ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRY BOURGET

Sur une formule de Lagrange et le théorème de Lambert

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 3, nº 1 (1901), p. 69-75
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_1_69_0>

SUR

UNE FORMULE DE LAGRANGE

ET

LE THÉORÈME DE LAMBERT,

PAR M. HENRY BOURGET,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire
et Maître de Conférences à l'Université de Toulouse.

1. La démonstration la plus simple du célèbre théorème de Lambert sur l'expression analytique du temps que met une planète à parcourir un arc de son orbite est, sans doute, celle que Gauss a développée dans l'Art. 106 du *Theoria motus*. Il nous semble pourtant que l'on peut désirer voir encore mieux l'origine de ce théorème. C'est peut-être ce désir qui a déterminé Jacobi à donner une place si importante à cette question dans ses *Vorlesungen über Dynamik :* Il y consacre, en effet, la vingt-cinquième Leçon tout entière et applique à la démonstration du théorème de Lambert sa belle méthode d'intégration des équations du mouvement d'un point matériel. Bien avant, Lagrange, dans un Mémoire intitulé : *Sur une manière particulière d'exprimer le temps, dans les sections coniques* (*Œuvres complètes,* t. IV), avait donné une démonstration très remarquable de ce théorème. Il semble que ce Mémoire soit trop peu connu, car Jacobi lui-même n'en fait pas mention, cependant la méthode de Lagrange a une grande portée et se prête à des applications nombreuses fort différentes de l'objet pour lequel son auteur l'avait imaginée et qui indiquent, mieux que tout commentaire, la vraie place analytique du théorème de Lambert.

Dans les pages qui suivent, nous nous proposons de donner une démonstration très simple, en la généralisant, de la formule qui sert de base à la démonstration de Lagrange et d'en déduire le théorème de Lambert. Bien qu'il n'y ait là rien d'essentiellement nouveau, nous pensons avoir simplifié l'analyse de Lagrange et en avoir montré toute l'importance.

2. La formule fondamentale de ce géomètre est la suivante :

Si l'on considère deux variables u et v liées par l'équation d'Euler

$$\frac{du}{\sqrt{R(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{R(v)}}$$

où

$$R(u) = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e,$$

on a la formule

$$\frac{(u^2+h)\,du}{\sqrt{R(u)}} - \frac{(v^2+h)\,dv}{\sqrt{R(v)}} = \frac{r\,dr}{\sqrt{G + 4br + ar^2}}$$

dans laquelle $r = u + v$ *et* h, G *désignent des constantes arbitraires.*

3. Voici une démonstration de cette formule qui s'applique au cas où le numérateur de la différentielle est

$$\varphi(u)\,du \qquad \text{au lieu de} \qquad (u^2+h)\,du,$$

φ étant une fonction rationnelle quelconque.

Rappelons d'abord qu'en posant

$$r = u + v \qquad \text{et} \qquad s = uv$$

l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler peut prendre les deux formes connues :

$$(a) \qquad \sqrt{R(u)} + \sqrt{R(v)} = (u - v)\sqrt{G + 4br + ar^2},$$

$$(b) \qquad A + Br + Cs = \sqrt{G + 4br + ar^2}.$$

On sait depuis longtemps, par M. Hermite, que

$$au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e$$

est le hessien d'un certain polynome du quatrième degré

$$Au^4 + 4Bu^3 + 6Cu^2 + 4Du + E,$$

ce qui donne un moyen commode d'exprimer les coefficients A, B, C en fonction des quantités a, b, c, d, e.

Cela étant, considérons la différentielle

$$\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{R(u)}} - \frac{\varphi(v)\,dv}{\sqrt{R(v)}};$$

en vertu de l'équation d'Euler, nous pouvons l'écrire

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{\sqrt{R(u)}}\,du,$$

mais $\varphi(u)-\varphi(v)$ étant une fonction rationnelle qui change de signe quand on permute les variables u et v, on peut poser

$$\varphi(u)-\varphi(v)=(u-v)\,\psi(r, s),$$

ψ étant une fonction rationnelle déterminée de r et de s.

En conséquence, la différentielle devient

$$\frac{u-v}{\sqrt{R(u)}}\,\psi(r, s)\,du.$$

D'autre part, la forme (a) de l'intégrale de l'équation d'Euler nous montre que

$$\frac{dr}{du}=\frac{u-v}{\sqrt{R(u)}}\sqrt{G+4br+ar^2},$$

ce qui donne pour la différentielle

$$\frac{\psi(r, s)\,dr}{\sqrt{G+4br+ar^2}}.$$

Mais, comme la forme (b) de la même intégrale nous montre que $\psi(r, s)$ est une fonction rationnelle de r et de $\sqrt{G+4br+ar^2}$, nous pouvons finalement énoncer le théorème :

Si l'on considère deux variables u et v liées par l'équation d'Euler

$$\frac{du}{\sqrt{R(u)}}=\frac{dv}{\sqrt{R(v)}}$$

on a la formule

$$\frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{R(u)}}-\frac{\varphi(v)\,dv}{\sqrt{R(v)}}=\mathcal{F}(r, \sqrt{G+4br+ar^2})\,dr$$

dans laquelle φ et $\mathcal{F}$ désignent des fonctions rationnelles.

Si nous posons $\varphi(u)=a^2+h$, nous avons $\psi(r, s)=r$ et nous obtenons la formule même de Lagrange.

Observons qu'en disant, avec M. Raffy, que la différentielle

$$\frac{\chi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

admet une *transformation invariante* quand on a

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}(y)}} \qquad \text{et} \qquad \chi(x) = -\chi(y),$$

le théorème que nous venons d'énoncer est, aux notations près, identique à un théorème démontré par ce géomètre (*B. S. M.,* t. XII, p. 51).

4. Si, dans la formule de Lagrange, $\mathrm{R}(u)$ est donné, G et h sont des constantes arbitraires; mais si l'on regarde comme donné le polynome $\mathrm{G} + 4br + ar^2$, on doit envisager les quantités c, d, e, h comme des constantes arbitraires.

Il y a lieu de faire une observation analogue sur la formule générale.

Il résulte de là que cette formule se prête à deux catégories d'applications :

1° Elle permet d'exprimer une différence de deux différentielles elliptiques données qui ne diffèrent que par l'argument, ces arguments étant liés d'ailleurs par l'équation d'Euler, au moyen d'une différentielle circulaire.

On se rend compte, dès maintenant, que les théorèmes sur les arcs de courbes à différence rectifiable, quand ces arcs peuvent s'exprimer par des intégrales elliptiques, ont là leur origine commune; et, en fait, on démontre très régulièrement les théorèmes de Fagnano, Graves et Chasles sur les arcs de conique à différence rectifiable, en faisant usage de cette formule.

2° Elle permet d'exprimer une différentielle circulaire donnée comme différence de deux différentielles elliptiques ne différant que par leurs arguments qui sont liés par l'équation d'Euler.

C'est à cette seconde catégorie d'applications qu'appartient, comme nous le verrons, le théorème de Lambert.

5. On est conduit à un cas particulier intéressant de la formule de Lagrange, en posant

$$h = -k^2$$

et

$$au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e = (u-k)^2[l + 4b(u+k) + a(u+k)^2],$$

si l'on pose, en outre,

$$u + k = u', \qquad v + k = v',$$

on a

$$\frac{u'\,du'}{\sqrt{l + 4bu' + au'^2}} - \frac{v'\,dv'}{\sqrt{l + 4bv' + av'^2}} = \frac{r\,dr}{\sqrt{\mathrm{G} + 4br + ar^2}},$$

où l et k sont encore arbitraires.

6. Arrivons maintenant à la démonstration du théorème de Lambert.

Considérons une orbite elliptique que nous rapporterons à trois axes rectangulaires, ayant pour origine le foyer O où se trouve le soleil. L'axe des x sera le grand axe de l'orbite dirigé vers le sommet le plus voisin, l'axe des y sera la perpendiculaire élevée à l'axe des x dans le plan de l'orbite et enfin l'axe des z la normale au plan de l'orbite.

Désignons par a, p, e, r le demi grand axe, le paramètre, l'excentricité et le rayon vecteur de l'orbite ; par (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M de l'orbite et par (α, β, γ) les coordonnées d'un point quelconque O' de l'espace.

Posons enfin $O'M = \rho$ et $OO' = \delta$ et cherchons la relation qui existe entre r et ρ.

Nous avons

$$\begin{aligned} &r + ex = p,\\ &r^2 = x^2 + y^2,\\ &\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,\\ &\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + \gamma^2; \end{aligned}$$

nous tirons de là

$$\begin{aligned} &\rho^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta^2,\\ &x = \frac{p-r}{e},\\ &y = \frac{1}{e}\sqrt{-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2}. \end{aligned}$$

Éliminant x, y entre ces équations, nous obtenons la relation cherchée

$$\rho^2 - r^2 = -2\alpha\frac{p-r}{e} + \delta^2 - \frac{2\beta}{e}\sqrt{-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2}$$

qui peut s'écrire, en posant

$$r = u + v, \qquad \rho = u - v, \qquad s = uv,$$

$$-\frac{2\alpha p}{e} + \delta^2 + \frac{2\alpha}{e}r + 4s = \frac{2\beta}{e}\sqrt{-p^2 + 2pr - \frac{p}{a}r^2}$$

et l'on reconnaît la forme (b) de l'intégrale de l'équation d'Euler. Donc les variables u et v sont liées par l'équation d'Euler.

De plus, les points de rencontre de la conique et du cône isotrope ayant pour sommet le point O' correspondent à $\rho = 0$, c'est-à-dire à $u = v$, et par suite à $r = 2u$ et aux racines du polynome $R(u)$ ou $R\left(\frac{r}{2}\right)$. Il s'ensuit qu'en prenant le point O' sur la conique elle-même, ce polynome admettra comme racine double la quantité $\frac{\delta}{2}$ et aura, par conséquent, la forme

$$\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2\left[\lambda+4\mu\left(x+\frac{\delta}{2}\right)+\nu\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right]^2.$$

Nous sommes donc en présence du cas particulier examiné au n° 5, avec $k=\frac{\delta}{2}$.

Rappelons maintenant que l'élément différentiel du temps dans l'orbite est donné par la formule

$$k\,dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{-p+2r-\frac{1}{a}r^2}},$$

k désignant ici la constante de Gauss.

Nous avons donc

$$4\mu=2,\qquad \nu=-\frac{1}{a}$$

et la formule du n° 5 nous donne en y faisant, de plus, $\lambda=0$,

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{-p+2r-\frac{1}{a}r^2}}=\frac{u'\,du'}{\sqrt{2u'-\frac{u'^2}{a}}}-\frac{v'\,dv'}{\sqrt{2v'-\frac{v'^2}{a}}}$$

où

$$u'=\frac{r+\rho+\delta}{2},$$

$$v'=\frac{r-\rho+\delta}{2}.$$

Si, maintenant, nous faisons varier r depuis $r'=\delta$ à r'', ρ varie de 0 à $\varkappa$, $\varkappa$ désignant la corde comprise entre les rayons vecteurs r' et r''. Dans ces conditions u' varie de r' à $\frac{r'+r''+\varkappa}{2}$ et v' de r' à $\frac{r'+r''-\varkappa}{2}$ et nous obtenons, en intégrant la formule précédente dans ces limites, le résultat

$$\int_{r'}^{r''}\frac{r\,dr}{\sqrt{-p+2r-\frac{1}{a}r^2}}=\int_{\frac{r'+r''-\varkappa}{2}}^{\frac{r'+r''+\varkappa}{2}}\frac{z\,dz}{\sqrt{2z-\frac{z^2}{a}}}$$

qui peut s'énoncer en disant que le temps employé par la planète pour parcourir l'arc d'orbite compris entre les rayons vecteurs r', r'' est égal au temps mis par une planète fictive pour aller, sur une orbite infiniment aplatie de même grand axe, du point $\frac{r'+r''-\varkappa}{2}$ au point $\frac{r'+r''+\varkappa}{2}$. Ce résultat montre donc que le temps, en question, est indépendant de l'excentricité et ne dépend que de a, $r'+r''$ et $\varkappa$. Si l'on veut obtenir la forme même du théorème de Lambert, utilisée en Astronomie, il suffit d'effectuer la quadrature du second membre de la dernière formule.

L'intégrale indéfinie est

$$a^{\frac{3}{2}}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{z}{a}\right)-\sin\operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{z}{a}\right)\right].$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}= {} & \operatorname{arc\,cos}\frac{2a-(r'+r'')-\varkappa}{2a}-\sin\operatorname{arc\,cos}\frac{2a-(r'+r'')-\varkappa}{2a}\\ & -\operatorname{arc\,cos}\frac{2a-(r'+r'')+\varkappa}{2a}+\sin\operatorname{arc\,cos}\frac{2a-(r'+r'')+\varkappa}{2a},\end{aligned}$$

ce qui est la forme habituelle du théorème de Lambert.