ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE
Mathématiques

THIERRY BOUSCH

Une représentation des cobords faibles d'un système dynamique

Tome XXXII, nº 5 (2023), p. 817–821.

https://doi.org/10.5802/afst.1753

Publication membre du centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2258-7519

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXXII, n° 5, 2023
pp. 817-821

Une représentation des cobords faibles d'un système dynamique (*)

Thierry Bousch (1)

Résumé. — Soit $T : X \to X$ une transformation continue d'un espace compact X. On démontre que tout cobord faible de (X, T) peut s'écrire sous la forme $\sum_{n \geqslant 1}(f_n \circ T^n - f_n)$, où les f_n sont des fonctions continues sur X telles que $\sum \|f_n\| < \infty$.

Abstract. — Let $T : X \to X$ be a continuous transformation of a compact space X. It is proved that every weak coboundary of (X, T) can be written as $\sum_{n \geqslant 1}(f_n \circ T^n - f_n)$, where the f_n are continuous functions on X such that $\sum \|f_n\| < \infty$.

1. Cobords et cobords faibles

Soit X un espace métrique compact, non vide, et T une application continue de X dans lui-même. Comme d'habitude, on note $C(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme $\| \cdot \|$.

On appelle *cobord* (topologique) une fonction de la forme $f \circ T - f$, où $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Les fonctions de cette forme, ainsi que la question de savoir si une fonction donnée est un cobord, apparaissent dans de nombreux problèmes de dynamique [4], notamment dans les questions de conjugaison différentiable et la théorie KAM [1, 9].

Il est évident que si une fonction continue $h : X \to \mathbb{R}$ est un cobord, alors h est de moyenne nulle par toute mesure de probabilité T-invariante sur X (et en particulier, de moyenne nulle sur toute orbite périodique de T). Les

(*) Reçu le 25 juin 2021, accepté le 20 septembre 2021.
Mots-clés : cobord faible.
Classification Mathématique (2020) : 37B99.
(1) Laboratoire de Mathématique d'Orsay (UMR 8628 du CNRS), bât. 307, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France. —
thierry.bousch@universite-paris-saclay.fr
Article proposé par Marie-Claude Arnaud.

cobords sont donc, pour ainsi dire, « invisibles » par les mesures invariantes. Ce fait est abondamment utilisé dans le formalisme thermodynamique et en optimisation ergodique : si, dans un problème donné, une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ n'intervient que par ses moyennes par les mesures invariantes, on peut ajouter à g un cobord quelconque, afin que la nouvelle fonction se prête mieux à la résolution du problème.

Pour les systèmes dynamiques les mieux compris — les rotations irrationnelles (diophantiennes) sur le tore $\mathbb{T}^n$, ou à l'inverse, les transformations dilatantes ou hyperboliques, notamment les décalages — on connaît des réciproques partielles à cet énoncé, en particulier le classique théorème de Lifchitz [7] : si une fonction h est « suffisamment régulière » (les hypothèses précises dépendent du système dynamique considéré), et de moyenne nulle par toute mesure de probabilité invariante, alors h est un cobord.

Ce n'est plus vrai si h est seulement supposée continue. Ceci est dû au fait que l'ensemble des cobords, qui est évidemment un sous-espace vectoriel de $C(X)$, n'est en général pas fermé [5], ce qui amène à introduire la définition suivante.

On appelle *cobord faible* une fonction continue $X \to \mathbb{R}$ qui est limite uniforme de cobords. Il est évident que si h est un cobord faible, alors h est de moyenne nulle pour toute mesure de probabilité T-invariante sur X. Cette fois-ci, on a une réciproque exacte, et valable pour tout système dynamique : si une fonction continue $h : X \to \mathbb{R}$ est de moyenne nulle pour toute mesure de probabilité invariante, alors h est un cobord faible [2, 3, 6, 8].

Cette seconde description des cobords faibles n'est malheureusement pas beaucoup plus explicite que la première. Mais elle fait apparaître l'ensemble $\mathcal{L}$ des cobords faibles, sous-espace vectoriel fermé de $C(X)$, pour reprendre la notation de [3], comme le noyau d'un morphisme très naturel. Notons $\mathcal{K}$ le simplexe des mesures de probabilité T-invariantes sur X, muni de la topologie vague, et $A(\mathcal{K})$ l'ensemble des fonctions affines continues $\mathcal{K} \to \mathbb{R}$. A toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, associons la fonction affine continue $q(f) : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ définie par $q(f)(\mu) = \int_X f\mu$. L'application

$$q : C(X) \longrightarrow A(\mathcal{K})$$

ainsi définie est linéaire et continue, surjective, et de noyau $\mathcal{L}$, voir la Proposition 2.1 de [3]. Pour cette raison, il serait intéressant d'avoir des descriptions plus « concrètes » de $\mathcal{L}$, par exemple comme quotient d'un espace de Banach explicite.

D'abord une observation simple sur les (vrais) cobords : toute fonction de la forme $f \circ T^n - f$, avec f continue et $n \geqslant 0$, est un cobord, car on peut l'écrire $(S_n f)\circ T - (S_n f)$, où $S_n f$ désigne la somme ergodique

$$S_n f \;=\; f + f\circ T + \cdots + f\circ T^{n-1},$$

et plus généralement, toute fonction de la forme $f_0 + f_1\circ T + \cdots + f_n\circ T^n$, où les f_i sont des fonctions continues dont la somme est nulle, est un cobord.

L'article [2] présente une construction de cobords faibles, due à Michel Zinsmeister, et qu'on peut généraliser de la manière suivante. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $C(X)$ vérifiant $\sum \|f_n\| < \infty$. Alors la somme

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n\circ T^n - f_n$$

est bien définie, comme élement de $C(X)$, et c'est un cobord faible, car tous les termes de la somme sont des cobords. Ou, pour présenter les choses un peu différemment : toute fonction de la forme $\sum_{n\geqslant 0} f_n\circ T^n$, où les $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sont des fonctions continues vérifiant $\sum \|f_n\| < \infty$ et dont la somme est nulle, est un cobord faible.

Il est naturel de se demander si tout cobord faible de (X,T) peut être obtenu par ce procédé. L'objet de cette note est de montrer que c'est effectivement le cas.

Théorème 1.1. — *Pour tout cobord faible $f : X\to\mathbb{R}$ du système dynamique (X,T), on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions continues $X\to\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\sum \|f_n\| \;\leqslant\; 12\,\|f\|$$

avec $\sum f_n = 0$ et telles que $f = \sum f_n\circ T^n$.

2. Démonstration du théorème

Considérons d'abord le cas où la fonction est un cobord.

Lemme 2.1. — *Pour tout cobord $f : X\to\mathbb{R}$ du système dynamique (X,T), on peut trouver un entier $n\geqslant 1$ et des fonctions continues $f_0, f_1, \ldots, f_n : X\to\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \|f_i\| \;\leqslant\; 4\,\|f\|$$

avec $f_0 + \cdots + f_n = 0$ et telles que $f = f_0 + f_1\circ T + \cdots + f_n\circ T^n$.

Démonstration. — On peut évidemment supposer $\|f\|\neq 0$. Soit $g : X\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f = g\circ T - g$, et n un entier strictement positif. De l'égalité $g\circ T^n - g = f + f\circ T + \cdots + f\circ T^{n-1}$ on déduit

$$nf \;=\; \big((n-1)f - g\big) - f\circ T - \cdots - f\circ T^{n-1} + g\circ T^n$$

ce qu'on peut écrire

$$f = f_0 + f_1 \circ T + \cdots + f_n \circ T^n$$

avec $f_0 = \big((n-1)f - g\big)/n$, $f_1 = \cdots = f_{n-1} = -f/n$ et $f_n = g/n$. Les fonctions f_i sont bien de somme nulle, et

$$\begin{aligned}\|f_0\| + \|f_1\| + \cdots + \|f_{n-1}\| + \|f_n\| &\leqslant \frac{(n-1)\,\|f\| + \|g\|}{n} + (n-1)\frac{\|f\|}{n} + \frac{\|g\|}{n} \\ &= \frac{2}{n}\Big[(n-1)\,\|f\| + \|g\|\Big]\end{aligned}$$

qui est $\leqslant 4\,\|f\|$, si n est choisi tel que $(n+1)\,\|f\| \geqslant \|g\|$. □

Traitons maintenant le cas général, avec f cobord faible quelconque.

Comme les cobords sont denses parmi les cobords faibles, on peut trouver une suite $(\varphi_m)_{m\geqslant 0}$ d'éléments de $C(X)$ qui sont des cobords, tels que $\varphi_0 = 0$ et $\|f - \varphi_m\| \leqslant 2^{-m}\,\|f\|$ pour tout $m \geqslant 0$. Définissons alors $f^m = \varphi_{m+1} - \varphi_m$ pour $m \geqslant 0$. Ces fonctions f^m sont des cobords, avec $\|f^m\| \leqslant 3/2^{m+1}\,\|f\|$, et $f = \sum f^m$. Notons que $\sum \|f^m\| \leqslant 3\,\|f\|$.

Appliquons maintenant le lemme ci-dessus aux fonctions f^m : il existe une famille $(f_n^m)_{m,n\geqslant 0}$ d'éléments de $C(X)$ tels que pour tout entier naturel m, on a

$$\sum_n \|f_n^m\| \leqslant 4\,\|f^m\|$$

avec $f^m = \sum_n f_n^m \circ T^n$ et $\sum_n f_n^m = 0$. En particulier

$$\sum_{m,n} \|f_n^m\| \leqslant \sum_m 4\,\|f^m\| \leqslant 12\,\|f\| \,.$$

On peut donc écrire $f = \sum_m f^m = \sum_{m,n} f_n^m \circ T^n = \sum_n f_n \circ T^n$, où les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies par $f_n = \sum_m f_n^m$. Ces fonctions f_n satisfont

$$\sum_n \|f_n\| \leqslant \sum_{m,n} \|f_n^m\| \leqslant 12\,\|f\|$$

et enfin $\sum_n f_n = \sum_{m,n} f_n^m = 0$, puisque $\sum_n f_n^m = 0$ pour tout m, ce qui termine la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, « Small denominators. I. Mapping the circle into itself », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **25** (1961), p. 21-86.

[2] T. Bousch & O. Jenkinson, « Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions », *Invent. Math.* **148** (2002), n° 1, p. 207-217.

[3] R. B. Israel & R. R. Phelps, « Some convexity questions arising in statistical mechanics », *Math. Scand.* **54** (1984), p. 133-156.

[4] A. Katok & E. A. Robinson, Jr, « Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory », in *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle 1999)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 69, American Mathematical Society, 2001, p. 107-173.

[5] A. Kocsard, « On cohomological C^0-(in)stability », *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **44** (2013), p. 489-495.

[6] W. Krieger, « On quasi-invariant measures in uniquely ergodic systems », *Invent. Math.* **14** (1971), p. 184-196.

[7] A. N. Livšic, « Some homological properties of Y-systems », *Mat. Zametki* **10** (1971), p. 555-564.

[8] J. Moulin-Ollagnier & D. Pinchon, « Systèmes dynamiques topologiques. I. Etude des limites de cobords », *Bull. Soc. Math. Fr.* **105** (1977), p. 405-414.

[9] H. Rosenberg, « Les difféomorphismes du cercle », in *Séminaire Bourbaki 1975/76*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 567, Springer, 1977, Exp. n° 476, p. 81-98.