Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

MATHÉMATIQUES

BERNARD MALGRANGE

Deux lettres de Bernard Malgrange sur la théorie de Galois différentielle non-linéaire

Tome XXXIII, n$^{\text{o}}$ 1 (2024), p. 225–235.

https://doi.org/10.5802/afst.1769

Publication membre du centre
Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2258-7519

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXXIII, n° 1, 2024
pp. 225-235

Deux lettres de Bernard Malgrange sur la théorie de Galois différentielle non-linéaire [(*)]

Bernard Malgrange

Résumé. — On considère l'équation différentielle définie par un champ de vecteurs sur une variété algébrique (sur $\mathbb{C}$), lisse, affine et irréductible. En utilisant les idées d'Umemura, on montre que la théorie de Galois différentielle correspondante s'obtient en prenant les équations aux dérivées partielles polynomiales satisfaites par les solutions en fonction des données initiales. En restriction à un ouvert de Zariski convenable (mais non en général sur la variété tout entière), ce système d'équations est un pseudogroupe de Lie.

Abstract. — We consider the differential equation defined by a vector field over an algebraic variety (over $\mathbb{C}$) smooth, affine, and irreducible. Using the ideas of Umemura, one sees that the corresponding differential Galois theory is obtained by taking the partial differential equations satisfied by the solutions in terms of the initial conditions. By resriction to a suitable Zariski open set (but not in general on the whole variety), this system of equations is a Lie pseudogroup.

Le texte suivant est un complément au volume à la mémoire de Hiroshi Umemura, publié par les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* [4] et plus particulièrement à [17]. Le format informel de lettres répond au souhait de Bernard Malgrange. Nous avons ajouté une bibliographie et des renvois dans le texte des lettres. Pour les références de base à la théorie de Malgrange, on se reportera à [11] et à la bibliographie de cet article[(a)]. Pour celles d'Umemura[(b)], cf. la liste de ses publications [15] et l'article [17].

G. Casale, L. Di Vizio, J.P. Ramis

(*) Reçu le 12 novembre 2021, accepté le 23 mars 2022.

Article proposé par Lucia Di Vizio.

(a) Les résultats fondamentaux sur les pseudogroupes sont démontrés dans [10]. Cet article est écrit dans le contexte « $\mathbb{C}$-analytique ». La transposition au cas « algébrique sur $\mathbb{C}$ » n'apporte aucune complication.

(b) Son idée de base est, par exemple, bien expliquée dans [23], avec une esquisse de comparaison avec la théorie de Malgrange. Selon Malgrange : *« . . . c'est le seul endroit où il dit clairement son idée, à savoir que Galois différentiel consiste à écrire les équations aux dérivées partielles du flot en fonction des conditions initiales, idée que je reprend dans ma lettre »*. Cf. aussi [21].

1. Lettre de Bernard Malgrange à Jean-Pierre Ramis, 01/09/2021

Cher Jean-Pierre,

Voici comme promis quelques remarques sur deux points, d'ailleurs liés : d'une part sur la relation entre la théorie d'Umemura et la mienne, d'autre part sur la façon dont je vois maintenant la théorie de Galois différentielle non-linéaire (cf. mon mail à Casale de l'an dernier[(c)]).

Comme le remarque Umemura, pour faire la comparaison il faut prendre dans sa théorie $K = \mathbb{C}$. Je prends alors les notations suivantes : X est une variété algébrique sur $\mathbb{C}$, lisse, affine, irréductible, de dimension n. Je note $A = \mathbb{C}[X]$ son anneau de fonctions régulières et $K = \mathbb{C}(X)$ son corps des fonctions rationnelles. Dans les notations d'Umemura, K est noté L.

Soit ξ un champ de vecteurs sur X, partout non-singulier. Je définis alors deux objets sur ξ : son enveloppe et le pseudogroupe de Galois du feuilletage défini par ξ (voir un peu plus loin les définitions). Umemura ne considère que le premier des deux objets. En outre la théorie qu'il en fait est ce que j'appelle ci-dessous la théorie « germique », mais non la théorie « globale ». Je vais expliquer ce que j'entend par là.

1.1. Théorie « germique » ou « rationnelle »

Je travaille avec les ouverts (de Zariski) U de X. Comme j'aurai à travailler modulo rétrécissements on peut se contenter des U affines. Les notations sont les suivantes : $J_k^*(U)$ les jets d'ordre k inversibles de U dans U, $R_k(U)$ les repères d'ordre k sur U, i.e. les jets d'ordre k inversibles $(\mathbb{C}^n, 0) \to U$; $R_k(U)$ est un fibré principal sur U, de groupe $\Gamma_k =$ les jets d'ordre k inversibles de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans lui-même. D'autre part l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \beta\alpha^{-1}$ fait de $R_k(U)^2$ un fibré principal sur $J_k^*(U)$, de groupe Γ_k.

Ceci étant, je fais les constructions suivantes.

(a) Je considère un sous-groupoïde de $J_k^*(U)$[(d)]. (Il suffira ici de le prendre réduit, ce qui est vrai si on restreint U.) Alors la fibration précédente met ces groupoïdes en bijection avec les relations d'équivalence (réduites) sur $R_k(U)$, stables par Γ_k.

(c) Cf. Section 2 ci-dessous.

(d) [N.D.A.] Il s'agit de ce que j'appelle « sous-groupoïde strict » dans mes articles. Je n'en considère pas d'autre.

(b) Je « germifie » la situation en identifiant la situation avec la même sur une restriction V de U. J'obtiens ainsi un germe de sous-groupoïde de $J_k^*(U)$ (ou $J_k^*(X)$) au voisinage du point générique x de X. Plus précisément « au voisinage de (x, x) sur X^2, muni de la topologie (de Zariski) produit ».
(c) Maintenant « un pseudogroupe sur U » sera une collection de sous groupoïdes G_k des $J_k^*(U)$, qui forme un système différentiel, i.e. est défini par un idéal différentiel (nécessairement réduit, i. e. égal à sa racine, d'après mes définitions). On définit alors comme ci-dessus un germe de pseudogroupe. Un pseudogroupe (ou un germe) a une D-algèbre de Lie, qui est un système différentiel linéaire sur les champs de vecteurs. Je prends alors la définition suivante (la même que dans mes articles, à un petit changement de notations près).

DÉFINITIONS 1.1. —

(a) *L'enveloppe de ξ est le plus petit germe de pseudogroupe tel que ξ soit une solution de sa D-algèbre de Lie*
(b) *Le (germe de) peudogroupe de Galois de ξ est le plus petit germe de pseudogroupe tel que tous les multiples de ξ soient solutions de sa D-algèbre de Lie (donc il ne dépend pas de ξ, mais seulement du feuilletage correspondant).*

Les démonstrations d'existence nécessaires sont dans mes articles, que je répéte au langage près. Comme je l'ai dit plus haut Umemura considère seulement le premier, que je noterai P. Je noterai P_k sa restriction à l'ordre k, germe de sous-groupoïde de J_k^*.

On peut voir qu'il suffit de décrire les P_k, ce qui se fait ainsi. Tout d'abord, pour $k = 0$, P_0 est le plus petit germe de relation d'équivalence sur X dont l'algèbre de Lie (= le fibré normal à la diagonale dans P_0) contient ξ. Le résultat de Gabriel [16] peut se dire ainsi : un germe de relation d'équivalence est donné par un sous-corps $H \supset \mathbb{C}$ de K. Le germe en question est donné par l'idéal $\mathcal{I}(H)$ de $K \otimes_{\mathbb{C}} K$ engendré par les $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in H$. Donc l'anneau quotient est $K \otimes_H K$.

Ici, bien sûr, $H = K^\xi$ sera le corps des intégrales premières de ξ. On peut remarquer que $\mathcal{I}(K^\xi)$ est premier, donc $K \otimes_{K^\xi} K$ intègre, du fait (facile) que K^ξ est algébriquement fermé dans K. On verra plus loin une autre démonstration plus rapide.

Pour $k \geqslant 1$, on se ramène à une situation analogue en remplaçant ξ par son prolongement à R_k et en remarquant que le germe P_k se relève en un germe de relation d'équivalence sur R_k, stable par Γ_k. L'invariance par Γ_k montre qu'il suffit même de prendre le germe sur R_k (et non sur X). La situation va donc être décrite par les intégrales premières du prolongement de ξ, qui donneront un corps stable par Γ_k. On obtient donc encore un anneau intègre (incidemment, Umemura considére plutôt son corps des fractions, mais peu importe).

Voici maintenant la méthode d'Umemura : son idée est que la théorie de Galois différentielle s'obtient en prenant la clôture de Zariski de l'holonomie. Je vais d'abord expliquer le cas $k = 0$. On considère l'anneau $K[\![t]\!]$ dans lequel on plonge K de deux manières différentes.

Soit $a \in K$; la première manière est de lui associer la série formelle réduite à son terme constant, noté encore a. La deuxième manière consiste à associer à a son image par le « morphisme de Taylor i », définie par $i(a) = \sum \frac{1}{\ell!}\xi^\ell(a)t^\ell$. On considère alors le sous-anneau $Ki(K)$ engendré par K et $i(K)$ dans $K[\![t]\!]$. L'intersection de K et $i(K)$ est évidemment K^ξ. Un lemme de Kolchin [8, 9] (redémontré par Umemura dans « Galois theory of algebraic and differential equations » [20]) dit que K et $i(K)$ sont linéairement disjoints sur K^ξ. On aura donc $Ki(K) = K \otimes_{K^\xi} K$ et on retombe sur la construction faite plus haut.

Pour $k \geqslant 1$, on peut opérer de la même manière (en fait Umemura travaille sur tous les k à la fois, mais ça revient au même). Incidemment, il est évident par cette méthode que l'on obtient des anneaux intègres : $Ki(K)$ est un sous-anneau de $K[\![t]\!]$, donc il est intègre.

Pour terminer ce paragraphe, un mot sur le pseudogroupe de Galois de ξ. Il s'obtient de façon analogue avec les jets d'automophismes transverses. La question est traitée en détail dans mon article aux prépublications de l'IHÉS [11]. Je rappelle seulement ceci : le (germe de) pseudogroupe de Galois est contenu dans le pseudogroupe qui fixe le feuilletage, donc le quotient transversal (= action sur l'espace local des feuilles) est bien défini. Le pseudogroupe est obtenu par image inverse du pseudogroupe transverse.

Incidemment, l'enveloppe de ξ est contenue dans le pseudogroupe de Galois, donc le quotient transverse a encore un sens. On peut voir facilement que les deux pseudogroupes transverses coïncident. Par contre, ils différent « longitudinalement ». Ceci se voit en regardant les algèbres de Lie. Dans le second cas, elle contient tous les champs tangents au feuilletage. Dans le premier cas, c'est différent : comme on a $L_\xi \xi = 0$, le pseudogroupe enveloppe est contenu dans le pseudogroupe qui fixe ξ. Donc il en va de même de l'algèbre de Lie correspondante. Si donc $a\xi$ est une solution de cette algèbre de Lie proportionnelle à ξ, on doit avoir $[a\xi, \xi] = -\xi(a)\xi = 0$, donc a est une intégrale première.

1.2. Théorie « globale » ou « régulière »

Il s'agit d'une question dont Umemura ne parle pas, mais où néanmoins ses idées jouent un rôle important. La question est esquissée dans mon article aux prépublications de l'IHÉS [11, Chap. 1, §5.4], mais elle ne sert pas dans la suite de l'article. Une méthode plus naturelle que celle indiquée dans cet article consiste à prendre, pour tout k, l'adhérence de Zariski $\overline{P}_k$ de P_k dans $J_k(X)$.

Elle se définit ainsi : pour tout $U \subset X$ ouvert affine, soit $\mathcal{O}_k(U)$ l'espace des fonctions régulières sur $J_k^*(U)$ (noter que cet espace est lui aussi affine). Si $U \supset V$, on a une injection $\mathcal{O}_k(U) \subset \mathcal{O}_k(V)$; d'où en passant à la limite inductive un anneau $\mathcal{O}_k$: le germe P_k est défini par un idéal de $\mathcal{O}_k$ et on prend sa restriction à $\mathcal{O}_k(X)$, ce qui définit $\overline{P}_k$ qui est irréductible. On obtient le système $\overline{P} = (\overline{P}_k)$ dont on vérifie que c'est un système différentiel. En général ce *n'est pas un pseudogroupe* ; on aura seulement des pseudogroupes sur des ouverts convenables de X et le germe correspondant sera P.

Comment l'appeler ? peut-être « presque pseudogroupe » ou « pseudogroupe avec singularités » (terminologie suggérée par Casale [2]) ; P et $\overline{P}$ se déterminent réciproquement ; donc a priori l'utilité de cette construction n'est pas évidente. Mais en fait, $\overline{P}$ apparaît au moins de deux manières intéressantes.

La première est due à P. Bonnet [1] (je dois cette référence à Casale). Je donne seulement le résultat pour $k = 0$, auquel cas $\overline{P}_0$ est une sous-variété (irréductible) de X^2. Il dit que pour un ensemble très général de points fermés $a \in X$, l'adhérence de Zariski de la feuille passant pas a est l'image réciproque dans $\overline{P}_0$ de a par la première (ou la seconde) projection. « Ensemble très général » signifie « tous les points sauf ceux d'une famille dénombrable d'hypersurfaces ». Bien sûr, pour tous les $k \geqslant 1$ c'est pareil.

La seconde manière est plus importante. Elle consiste à remarquer que la méthode d'Umemura donne directement les $\overline{P}_k$, qui apparaissent donc comme clôture de Zariski de l'holonomie. Il suffit de le vérifier pour $k = 0$. Si alors A est l'anneau des fonctions régulières sur X, on doit considérer, avec des notations analogues à celles de 1.1, le sous-anneau de $A[\![t]\!]$ engendré par A et $i(A)$, qu'on note $Ai(A)$. Il est visible que c'est le quotient de $A \otimes_{\mathbb{C}} A$ par l'idéal restriction de $\mathcal{I}(K^{\xi})$ de $K \otimes_{\mathbb{C}} K$ considéré dans 1.1. Donc on retombe bien sur la clôture de Zariski de P_0.

Comme je l'ai indiqué dans des courriels de septembre 20, ceci a la conséquence de donner des relations entre la théorie de Galois différentielle de ξ sur X et celle de ξ sur une sous-variété de X stable par ξ. Des exemples sont donnés dans ces courriels.

Il faudrait en trouver d'autres. Par exemple.

(a) Si Y est une sous-variété de X stable par ξ, quelle relation y a-t-il entre l'enveloppe de ξ (ou son pseudogroupe de Galois) et les mêmes objets pour la restriction de ξ à Y. Il faudrait aussi comparer avec les mêmes objets considérés pour le complété formel de Y dans X (ces derniers définis, par exemple, par la méthode d'Umemura)

(b) Plus généralement, si l'on se donne deux variétés X et Y, un morphisme $u : Y \to X$, et deux champs de vecteurs ξ sur X et η sur Y, avec $u(\eta) = \xi$, quelle relation y a t-il entre les théories de Galois correspondantes ? La question peut se poser plus généralement avec deux feuilletages sur X et Y, et une condition de compatibilité entre les feuilletages. Par exemple, les feuilles de Y sont envoyées par u dans (ou sur) les feuilles de X, ou bien le feuilletage sur Y est l'image réciproque de celui de X, ou bien etc.

Incidemment : je suis un peu surpris que Umemura ne parle nulle part de la construction qui précède, qui vient naturellement dans sa théorie. Peut-être a-t-il été impressionné par l'idée que la théorie de Galois différentielle, comme la théorie de Galois usuelle, doit être une théorie rationnelle. Ce qui précède montre que cette idée doit être, sinon abandonnée, tout au moins complétée. Il n'est malheureusement plus possible de discuter tout cela avec Umemura qui aurait été certainement très intéressé.

1.3. Remarques diverses

(a) Ce qui précède doit s'appliquer sans problème à un feuilletage de codimension quelconque, à condition de le supposer régulier, i.e. provenant d'un sous-fibré de rang constant de TX (ou T^*X) vérifiant la condition de Frobenius (la régularité permet de définir les jets tansverses). Si l'on a un feuilletage avec singularités, on peut toujours se restreindre à un ouvert où il est régulier et prendre ensuite la clôture de Zariski ; mais ses propriétés ne sont pas claires : en général on ne pourra pas utiliser sur X entier la construction d'Umemura.

(b) A quoi correspond la construction générale d'Umemura avec « $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ » ? (cf. son article « differential Galois theory of infinite dimension » [19]). Je n'ai pas regardé en détail mais cela doit être une variante de la situation « relative » suivante : on se donne un morphisme surjectif et lisse $u : Y \to X$, un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X et un relevé $\mathcal{G}$ à Y de même dimension (donné, dans ma terminologie par une $\mathcal{F}$-connexion plate). On s'intéresse alors à l'holonomie des fibres de u. C'est par exemple ce qu'on fait dans le cas linéaire. En prenant l'image inverse de $\mathcal{F}$ sur Y, on trouve un cas particulier de la situation relative plus générale suivante : on a deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur Y, avec $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, et on s'intéresse à l'holonomie des transversales à $\mathcal{G}$ *dans les feuilles de* $\mathcal{F}$.

Je me suis convaincu depuis longtemps qu'on peut faire ici une théorie analogue à la théorie usuelle ; l'objet de base est formé des jets inversibles d'une feuille de $\mathcal{F}$ dans une autre ; autrement dit les jets inversibles dans la variété de Jouanolou [7] (i.e. la réunion disjointe des feuilles). Cette variété n'est définie qu'analytiquement, mais les jets gardent un sens algébrique.

Toutefois, faute d'applications, je n'ai rien écrit sur le sujet. Un cas particulier intéressant est celui où $\mathcal{F}$ est trivial, i.e. déterminé par ses intégrales premières ; $\mathcal{G}$ apparaît alors comme un feuilletage dépendant de paramètres. Cette situation a été étudiée par Casale et Davy qui obtiennent des résultats de semi-continuité et une application à la théorie de Galois des équations de Painlevé (article à paraitre aux Ann. Inst. Fourier [3]).

(c) Soit u une application régulière de X dans X, de jacobien non identiquement nul. On peut alors, avec Casale et Roques[(e)] [5] considérer le plus petit germe de pseudogroupe qui admette u comme solution. Tout ce qui précède s'applique sans changement (suivant Umemura, on remplace le morphisme de Taylor par l'ensemble des itérés de u[(f)] [13, 14]), à ceci près : l'idéal différentiel du « presque pseudogroupe » obtenu sera seulement réduit, et en général ne sera pas premier.

Voici un exemple évident : prendre $X = \mathbb{C}$ et u l'application $x \mapsto -x$.

L'idéal est engendré par ses termes d'ordre 0 ; et, dans $J_0^*(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$, l'idéal est engendré par $x^2 - y^2$.

Revenant au cas général, d'après Ritt [18], l'idéal sera une intersection finie d'idéaux différentiels premiers, dont l'un (au moins ?) contiendra l'identité comme solution.

Umemura et ses élèves ont aussi étudié cette situation. J'avoue n'avoir pas regardé en détail leur travail.

Bien à toi,

B. Malgrange

(e) Cf. aussi A. Granier [6].

(f) [N.D.A.] Si l'on prend seulement u rationnel, et vérifiant la condition du Jacobien, on pourra faire la théorie « germique ». Mais en général, l'argument d'Umemura ne s'applique plus sur X et l'intérêt de la clôture de Zariski semble limité.

P.S. (26/10/21). Dans leur article [3], Casale et Davy obtiennent pratiquement la même description que moi de la théorie de Galois différentielle d'un champ de vecteurs (en fait, leur situation est plus générale, car ils considèrent une famille dépendant d'un paramètre). Ce fait m'avait échappé lorsque j'ai écrit ma lettre le 1/09. La principale différence est dans la méthode : ils utilisent les résultats de Bonnet, et moi ceux d'Umemura.

2. Courriel de Bernard Malgrange à Guy Casale, 4/09/2020

Cher Guy,

Comment vas-tu ? Je me suis un peu remis à travailler ces derniers temps, en particulier pendant le confinement. J'ai regardé en particulier les relations entre solutions et pseudogroupe de Galois d'un feuilletage. J'ai repris ton article a Fourier [2] sur Morales–Ramis [12] et j'avoue que je ne comprend pas la démonstration du résultat principal. Voici une autre manière de faire (qui donne même plus). Elle consiste à reprendre l'argument d'Umemura dans sa note « sur l'équivalence des théories de Galois différentielles générales » [22] (mais en le corrigeant !).

Situation : X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$ et irréductible. Dans la suite, je la suppose affine (sinon, faire les calculs dans des cartes affines et recoller). Soit ξ un champ de vecteurs régulier sur X. Quitte à rétrécir X, on peut le supposer sans singularités, mais ce n'est pas important. Dans la suite, je considérerai uniquement ce que j'appelle dans « pseudogroupes de Lie et th. de Galois différentielle » [11] la représentation canonique des pseudogroupes de Lie (en gros, on prend un « bon » représentant sur un ouvert Zariski-dense de X, et on prend sa fermeture de Zariski sur X ; elle ne dépend pas du représentant).

Soit A l'anneau des fonctions régulières sur X, et soit K son corps des fractions. On considère dans $A[\![t]\!]$ l'anneau d'Umemura U engendré par A et $\exp(t\xi)A$; il est clair que c'est un quotient de $A \otimes A$ (je note $\otimes$ le produit tensoriel sur $\mathbb{C}$) par un certain idéal $\mathcal{I}$, qu'il s'agit de déterminer. Le résultat est le suivant :

Proposition 2.1. — *$\mathcal{I}$ est l'idéal qui définit la partie de degré zéro du pseudogroupe de Galois de ξ.*

(C'est la partie qui se définit avec les intégrales premières.)

On regarde d'abord la situation analogue avec A remplacé par K ; un lemme de Kolchin [8, 9] nous dit que K et $\exp(t\xi)K$ sont linéairement disjoints sur K^{ξ}, le corps des constantes de ξ dans K (la dérivation ici est d/dt ;

le lemme est démontré dans Umemura, lemme 1-1,dans un article dont ont je n'ai pas la référence sous les yeux [20]). Donc l'analogue V de U avec K au lieu de A est le produit tensoriel de K et K sur K^ξ. L'idéal correspondant dans $K \otimes K$ est engendré par les $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ avec f dans K^ξ ; si on écrit $f = g/h$, avec g et h sans facteur commun, c'est aussi l'idéal engendré par les $g \otimes h - h \otimes g$. Maintenant, ces éléments engendrent aussi un idéal $\mathcal{I}'$ dans $A \otimes A$, visiblement contenu dans $\mathcal{I}$. On voit facilement ceci : $\mathcal{I}$ est l'idéal $C^{-1}\mathcal{I}'$, où C est l'ensemble multiplicatif des éléments de $A \otimes A$ de la forme $a \otimes b$, a et b éléments non nuls de A.

Maintenant, $\mathcal{I}'$ est engendré par un nombre fini d'éléments de la forme précédente, disons f_i. Soit Z l'ensemble des zéros des h_i ; au dessus de $X - Z$, $\mathcal{I}'$ définit une relation d'équivalence ; quitte à agrandir Z on peut supposer que cette relation d'équivalence (notée R) est lisse, et que ses deux projections sont des submersions surjectives (cf le début de mon article : le groupoïde de Galois d'un feuilletage [10]). On aura fini si on démontre ceci : $\mathcal{I}$ est l'ensemble des éléments de $A \otimes A$ qui, en restriction à $(X - Z) \times (X - Z)$ appartiennent à l'idéal de R.

L'ensemble de ces éléments est visiblement dans $\mathcal{I}$; inversement, soit f dans $\mathcal{I}$, après restriction à $X - Z$, f s'annule sur R, sauf peut-être sur les zéros d'une fonction $g \otimes h$; mais le complémentaire des zéros de $g \otimes h$ est dense dans R (utiliser les propriétés de R). Donc f s'annule sur R au dessus de $X - Z$, et appartient donc à l'idéal voulu au dessus de $X - Z$ (nullstellensatz). Ceci termine la démonstration.

N.B. En fait Umemura, si je comprend bien, utilise directement le lemme de Kolchin pour U. Mais c'est incorrect, il ne s'applique pas ici, il faut passer par le corps des fractions. Il reste que, erreur ou pas l'idée de base est de lui.

(1) Maintenant, si l'on a un fibré principal sur X muni d'une ξ-connexion, cela revient à avoir un relèvement de ξ commutant à l'action du groupe. On peut alors appliquer ce qui précède ; ici, à cause de l'action du groupe, il suffira de se localiser dans X (et non dans l'espace total du fibré). En particulier, pour Galois différentiel non linéaire, on applique ça aux jets d'ordre k transverses et à la connexion d'holonomie au sens de mon article « pseudogroupes de Lie et théorie de Galois différentielle » [11].
(2) L'intérêt des considérations précédentes est qu'elles se comportent bien « fonctoriellement ». Par exemple, soit Y une sous variété lisse de X qui soit stable par ξ. Si l'on a un fibré sur X muni d'une ξ-connexion, par restriction on aura encore une ξ-connexion au dessus de Y, et l'algèbre d'Umemura de X s'enverra surjectivement

sur celle de Y, d'où une injection des groupoides de Galois correspondants. En particulier, si Y est une orbite algébrique de ξ (une « solution » au sens de Morales–Ramis–Simo [12]) la restriction de la connexion d'holonomie sur les k-jets transverses est l'équation variationelle d'ordre k, d'où une inclusion que je te laisse expliciter, et qui est plus ou moins le résultat de ton article.

On a encore un bon comportement dans des situations plus générales, du type suivant : on a des feuilletages sur des variétés X et Y et un morphisme de Y dans X, avec certaines conditions de compatibilité sur les feuilletages (il y en a plusieurs possibles, je n'ai pas envie de détailler ici). On peut alors obtenir des relations entre les pseudogroupes de Galois correspondants. Il y a visiblement tout un travail à faire.

Ce qui précède montre aussi l'importance du représentant canonique [11]. Il faudrait voir ce qu'on peut dire de ses singularités. Elles vont être stables par le feuilletage en un sens plus ou moins évident.

Je crois que ça suffit pour aujourd'hui. Avec toutes mes amitiés.

B. Malgrange

Bibliographie

[1] P. Bonnet, « Minimal invariant varieties and first integrals for algebraic foliations », *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **37** (2006), nº 1, p. 1-17.

[2] G. Casale, « Morales-Ramis Theorems *via* Malgrange pseudogroup », *Ann. Inst. Fourier* **59** (2009), nº 7, p. 2593-2610.

[3] G. Casale & D. Davy, « Spécialisation du groupoïde de Galois d'un champ de vecteurs », *Ann. Inst. Fourier* **72** (2022), nº 6, p. 2399-2447.

[4] G. Casale, D. V. Lucia & R. Jean-Pierre (éds.), *Volume à la mémoire de Hiroshi Umemura : "Équations de Painlevé et théories de Galois différentielles"*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., vol. 29, no. 5, 2020.

[5] G. Casale & J. Roques, « Dynamics of rational symplectic mappings and difference Galois theory », *Int. Math. Res. Not.* **2008** (2008), article no. rnn103 (23 pages).

[6] A. Granier, « A Galois D-groupoid for q-difference equations », *Ann. Inst. Fourier* **61** (2011), nº 4, p. 1493-1516.

[7] J.-P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, 1979.

[8] E. R. Kolchin, « Constrained extensions of differential fields », *Adv. Math.* **12** (1974), p. 141-170.

[9] ———, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 54, Academic Press Inc., 1976.

[10] B. Malgrange, « Le groupoïde de Galois d'un feuilletage », in *Essays on geometry and related topics*, Monographies de l'Enseignement Mathématique, vol. 38, L'Enseignement Mathématique, 2001, p. 465-501.

[11] ———, « Pseudogroupes de Lie et théorie de Galois différentielle », 2010, Prépublications de l'IHES/M/10/11.

[12] J. J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis & C. Simó, « Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **40** (2007), n° 6, p. 845-884.

[13] S. Morikawa, « On a general difference Galois theory. I », *Ann. Inst. Fourier* **59** (2009), n° 7, p. 2709-2732.

[14] S. Morikawa & H. Umemura, « On a general difference Galois theory. II », *Ann. Inst. Fourier* **59** (2009), n° 7, p. 2733-2771.

[15] K. Okamoto & Y. Ohyama, « Mathematical works of Hiroshi Umemura », in *Volume à la mémoire de Hiroshi Umemura : "Équations de Painlevé et théories de Galois différentielles"*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., vol. 29, no. 5, 2020, p. 1053-1062.

[16] G. Peter, « Construction de préschémas quotients », in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Tome 2. Exposes V à VIII*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer, 1972, exposé 5.

[17] J.-P. Ramis, « Hiroshi Umemura et les mathématiques françaises », in *Volume à la mémoire de Hiroshi Umemura : "Équations de Painlevé et théories de Galois différentielles"*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., vol. 29, no. 5, 2020, p. 1007-1052.

[18] J. F. Ritt, *Differential algebra*, Colloquium Publications, vol. 33, American Mathematical Society, 1950.

[19] H. Umemura, « Differential Galois theory of infinite dimension », *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 59-135.

[20] ———, « Galois theory of algebraic and differential equations », *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 1-58.

[21] ———, « Galois theory and Painlevé equations », in *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, Séminaires et Congrès, vol. 14, Société Mathématique de France, 2006, p. 299-339.

[22] ———, « Sur l'équivalence des théories de Galois différentielles générales », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), n° 21-22, p. 1155-1158.

[23] ———, « On the definition of the Galois groupoid », in *Équations différentielles et singularités. En l'honneur de J. M. Aroca*, Astérisque, vol. 323, Société Mathématique de France, 2009, p. 441-452.