtient donc une égalité à la place $w_1$ :

$$\gamma(\Pi(X)_{w_1},\ \xi_{w_1},\ \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, s, \Psi_{w_1}) = \gamma(\xi_{w_1} \cdot \Lambda^2\Sigma_{w_1},\ s,\ \Psi_{w_1}).$$

Via l'isomorphisme $\iota_1$, cela donne $\gamma(\pi, \eta, \Lambda^2\rho_n \otimes \rho_1, \psi) = \gamma(\chi\Lambda^2\sigma,\ s,\ \psi)$, ce qu'on voulait.

Dans le cas général, choisissons un caractère $\theta'$ de $E^*$ tel que le stabilisateur de $\theta' \circ N_{E'/E}$ dans $\mathrm{Gal}(E'/F)$ soit $\mathrm{Gal}(E'/E)$. Le raisonnement de [5, p. 320] assure que de tels caractères existent.

Cette fois, choisissons $\lambda$ d'ordre fini, non ramifié en les places finies de $L_2$ au-dessus des places de $T$ mais distinctes de $w_2$ et $w_2'$, tel que $(Y\lambda)_{w_2'} \circ \iota_2'$ coïncide avec $\theta'$ sur $U_E$, et même sur $E^*$ en tordant $\theta'$ par un caractère non ramifié, et enfin tel que $(Y\lambda)_{w_2} \circ \iota_2$ coïncide avec $\theta$ sur $U_E$, et même sur $E^*$ puisqu'on peut modifier $\theta$ par un caractère non ramifié.

Comme précédemment les facteurs $\gamma$ des deux côtés de $(**)$ sont les mêmes en les places de $T$ distinctes de $w_1$ et $w_1'$, et c'est vrai aussi en $w_1'$ par le cas précédent. C'est donc vrai en $w_1$, ce qui donne le résultat voulu comme plus haut.

Cela termine la preuve du Théorème 2.1.

## 4. Le cas des facteurs $\gamma$ d'Asai

Passons au cas des facteurs $\gamma$ d'Asai, cf. [10, §5] et [19]. Ici l'égalité à prouver, due à Shankman qui adaptait les méthodes de [1], s'écrit :

$$\gamma(\pi(\sigma) \otimes \pi(\chi), I(\rho_n) \otimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(I(\sigma) \otimes \chi,\ s,\ \psi). \qquad (*)_{As}$$

La situation et les notations sont les suivantes :

$K$ est une extension quadratique de $F$, $\sigma$ une représentation de Weil–Deligne de $W_K$, de dimension $n$, $\chi$ un caractère de $W_F$, $\psi$ un caractère non trivial de $F$. On désigne par $I(\sigma)$ la représentation de Weil–Deligne de $W_F$, de dimension $n^2$, obtenue par induction tensorielle, de $W_K$ à $W_F$, de $\sigma$. Les facteurs $\gamma$ de gauche sont obtenus par la méthode de Langlands–Shahidi [10, §5].

Dans [10, Thm. 5.2] nous avons prouvé $(*)_{As}$ à une racine de l'unité près. Comme nous y avons aussi prouvé l'égalité correspondante des facteurs $L$, l'égalité $(*)_{As}$ est équivalente à l'égalité correspondante pour les facteurs $\varepsilon$ au lieu des facteurs $\gamma$.

Indiquons maintenant comment les méthodes de la section 3 s'adaptent pour une preuve de $(*)_{As}$. Nous serons extrêmement bref, car il s'agit simplement de décaler les arguments de la section 3 au contexte présent. En fait nous prouvons

$$\gamma(\pi(\sigma), I(\rho_n), s,\ \psi) = \gamma(I(\sigma),\ s,\ \psi), \qquad (**)_{As}$$

sans le facteur $\chi$, ce qui revient à prendre $\chi = 1$ dans $(*)_{As}$. On pourrait comme dans loc. cit. insérer le caractère $\chi$ dans la démonstration, mais il est plus simple de remarquer que si $\theta$ est un caractère de $W_K$ tel que la restriction à $F^*$ de $\pi(\theta)$ soit $\pi(\chi)$, alors $\gamma(I(\sigma) \otimes \chi, s, \psi) = \gamma(I(\theta\sigma), s, \psi)$ et $\gamma(\pi(\sigma) \otimes \pi(\chi), I(\rho_n) \otimes \rho_1, s, \psi) = \gamma(\pi(\theta\sigma), I(\rho_n), s, \psi)$, donc $(*)_{As}$ est conséquence de $(**)_{As}$.

Des réductions ont été effectuées dans loc. cit. Comme en section 3 on peut supposer $\sigma = \mathrm{Ind}_E^K \theta$ où $E$ est une extension finie de $K$ et $\theta$ un caractère de $E^*$, vu aussi comme un caractère de $W_E$. Tordre $\theta$ par un caractère non ramifié ne change pas l'identité à prouver, et il suffit de la prouver pour un choix particulier de $\psi$.

On peut alors intégralement transporter la méthode locale-globale de la section 3, en traitant d'abord, comme en section 3.2, le cas où $E/K$ est cyclique, ce qui n'utilise pas le théorème A, puis le cas général, comme dans les sections 3.3 à 3.6. La seule précaution à prendre est de globaliser l'extension $E'/F$ où $E'/F$ est la clôture de $E/F$, et non celle de $E/K$.

## Bibliographie


[1] J. W. Cogdell, F. Shahidi & T.-L. Tsai, « Local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_n$, and the exterior and symmetric square $\varepsilon$–factors », *Duke Math. J.* **166** (2017), n° 11, p. 2053-2132.

[2] P. Deligne & G. Henniart, « Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions $L$ », *Invent. Math.* **64** (1981), n° 1, p. 89-118.

[3] M. Harris, « The local Langlands conjecture for $\mathrm{GL}(n)$ over a $p$–adic field, $n < p$ », *Invent. Math.* **134** (1998), n° 1, p. 177-210.

[4] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor & J. Thorne, « On the rigid cohomology of certain Shimura varieties », *Res. Math. Sci.* **3** (2016), article no. 37 (308 pages).

[5] M. Harris & R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, 2001.

[6] G. Henniart, *La conjecture de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(3)$, Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série, vol. 11/12, Société Mathématique de France, 1983, 186 pages.

[7] ———, « Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps $p$–adique », *Invent. Math.* **139** (2000), n° 2, p. 439-455.

[8] ———, « Sur la conjecture de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n$ », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), n° 1, p. 167-187.

[9] ———, « Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}(n)$ », *Bull. Soc. Math. Fr.* **130** (2002), n° 4, p. 587-602.

[10] ———, « Correspondance de Langlands et fonctions $L$ des carrés extérieur et symétrique », *Int. Math. Res. Not.* **2010** (2010), n° 4, p. 633-673.

[11] ———, « Induction automorphe globale pour les corps de nombres », *Bull. Soc. Math. Fr.* **140** (2012), n° 1, p. 1-17.

[12] G. Henniart & R. Herb, « Automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ (over local non–archimedean fields) », *Duke Math. J.* **78** (1995), n° 1, p. 131-192.

[13] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro & J. Shalika, « Rankin–Selberg convolutions », *Am. J. Math.* **105** (1983), p. 367-464.

[14] P. Scholze, « The local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_n$ over $p$–adic fields », *Invent. Math.* **192** (2013), n° 3, p. 663-715.

[15] ———, « On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties », *Ann. Math.* **182** (2015), n° 3, p. 945-1066.

[16] F. Shahidi, « Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$ », *Am. J. Math.* **106** (1984), n° 1, p. 67-111.

[17] ———, « Local coefficients as Artin factors for real groups », *Duke Math. J.* **52** (1985), p. 973-1007.

[18] ———, « A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures ; complementary series for $p$–adic groups », *Ann. Math.* **132** (1990), n° 2, p. 273-330.

[19] D. Shankman, « Local Langlands correspondence for Asai $L$–functions and epsilon factors », 2018, `https://arxiv.org/abs/1810.11852`.

[20] J. Tate, « Number theoretic background », in *Automorphic forms representations and L–functions (Oregon State Univ. Corvallis, Ore., 1977)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, 1977, p. 3-26.