

AST

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse

MATHÉMATIQUES

JACQUES SAULOY

Classification analytique locale des équations aux q -différences de pentes arbitraires

Tome XXXIII, n° 3 (2024), p. 647–679.

<https://doi.org/10.5802/afst.1784>

© les auteurs, 2024.

Les articles des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* sont mis à disposition sous la licence Creative Commons Attribution (CC-BY) 4.0
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Publication membre du centre
Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
<http://www.centre-mersenne.org/>
e-ISSN : 2258-7519

Classification analytique locale des équations aux q -différences de pentes arbitraires ^(*)

JACQUES SAULOY

À mon « cousin mathématique » Felipe Cano, pour sa jubilacion

RÉSUMÉ. — La classification analytique locale des équations aux q -différences linéaires analytiques complexes a été obtenue par Ramis, Sauloy et Zhang sous l'hypothèse que les pentes du polygone de Newton sont entières. Nous prouvons ici l'un de ces résultats (q -analogue du théorème de Birkhoff–Malgrange–Sibuya) en relâchant cette hypothèse.

ABSTRACT. — The local analytic classification for complex linear analytic q -difference equations has been obtained by Ramis, Sauloy and Zhang under the assumption that the slopes of the Newton polygon are integral. In this work, we prove one of those results (q -analogue of the theorem of Birkhoff–Malgrange–Sibuya) while relaxing that assumption.

1. Introduction

1.1. La théorie analytique locale des équations aux q -différences

Nous considérons ici des équations aux q -différences *linéaires analytiques complexes* écrites sous forme matricielle-vectorielle :

$$X(qz) = A(z)X(z). \tag{1.1}$$

Le complexe $q \in \mathbf{C}^*$ est fixé une fois pour toutes et tel que⁽¹⁾ $|q| > 1$. Notant $\mathbf{C}(\{z\})$ le corps des germes méromorphes en 0, on suppose de plus que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$. (Voir la section 1.4 pour les conventions et notations générales dans cet article.)

^(*) Reçu le 20 juillet 2022, accepté le 9 janvier 2023.

⁽¹⁾ jacquessauly@gmail.com — <http://www.cantoperdic.fr>

Article proposé par Lucia Di Vizio.

⁽¹⁾ La théorie pour le cas où $0 < |q| < 1$ est essentiellement la même, mais le cas où $|q| = 1$ présente de tout autres difficultés (« petits diviseurs »), voir [5, 6].

Remarque 1.1. — Les équations aux q -différences du q -calcul « classique » s'écrivent le plus souvent sous forme *scalaire* $f(q^n z) + a_1(z)f(q^{n-1}z) + \dots + a_n(z)f(z) = 0$, où l'on peut supposer $a_n \neq 0$. L'équivalence avec la forme matricielle ci-dessus est due à Birkhoff [2]; pour une preuve moderne du *lemme du vecteur cyclique* correspondant, voir [19] (dans l'esprit de Birkhoff) ou [4] (dans l'esprit de Deligne et Katz).

Comme pour les équations différentielles depuis Riemann, la motivation de départ concerne des systèmes *rationnels* $X(qz) = A(z)X(z)$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}(z))$; mais l'étude globale de ces derniers sur la sphère de Riemann $\mathbf{S} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ commence par l'étude locale, analytique ou formelle. Or, les seuls points fixes de \mathbf{S} par la q -dilatation $z \mapsto qz$ sont 0 et ∞ , et l'étude en ∞ se ramène facilement à celle en 0 par le changement de variable $w = 1/z$. En ce qui concerne les « singularités intermédiaires », c'est-à-dire les points de $\mathbf{C}^* = \mathbf{S} \setminus \{0, \infty\}$ où $A(z)$ cesse d'être définie et inversible, nous ne disposons pas encore d'une approche cohérente pour les étudier localement; voir par exemple des tentatives en ce sens dans [11, 17, 18].

La théorie analytique locale⁽²⁾ (en 0) telle qu'elle s'est développée au troisième millénaire, largement sous l'influence de Jean-Pierre Ramis, comporte les volets suivants :

- (1) Classification : voir [15], ainsi que la thèse de Anton Eloy à l'Université Paul Sabatier ;
- (2) Théorie de Galois : voir [3, 13, 14, 20] ainsi que divers articles de Yves André, Anne Duval, Lucia Di Vizio et Julien Roques ;
- (3) Théorie asymptotique : voir [15, 16] ;
- (4) Somme de solutions divergentes : voir [7, 16], ainsi que l'article [8] de Thomas Dreyfus et Anton Eloy.

On n'abordera dans cet article que le premier volet. Celui-ci repose sur la découverte d'un q -analogue du phénomène de Stokes. Parmi les divers avatars de ce q -analogue, nous nous appuyerons sur celui décrit dans [21] et utilisé dans [14, 15].

Notons cependant qu'une extension de [14] aux pentes arbitraires est présentée dans [23]. On n'y aborde pas le problème inverse; j'espère, avec de l'aide, combler cette lacune prochainement et en faire l'objet d'une monographie.

⁽²⁾ La théorie analytique *globale*, initiée par Birkhoff dans [2] (mais pour le cas fuchsien seulement) tourne autour de deux thèmes : groupe de Galois et correspondance de Riemann–Hilbert; voir par exemple [9, 11, 13, 17, 20].

1.2. L'hypothèse antérieure des pentes entières

À toute équation (1.1) est attaché un invariant formel, son *polygone de Newton*, consistant essentiellement en la donnée de pentes $\mu_1 < \dots < \mu_k$, qui sont des rationnels; affectées de multiplicités r_1, \dots, r_k , qui sont des entiers naturels non nuls tels que $r_1\mu_1, \dots, r_k\mu_k \in \mathbf{Z}$ et $r_1 + \dots + r_k = n$. Les résultats les plus forts de la théorie analytique locale, en particulier ceux de [14, 15], ont été obtenus sous l'hypothèse « technique » que les pentes sont entières : $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbf{Z}$. Cette hypothèse intervient principalement à travers le fait que l'on dispose alors

- de formes normales explicites (dites de Birkhoff–Guenther),
- et d'une description explicite du phénomène de Stokes.

Hors l'hypothèse d'intégrité des pentes, les seuls progrès notables⁽³⁾ ont été, à ma connaissance, les suivants :

- Marius van der Put et Marc Reversat ont obtenu dans [12] une classification *formelle* complète sans aucune condition.
- Virginie Bugeaud a obtenu dans [3], sous certaines hypothèses, une généralisation de la forme normale explicite de Birkhoff–Guenther et une description des opérateurs de Stokes.

Dans ce travail, tout en relâchant totalement l'hypothèse d'intégrité des pentes, nous généralisons l'un des principaux résultats de [15], le q -analogue du théorème de classification de Birkhoff–Malgrange–Sibuya⁽⁴⁾. Nous n'obtenons *pas*, en particulier, une généralisation de la description explicite des opérateurs de Stokes.

1.3. Contenu de cet article

Décrivons maintenant plus en détail le contenu de cet article. Les notations et conventions générales seront résumées à la section 1.4.

La section 2 est consacrée à quelques résultats de base sur la catégorie des équations aux q -différences (ou catégorie des modules aux q -différences) sur $\mathbf{C}(\{z\})$: propriétés abéliennes (section 2.1), polygone de Newton, filtration

⁽³⁾ Comme déjà dit, nous ne parlons pas ici du groupe de Galois : pour ce dernier, [12] règle la question dans le cas formel et [3] donne à cette description une forme calculatoire; voir également [23].

⁽⁴⁾ Ce théorème est traditionnellement appelé « de Malgrange–Sibuya », mais selon Bernard Malgrange il se trouve en substance dans l'œuvre de Birkhoff.

et graduation par les pentes (section 2.2) ; pour faciliter la compréhension, quelques exemples explicites sont proposés (section 2.2.4). Références pour ces prérequis : [14, 15, 21, 22]. On explique aussi brièvement comment cette structure fournit un cadre pour la classification (section 2.3.1) : essentiellement, une classe *formelle* est associée à un module *pur*, c'est-à-dire gradué par les pentes ; et les classes *analytiques* à l'intérieur de cette classe formelle sont associées à des modules filtrés par les pentes ayant pour gradué ce module pur. Des calculs explicites de formes normales et d'invariants (de type Stokes) sont possibles lorsque les pentes sont entières mais ne se généralisent pas. On introduit donc au 2.3.2 le formalisme de la ramification qui permettra l'extension de résultats antérieurs au cas de pentes arbitraires.

La section 3 concerne la classification analytique locale. À la section 3.1, nous rappelons les résultats obtenus dans [15, 21] dans le cas des pentes entières, en particulier un q -analogue du théorème de Birkhoff–Malgrange–Sibuya, qui met en bijection canonique l'espace des classes analytiques isoformelles avec le H^1 d'un certain faisceau de groupes (théorème 3.5). Nous complétons à la section 3.1.2 les exemples explicites précédents. Dans les deux travaux antérieurs cités, la description de la structure affine sur l'espace des classes souffrait de quelques ambiguïtés et imprécisions que nous nous attachons à rectifier à la section 3.2.2. Le reste de la section 3.2 (c'est-à-dire 3.2.1 et le 3.2.3) est consacré à la mise au point d'outils commodes pour le passage au cas général, en particulier, la notion de *famille trivialisante* qui se substituera à la sommation algébrique explicite quand cette dernière ne sera plus disponible.

Enfin, à la section 3.3, nous prouvons en toute généralité le principal résultat de ce travail, l'extension au cas de pentes arbitraires du théorème 3.5 : c'est le théorème 3.13.

1.4. Notations et conventions générales

Le complexe q ayant été fixé tel que $|q| > 1$, on notera σ_q l'opérateur aux q -différences défini par $(\sigma_q f)(z) := f(qz)$. Ainsi l'équation (1.1) se réécrit :

$$\sigma_q X = AX, \tag{1.2}$$

forme sous laquelle nous l'envisagerons désormais.

On notera de manière abrégée \mathcal{O} et K l'anneau et le corps d'intérêt : $\mathcal{O} := \mathbf{C}\{z\}$ (anneau des germes holomorphes en 0, ou, de façon équivalente, des séries entières) et $K := \mathbf{C}(\{z\}) = \mathcal{O}[1/z]$. Le complété $\widehat{K} := \mathbf{C}((z))$ interviendra également.

On considérera $\mathbf{E}_q := \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ parfois comme un groupe, parfois comme une surface de Riemann (tore complexe), parfois comme une courbe elliptique, et cela, sans changer de notation ; par souci de légèreté et parce que cela ne pose aucun problème. Soit $\pi : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{E}_q$ la projection canonique : c'est un morphisme de groupes et un revêtement non ramifié de degré infini. On notera \bar{a} l'image $\pi(a) \in \mathbf{E}_q$ de $a \in \mathbf{C}^*$; et $[a; q] := \pi^{-1}(\bar{a}) \subset \mathbf{C}^*$ la spirale logarithmique discrète $aq^{\mathbf{Z}}$.

Ramification.

Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on aura besoin de choisir⁽⁵⁾ une racine r^e de q , notée q_r , ces choix étant supposés cohérents : $q_{rs}^s = q_r$. Pour cela, nous décidons de choisir une fois pour toutes $\tau \in \mathbf{C}$ tel que $q = e^{2i\pi\tau}$, puis de poser, pour tout $x \in \mathbf{C}$, $q^x := e^{2i\pi\tau x}$. En particulier, nous noterons, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $q_r := q^{1/r} = e^{2i\pi\tau/r}$. Par ailleurs, nous noterons $\zeta_r := e^{2i\pi/r}$.

On choisit de même des extensions cycliques $K_r := \mathbf{C}(\{z_r\})$, $z_r^r = z$, avec la même convention $z_{rs}^s = z_r$; en vertu du théorème de Puiseux, cela revient à fixer une clôture algébrique $K_\infty := \bigcup_{r \in \mathbf{N}^*} \mathbf{C}(\{z^{1/r}\})$ de $K = \mathbf{C}(\{z\})$.

Pour tout $r \geq 2$, l'extension $K_r = K[z_r]$ de K est cyclique et son groupe de Galois $\text{Gal}(K_r/K)$ s'identifie au groupe $\mu_r := \{1, \zeta_r, \dots, \zeta_r^{r-1}\}$ des racines r^{es} de l'unité dans \mathbf{C} : si $j \in \mu_r$, posant $\sigma_j(f(z_r)) := f(jz_r)$, on voit que $j \mapsto \sigma_j$ est un isomorphisme de μ_r sur $\text{Gal}(K_r/K)$.

L'action de σ_q sur K s'étend naturellement à K_r en l'automorphisme $f(z_r) \mapsto f(q_r z_r)$, que l'on notera encore σ_q (on a donc une « extension de corps aux différences »). Un fait essentiel est que *l'action de σ_q sur K_r commute à celle de μ_r* .

Remerciements

Une partie de ce travail a été effectuée alors que j'étais membre de l'Institut Mathématique de Toulouse ; l'unique support en a été mon salaire de fonctionnaire. Cependant, je remercie mon ami et coauteur Julien Roques de m'avoir invité à en exposer une version préliminaire aux rencontres qu'il a organisées à Grenoble. D'un bout à l'autre j'ai été encouragé par l'intérêt de mon ami, mentor et coauteur Jean-Pierre Ramis, ainsi que de mon ami, « cousin mathématique » et coauteur Changgui Zhang.

⁽⁵⁾ Les conséquences de ces choix ne sont pour le moment absolument pas claires pour moi.

2. Structure générale de la catégorie des équations aux q -différences

2.1. La catégorie \mathcal{E}_q

Pour toute la section 2.1, voir [15, chap. 2]. Un modèle intrinsèque de l'équation (1.2) est le *module aux q -différences*, c'est-à-dire un couple (V, Φ) formé d'un K -espace vectoriel de dimension finie V et d'un automorphisme σ_q -linéaire Φ de V , autrement dit, un automorphisme du groupe additif V satisfaisant la forme multiplicative de la règle de Leibniz :

$$\forall a \in K, \quad \forall x \in V, \quad \Phi(ax) = \sigma_q(a)\Phi(x).$$

(Φ est donc en particulier \mathbf{C} -linéaire.) Un morphisme de (V, Φ) dans (V', Φ') est une application K -linéaire $F : V \rightarrow V'$ qui entrelace Φ et Φ' , i.e. $\Phi' \circ F = F \circ \Phi$. On définit ainsi⁽⁶⁾ une catégorie \mathcal{E}_q .

Notant $\mathcal{D}_{q,K} := K\langle \sigma, \sigma^{-1} \rangle$ l'anneau des polynômes de Öre non commutatifs caractérisés par la relation de commutation tordue :

$$\forall a \in K, \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \quad \sigma^k . a = \sigma_q^k(a) \sigma^k,$$

on voit immédiatement que tout module aux q -différences (V, Φ) définit une structure de $\mathcal{D}_{q,K}$ -module à gauche sur V par la règle :

$$\forall P := \sum a_k \sigma^k \in \mathcal{D}_{q,K}, \quad \forall x \in V, \quad P.x := \sum a_k \Phi^k(x).$$

On identifie ainsi \mathcal{E}_q à la catégorie des $\mathcal{D}_{q,K}$ -modules à gauche de longueur finie.

Soit \mathcal{B} une base de V . Alors $\Phi(\mathcal{B})$ est également une base, et il existe un unique $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $\mathcal{B} = \Phi(\mathcal{B})A$. On obtient ainsi un isomorphisme de modules aux q -différences $X \mapsto \mathcal{B}X$ de (K^n, Φ_A) dans (V, Φ) , où l'on a posé $\Phi_A(X) := A^{-1}\sigma_q X$. (Le choix d'utiliser la matrice inverse A^{-1} vient de ce que, dans ce modèle, les solutions X de l'équation (1.2) sont les points fixes de Φ_A .)

La sous-catégorie pleine de \mathcal{E}_q dont les objets sont les (K^n, Φ_A) est donc essentielle. On en complète la description en notant qu'un morphisme $F : (K^n, \Phi_A) \rightarrow (K^p, \Phi_B)$ est une matrice $F \in \mathrm{Mat}_{p,n}(K)$ telle que $(\sigma_q F)A = BF$.

⁽⁶⁾ Pour alléger l'écriture, et puisque l'on n'aborde ici que l'étude locale en 0, les catégories notées $\mathcal{E}_q^{(0)}$, etc, dans [15] seront ici notées \mathcal{E}_q , etc. De plus, à partir de la section 2.3.2, les conditions de restriction sur les pentes seront dénotées par des indices supérieurs : ainsi \mathcal{E}_q^1 désigne la sous-catégorie pleine de \mathcal{E}_q formée des objets à pentes entières (au lieu de $\mathcal{E}_{q,1}^{(0)}$ dans *loc. cit.*)

On retrouve ainsi le vocabulaire de la classification : si F est un isomorphisme, $n = p$, $F \in \mathrm{GL}_n(K)$ et, notant $F[A] := (\sigma_q F)AF^{-1}$ (*transformation de jauge*), on a $B = F[A]$; on dira également que A et B (ou les équations associées) sont *analytiquement équivalentes*. On étend cette notion au cas où $B = F[A]$ avec $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $F \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})$: on dit alors que A et B sont *formellement équivalentes*. (Il n'est pas utile d'élargir la catégorie \mathcal{E}_q en autorisant des objets formels $A \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K})$: on peut en effet prouver que toute telle matrice est formellement équivalente à une matrice à coefficients dans K .)

Le centre de $\mathcal{D}_{q,K}$ est \mathbf{C} et la catégorie des $\mathcal{D}_{q,K}$ -modules à gauche est donc abélienne \mathbf{C} -linéaire ; il en est donc de même de sa sous-catégorie pleine \mathcal{E}_q . La proposition suivante est démontrée dans [15, App. A, section A.3.3].

PROPOSITION 2.1. —

- (i) Si A est triangulaire par blocs : $A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, $A' \in \mathrm{GL}_{n'}(K)$, $A'' \in \mathrm{GL}_{n''}(K)$, $n' + n'' = n$, la suite exacte évidente $0 \rightarrow K^{n'} \rightarrow K^n \rightarrow K^{n''} \rightarrow 0$ définit en fait une suite exacte $0 \rightarrow (K^{n'}, \Phi_{A'}) \rightarrow (K^n, \Phi_A) \rightarrow (K^{n''}, \Phi_{A''}) \rightarrow 0$.
- (ii) Toute suite exacte dans \mathcal{E}_q est isomorphe à une suite exacte de cette forme.

2.2. Polygone de Newton, filtration par les pentes et gradué associé

Pour la section 2.2, voir [22] et [15, §2.2], où tous les résultats présentés ici sont justifiés en détail. Dorénavant, nous identifierons la catégorie \mathcal{E}_q à sa sous-catégorie pleine des (K^n, Φ_A) ; et même chaque objet $M := (K^n, \Phi_A)$ à la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ lorsque cela simplifiera les formulations. Si nécessaire, nous imposerons de plus des conditions supplémentaires à A , comme être holomorphe sur \mathbf{C}^* , voire être à coefficients dans $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$: ceci, du moment que la sous-catégorie pleine correspondante est essentielle (i.e. équivalente à \mathcal{E}_q).

2.2.1. Polygone de Newton

Le principal invariant formel attaché à l'équation (1.2) et au module aux q -différences $M = (K^n, \Phi_A)$ qui la code est son *polygone de Newton*, qui est défini comme suit (voir [15, 22]). On introduit d'abord le polygone de

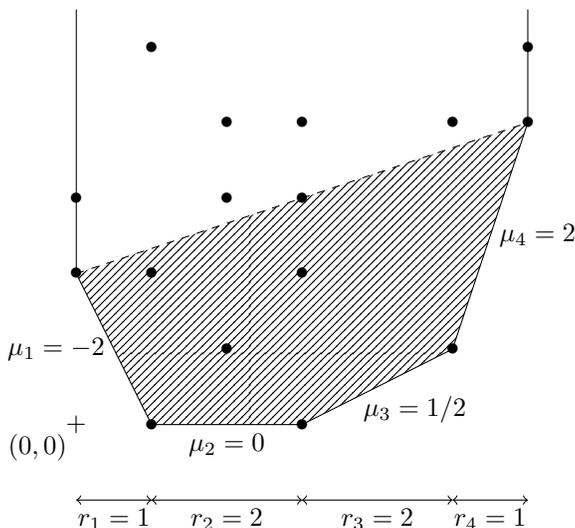


FIGURE 2.1. Le polygone de Newton

Newton d'un opérateur aux q -différences $P = \sum a_i \sigma_q^i$ comme l'enveloppe convexe de l'ensemble plan :

$$\{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 \mid j \geq v_0(a_i)\} = \{(i, v_0(a_i)) \mid i \in \mathbf{Z}\} + \{0\} \times \mathbf{N} \subset \mathbf{R}^2,$$

où $v_0(a)$ désigne l'ordre (ou valuation z -adique) d'une série de Laurent (convergente ou formelle) a . Par exemple la figure 2.1 représente le polygone de Newton de l'opérateur aux q -différences $P := a_0 + a_1 \sigma_q + a_2 \sigma_q^2 + a_3 \sigma_q^3 + a_4 \sigma_q^4 + a_5 \sigma_q^5 + a_6 \sigma_q^6$, où $a_0 := x^2 + x^3$, $a_1 := 1 + x^2 + x^5$, $a_2 := x + x^3 + x^4$, $a_3 := 1 + x^2 + x^3 + x^4$, $a_4 := 0$, $a_5 := x + x^4$ et $a_6 := x^4 + x^5$. (La partie hachurée de la figure sera commentée plus loin, voir après le théorème 2.8.)

En fait on considère que ce polygone de Newton $N(P)$ est défini à translation près par \mathbf{Z}^2 ; c'est donc également le polygone de Newton de n'importe quel multiple $(a\sigma_q^m)P$ ou $P(a\sigma_q^m)$ de P par un opérateur inversible $a\sigma_q^m$, $a \in K^*$, $m \in \mathbf{Z}$.

On prouve alors ([22], [15, lemma 2.1.1]) qu'un module aux q -différences $M = (K^n, \Phi_A)$ quelconque est isomorphe, en tant que $\mathcal{D}_{q,K}$ -module, à un module de la forme $\mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}P$; et que $N(P)$ ne dépend que de la classe d'isomorphie formelle de M (i.e. à la classe d'équivalence de jauge formelle de A) : c'est par définition $N(M)$.

La frontière de $N(M)$ est formée de deux demi-droites verticales et, de gauche à droite, de k vecteurs (r_i, d_i) , où (par convention) $r_i \in \mathbf{N}^*$ et $d_i \in \mathbf{Z}$,

dont les *pentés* $\mu_i := d_i/r_i$ sont des rationnels croissants : $\mu_1 < \dots < \mu_k$; on considère r_i comme la *multiplicité* de la pente μ_i . Réciproquement, ces données codent une partie convexe Π de \mathbf{R}^2 telle que $\Pi + (\{0\} \times \mathbf{R}_+) = \Pi$, dont la frontière est formée de deux demi-droites verticale infinies vers le haut et des k vecteurs (r_i, d_i) (de gauche à droite) ; Π est totalement déterminé à translation près par ces données.

Pour exprimer les propriétés du polygone de Newton, notons M un module aux q -différences et $r_M : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{N}$ la *fonction de Newton* : elle a pour support $S(M) := \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ et vérifie $\forall i = 1, \dots, k, r_M(\mu_i) = r_i$. Alors :

- (1) Deux modules formellement isomorphes ont même fonction de Newton.
- (2) Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, $r_M = r_{M'} + r_{M''}$.
- (3) Si $M = M' \otimes M''$, on a $r_M(\mu) = \sum_{\mu'+\mu''=\mu} r_{M'}(\mu')r_{M''}(\mu'')$ pour tout $\mu \in \mathbf{Q}$.

(Cette dernière propriété ne sera pas utilisée dans le présent travail, elle figure ici par souci de complétude.) Nous dirons que M est *pur isocline* si son polygone de Newton ne comporte qu'une seule pente ; et qu'il est *pur* s'il est somme directe de modules purs isoclines.

Ramification.

On reprend les notations introduites en section 1.4. Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et soit $z_r := z^{1/r}$. En posant $A'(z_r) := A(z_r^r)$, on définit une équation aux q_r différences $X'(q_r z_r) = A'(z_r)X'(z_r)$. On vérifie alors que, avec les notations vues ci-dessus pour A , le polygone de Newton de A' consiste en les pentes $r\mu_i$ avec les multiplicités (inchangées) r_i .

2.2.2. Filtration et graduation par les pentes

PROPOSITION 2.2. — *Tout module M de \mathcal{E}_q admet une unique tour de sous-modules :*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$$

telle que chaque quotient M_i/M_{i-1} , $1 \leq i \leq k$, soit pur isocline de pente μ_i et de rang $\dim_{\mathbf{C}} M_i = r_i$. (Les μ_i, r_i désignent les pentes de M , c'est-à-dire les pentes de $N(M)$, et leurs multiplicités.)

COROLLAIRE 2.3. — *Toute matrice de $\mathrm{GL}_n(K)$ est analytiquement équivalente à une matrice A triangulaire supérieure par blocs, dont les blocs diagonaux $B_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(K)$, $i = 1, \dots, k$, sont purs isoclines de pentes les μ_i .*

Autrement dit :

$$A = A_U := \begin{pmatrix} B_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & U_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K), \quad (2.1)$$

PROPOSITION 2.4. — *En associant à tout module aux q -différences M la tour décrite à la proposition 2.2, on définit une filtration $(M^{\geq \mu})_{\mu \in \mathbf{Q}}$ dont les sauts ont lieu aux valeurs $\mu = \mu_i$. Le gradué associé est $\mathrm{gr} M := \bigoplus M_i/M_{i-1}$.*

Les propriétés fonctorielles et abéliennes [et tensorielles, voir le point 3 à la fin de 2.2.1] de la filtration sont résumées par celle-ci [22] :

PROPOSITION 2.5. — *Le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{gr} M$ de \mathcal{E}_q dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{E}_{q,p}$ des modules purs est exact et fidèle [et \otimes -compatible].*

Soient A de la forme (2.1) décrite ci-dessus et M le module correspondant. La matrice diagonale par blocs A_0 obtenue en remplaçant les $U_{i,j}$ par 0 correspond au gradué $\mathrm{gr} M$:

$$\mathrm{gr}(K^n, \Phi_A) = (K^n, \Phi_{A_0}),$$

$$\text{où } A_0 := \begin{pmatrix} B_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K). \quad (2.2)$$

Par convention, dans ces écritures, on a $\mu_1 < \dots < \mu_k$ et chaque bloc diagonal $B_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(K)$ est pur isocline de pente μ_i ; on démontre de plus que les blocs rectangulaires $U_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{r_i, r_j}(K)$, $1 \leq i < j \leq k$, peuvent être pris à coefficients dans $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$. (À l'aide des résultats de [12], on vérifie en fait que les B_i peuvent eux-mêmes être pris à coefficients dans $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$: les objets répondant à cette description forment une sous-catégorie essentielle de \mathcal{E}_q .)

2.2.3. Catégorie formelle

Dans la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}_q$ obtenue en remplaçant K par \widehat{K} , la filtration ci-dessus a encore lieu.

PROPOSITION 2.6. —

- (i) Dans la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}_q$, la filtration par les pentes est canoniquement scindée, i.e. le foncteur gr correspondant est isomorphe au foncteur identité.
- (ii) Deux modules (analytiques) sont formellement isomorphes si, et seulement si, leurs gradués sont isomorphes (formellement ou analytiquement, cela revient au même).

On peut donc identifier $\widehat{\mathcal{E}}_q$ à la catégorie $\mathcal{E}_{q,p}$ des modules purs (qui a été introduite par la proposition 2.5 de 2.2.2) et la classification formelle se ramène donc à la classification des modules purs (ce point sera détaillé à la section 2.3.1).

Pour formuler l'énoncé matriciel correspondant, nous introduisons le sous-groupe algébrique \mathfrak{G}_{A_0} de GL_n formé des matrices triangulaires par blocs et ayant pour blocs diagonaux les matrices identités I_{r_1}, \dots, I_{r_k} , i.e. défini par le format ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \star & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_{r_k} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

COROLLAIRE 2.7. —

- (i) On conserve les notations A, A_0 ci-dessus. Il existe un unique $\widehat{F} \in \mathfrak{G}_{A_0}(\widehat{K})$ tel que $\widehat{F}[A_0] = A$.
- (ii) Si $\widehat{F} \in \mathfrak{G}_{A_0}(\widehat{K})$ est tel que $\widehat{F}[A] = A$, alors $\widehat{F} = I_n$.

2.2.4. Quelques calculs explicites

Deux pentes, degré Gevrey $\delta = 1$.

On fixe $a \in \mathbf{C}^*$. Pour tout $u \in \mathbf{C}(\{z\})$, soit $A_u := \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & az \end{pmatrix}$ et pour tout $f \in \mathbf{C}((z))$ soit $F_f := \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. À quelle condition a-t-on $F_f[A_{u_0}] = A_u$? On vérifie que cela équivaut à l'équation aux q -différences $az\sigma_q f - f = u - u_0$. C'est donc une condition qui implique $u - u_0$ plutôt que u et u_0 séparément et cela tient entièrement au fait qu'il n'y a que deux pentes (comparer au troisième exemple ci-après). On dit que c'est « le cas linéaire ». On peut donc

tout d'abord supposer que $u_0 = 0$; on écrit $u = \sum u_n z^n$ et $f = \sum f_n z^n$:

$$\begin{aligned} a z \sigma_q f - f = u &\iff \forall n, \quad a q^{n-1} f_{n-1} - f_n = u_n \iff \forall n, \\ a \widehat{f}_{n-1} - \widehat{f}_n = \widehat{u}_n &\iff (a\xi - 1)\widehat{f}(\xi) = \widehat{u}(\xi), \end{aligned}$$

où l'on a introduit les « transformées de q -Borel–Ramis (de niveau 1) » $\widehat{f}(\xi) := \sum \widehat{f}_n \xi^n$, $\widehat{u}(\xi) := \sum \widehat{u}_n \xi^n$, avec $\widehat{f}_n := q^{-n(n-1)/2} f_n$ et $\widehat{u}_n := q^{-n(n-1)/2} u_n$. Puisque $u \in \mathbf{C}(\{z\})$, $\widehat{u} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ et une condition nécessaire pour l'existence d'une solution convergente f est que $\widehat{u}(1/a) = 0$; on peut prouver que cette condition est suffisante.

On conclut donc de manière générale qu'il existe une unique $F_f \in \mathfrak{G}_{A_0}(\widehat{K})$ telle que $F_f[A_{u_0}] = A_u$, que f diverge (ses coefficients croissent essentiellement comme $|q|^{n^2/2}$) sauf si $\widehat{u}(1/a) = \widehat{u}_0(1/a)$. En particulier il y a un unique $u_0 \in \mathbf{C}$ qui permet cela.

Deux pentes, degré Gevrey δ arbitraire.

On fixe de plus $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{Z}$, $\mu_1 < \mu_2$, de sorte que $\delta := \mu_2 - \mu_1 \in \mathbf{N}^*$, et l'on prend maintenant $A_u := \begin{pmatrix} z^{\mu_1} & u \\ 0 & az^{\mu_2} \end{pmatrix}$. On vérifie que :

$$\begin{aligned} F_f[A_{u_0}] = A_u &\iff az^{\mu_2} \sigma_q f - z^{\mu_1} f = u - u_0 \iff az^\delta \sigma_q f - f = v, \\ &\text{où } v := z^{-\mu_1}(u - u_0). \end{aligned}$$

On est donc encore dans le cas linéaire (à deux pentes). Pour une résolution explicite, on pose $Z := z^\delta$, $Q := q^\delta$, $f(z) = \sum_{i=0}^{\delta-1} z^i F_i(z^\delta)$ et $v(z) = \sum_{i=0}^{\delta-1} z^i V_i(z^\delta)$; on voit alors que :

$$az^\delta \sigma_q f - f = v \iff \forall i \in \{0, \dots, \delta - 1\}, \quad a q^i Z F_i(QZ) - F_i(Z) = V_i(Z).$$

En invoquant l'exemple précédent, on conclut encore à l'existence pour tout $u \in \mathbf{C}(\{z\})$ d'un unique $u_0 \in z^{\mu_1}(\mathbf{C} \oplus \dots \oplus \mathbf{C}z^{\delta-1})$ tel que $F_f[A_{u_0}] = A_u$ soit réalisable avec f convergente (c'est un cas particulier de « forme normale de Birkhoff–Guenther », voir les équations (2.5) et (2.6) de la section 2.3.1).

Trois pentes.

Soient

$$A := \begin{pmatrix} a_1 z^{\mu_1} & u & v \\ 0 & a_2 z^{\mu_2} & w \\ 0 & 0 & a_3 z^{\mu_3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' := \begin{pmatrix} a_1 z^{\mu_1} & u' & v' \\ 0 & a_2 z^{\mu_2} & w' \\ 0 & 0 & a_3 z^{\mu_3} \end{pmatrix},$$

où $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}^*$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{Z}$, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, et $u, v, w, u', v', w' \in \mathbf{C}(\{z\})$. On cherche $F := \begin{pmatrix} 1 & f & g \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f, g, h \in \mathbf{C}((z))$, tel que $F[A] = A'$. Cela équivaut au système :

$$\begin{aligned} a_2 z^{\mu_2} \sigma_q f - a_1 z^{\mu_1} f &= u' - u, & a_3 z^{\mu_3} \sigma_q h - a_2 z^{\mu_2} h &= w' - w, \\ a_3 z^{\mu_3} \sigma_q g - a_1 z^{\mu_1} g &= v' - v + u' h - w \sigma_q f. \end{aligned}$$

Au niveau de la deuxième surdiagonale g , le problème n'est plus vraiment linéaire (alors qu'il l'est pour f et h). C'est pourquoi il apparaîtra des structures de groupes unipotents filtrés.

2.3. Conséquences immédiates pour la classification

Pour tout la section 2.3, voir [15, §3].

2.3.1. Cas des pentes entières

La classification formelle étant admise, il est naturel de chercher à déterminer le quotient d'une classe formelle par la relation d'équivalence analytique. Cependant, on constate que ce passage au quotient ne donne pas lieu à un espace « raisonnable » (voir la remarque à la fin de ce numéro). Inspirés par [1], nous avons donc dans [15] rigidifié les objets à classer en considérant les couples (M, u) formés d'un module M et d'un isomorphisme u de son formalisé avec un objet formel fixé (*classification analytique isoformelle*).

Vue l'identification de $\widehat{\mathcal{E}}_q$ à $\mathcal{E}_{q,p}$ décrite plus haut, cela revient à fixer un module pur M_0 et à définir l'ensemble $\mathcal{F}(M_0)$ quotient de l'ensemble des couples $(M, u : \text{gr } M \rightarrow M_0)$ (où u est un isomorphisme) par la relation : $(M, u) \simeq (M', u')$ s'il existe $f : M \rightarrow M'$ tel que $u = u' \circ \text{gr } f$ (un tel f est d'ailleurs automatiquement un isomorphisme). En termes des matrices A_0, A associées, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M_0) &= \mathcal{F}(A_0) \\ &:= \frac{\{A \in \text{GL}_n(K) \mid A \text{ est triangulaire supérieure par blocs et } \text{gr } A = A_0\}}{A \simeq B \text{ si, et seulement si } B = F[A], F \in \mathfrak{G}_{A_0}(K)}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.8 ([15]). — $\mathcal{F}(M_0)$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine de dimension $\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_j - \mu_i)$.

Notons que cette dimension (que l'on peut interpréter comme une *irrégularité*) est égale à l'aire de la partie hachurée sur la figure 2.1.

Dans le cas où les pentes sont entières, on peut munir $\mathcal{F}(M_0)$ de coordonnées explicites comme suit. Tout d'abord, tout module pur isocline de pente $\mu \in \mathbf{Z}$ peut être décrit par une matrice de la forme $z^\mu C$ où $C \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{C})$. La matrice A_0 associée à M_0 peut donc être choisie de blocs diagonaux $z^{\mu_i} A_i$, $A_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$:

$$A_0 := \begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k} A_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K). \quad (2.4)$$

Cette matrice étant fixée, toute matrice A triangulaire supérieure par blocs et telle que $\mathrm{gr} A = A_0$:

$$A = A_U := \begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & U_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k} A_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K), \quad (2.5)$$

est équivalente (par la relation ci-dessus) à une unique matrice de même format telle que de plus chaque bloc rectangulaire $U_{i,j}$ soit à coefficients dans l'espace :

$$K_{\mu_i, \mu_j} := \sum_{\mu_i \leq d < \mu_j} \mathbf{C} z^d \subset \mathbf{C}[z, z^{-1}]. \quad (2.6)$$

C'est la *forme normale de Birkhoff–Guenther*. (Elle a de plus l'avantage de posséder de bonnes propriétés tensorielles, utiles pour la théorie de Galois.) Les coefficients des polynômes de Laurent constituant les $U_{i,j}$ sont au nombre de $\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_j - \mu_i)$ et forment le système de coordonnées évoqué.

Remarque 2.9. — La relation d'équivalence analytique sur $\mathcal{F}(M_0)$ se déduit alors de l'action par conjugaison du groupe algébrique $\prod \mathrm{Aut}(A_i) \subset \prod \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$ sur cet espace affine. L'étude des quotients a été abordée dans la thèse déjà citée de Anton Eloy.

2.3.2. Pentas et ramification

Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Des propriétés du polygone de Newton indiquées à la section 2.2.1, on déduit que la sous-catégorie pleine \mathcal{E}_q^r de \mathcal{E}_q formée des objets dont toutes les pentes appartiennent à $\frac{1}{r}\mathbf{Z}$ est abélienne (et même stable par extensions), de même que $\mathcal{E}_{q,p}^r := \mathcal{E}_{q,p} \cap \mathcal{E}_q^r$. Les catégories \mathcal{E}_q^r forment un système inductif indexé par \mathbf{N}^* ordonné par la relation de divisibilité et

la limite inductive est \mathcal{E}_q ; de la même manière, la limite inductive des $\mathcal{E}_{q,p}^r$ est $\mathcal{E}_{q,p}$.

$$\mathcal{E}_q = \varinjlim \mathcal{E}_q^r, \quad \mathcal{E}_{q,p} = \varinjlim \mathcal{E}_{q,p}^r.$$

Le but de cet article est d'étendre aux catégories \mathcal{E}_q^r certains résultats obtenus dans [15] pour \mathcal{E}_q^1 . La méthode consiste à comparer \mathcal{E}_q^r à $\mathcal{E}_{q^r}^1$ par ramification.

Fixons r . On définit un foncteur de \mathcal{E}_q dans \mathcal{E}_{q^r} en termes matriciels : $A(z) \rightsquigarrow A'(z_r) := A(z_r^r)$ et $F(z) \rightsquigarrow F'(z_r) := F(z_r^r)$. On a vu en 2.2.1 que les pentes sont ainsi multipliées par r . On en déduit donc par restriction des foncteurs $\mathcal{E}_q^{rs} \rightsquigarrow \mathcal{E}_{q^r}^s$ et en particulier un foncteur de ramification :

$$\text{Ram}_r : \mathcal{E}_q^r \rightsquigarrow \mathcal{E}_{q^r}^1.$$

3. Classification analytique locale

Le problème posé ici est celui de la classification par des « invariants transcendants » selon les termes de Birkhoff dans l'article fondateur [2]. Pour les équations différentielles fuchsienues, l'objet classifiant est la représentation de monodromie, dont le rôle pour les équations aux q -différences est tenu, pour l'essentiel, par la matrice de connexion de Birkhoff [2, 11, 19]. Pour les équations différentielles irrégulières, les invariants locaux sont (outre la monodromie locale) les opérateurs de Stokes, le modèle est celui du théorème de Birkhoff–Malgrange–Sibuya.

Ce théorème a été transposé au cas des q -différences dans [15] sous l'hypothèse que les pentes sont entières : c'est le théorème 3.5 rappelé à la fin de la section 3.1.1. Il dit que l'espace $\mathcal{F}(A_0)$ des classes analytiques isoformelles s'identifie naturellement au H^1 du faisceau des automorphismes de A_0 tangents à l'identité. Comme son analogue classique, il traduit une propriété du phénomène de Stokes. La version q -analogue du phénomène de Stokes qui y intervient repose sur le théorème 3.1 rappelé ci-dessous.

Le principal résultat de cette section (et de cet article) est le théorème 3.13, qui étend au cas de pentes arbitraires le théorème 3.5. Signalons cependant que la section 3.2.2 complète et corrige des affirmations insuffisamment justifiées ou mal formulées de [14, 15] sur la structure affine de l'espace des classes $\mathcal{F}(A_0)$.

3.1. Résumé des résultats obtenus pour les pentes entières

3.1.1. Résultats antérieurs

Il s'agit de résultats démontrés (sous l'hypothèse de pentes entières) dans [22] et [15, §3 et §6]. Nous commençons par un résultat pour lequel nous ne serons pas capable d'énoncer une généralisation au cas de pentes arbitraires. Une classe formelle étant fixée par la donnée de la matrice pure A_0 , on définit un sous-ensemble fini $\Sigma_{A_0} \subset \mathbf{E}_q$ de « directions de sommation interdites » par des conditions⁽⁷⁾ de *résonance* :

$$\bar{c} \in \Sigma_{A_0} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists i, j, 1 \leq i < j \leq k : q^{\mathbf{Z}} c^{\mu_i} \text{Sp}(A_i) \cap q^{\mathbf{Z}} c^{\mu_j} \text{Sp}(A_j) \neq \emptyset,$$

où l'on note $\text{Sp } A_i$ le spectre de A_i . Autrement dit, $\bar{c} \in \mathbf{E}_q$ est une direction interdite s'il existe une valeur propre α de A_i et une valeur propre β de B_j , avec $i \neq j$, telles que $c^{\mu_i} \alpha \equiv c^{\mu_j} \beta \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$. En contraposant cette condition et en utilisant la notation additive dans \mathbf{E}_q , on voit encore que $\bar{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$ si, pour toutes valeurs propres α de A_i et β de A_j (avec $i \neq j$) :

$$(\mu_i - \mu_j)\bar{c} \neq \bar{\beta} - \bar{\alpha}.$$

Puisqu'en général, pour $m \in \mathbf{N}^*$, l'équation $m\bar{c} = \bar{\gamma}$ admet m^2 solutions $\bar{c} \in \mathbf{E}_q$, on voit que Σ_{A_0} est constitué d'au plus $\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_i - \mu_j)^2$ points distincts, ce majorant étant réalisé génériquement.

Le théorème suivant prend la forme platonique d'un énoncé d'existence, mais des calculs explicites de telles « sommations algébriques » seront décrits à la section 3.1.2.

THÉORÈME 3.1 (Somme algébrique, [21]). — *Quelle que soit la « direction de sommation autorisée » $\bar{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$, il existe une unique transformation de jauge $F_{\bar{c}} \in \mathfrak{G}_{A_0}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ (autrement dit méromorphe sur \mathbf{C}^* et de la forme qui définit \mathfrak{G}_{A_0} , voir l'équation (2.3)) telle que $F_{\bar{c}}[A_0] = A$, et dont les blocs rectangulaires $F_{i,j}$, vérifient :*

$$\forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad \text{div}_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)[\bar{c}]. \quad (3.1)$$

Expliquons cette dernière condition. La relation $F_{\bar{c}}[A_0] = A$ se réécrit $\sigma_q F_{\bar{c}} = A F_{\bar{c}} A_0^{-1}$, ce qui entraîne que les pôles des coefficients de $F_{\bar{c}}$ forment des q -spirales, donc des images réciproques par $\pi : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{E}_q$ de points de \mathbf{E}_q . L'inégalité ci-dessus dit que tous ces pôles sont sur la q -spirale $\pi^{-1}(\bar{c}) = [-c; q]$ et que ceux des $r_i r_j$ coefficients de $F_{i,j}$ sont de multiplicité $\leq \mu_j - \mu_i$. La présence un peu désagréable de signes « $-$ » dans la définition de Σ_{A_0} est

(7) Par rapport à divers travaux antérieurs, on permute ici les rôles de c et de $-c$; c'est en effet le c choisi ici qui interviendra le plus fréquemment.

due au fait incurable suivant : la fonction theta qui vérifie $\sigma_q f = (z/a)f$ a ses zéros sur la spirale logarithmique discrète $[-a; q]$.

Mentionnons pour usage ultérieur deux lemmes.

LEMME 3.2. —

- (i) Les matrices $F \in \mathfrak{G}_{A_0}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ dont les blocs rectangulaires $F_{i,j}$, vérifient les conditions de polarité (3.1) forment un groupe, que nous noterons $\mathfrak{G}_{A_0}[\bar{c}]$.
- (ii) Soient A_U et A_V de gradué A_0 et notons F_U, F_V les isomorphismes méromorphes obtenus par sommation algébrique dans la direction autorisée \bar{c} . Alors $F_{U,V} := F_V F_U^{-1}$ est l'unique isomorphisme méromorphe $A_U \rightarrow A_V$ appartenant à $\mathfrak{G}_{A_0}[\bar{c}]$.

Démonstration. —

(i). — Cela peut se déduire de la preuve de [21, corollary 3.8, p. 243], mais voici un argument par calcul direct. Si $F, G \in \mathfrak{G}_{A_0}[\bar{c}]$ et si $H := FG$, on sait *a priori* que H a la forme triangulaire supérieure qui définit le groupe algébrique \mathfrak{G}_{A_0} (c'est-à-dire l'équation (2.3)). Les égalités de blocs (multiplication par blocs de matrices unipotentes) $H_{i,j} = \sum_{k=i}^j F_{i,k} G_{k,j}$ entraînent alors immédiatement que les pôles de $H_{i,j}$ sont sur $[-c; q]$ et de multiplicité majorée par $\max(\mu_j - \mu_k + \mu_k - \mu_i) = \mu_j - \mu_i$. En ce qui concerne l'inverse, écrivant $F = I_n - N \Rightarrow F^{-1} = I_n + N + N^2 \dots$ (somme finie), on voit que les blocs surdiagonaux de F^{-1} sont des combinaisons de produits de la forme $F_{i,i_1} \dots F_{i_1,j}$ avec $i \leq i_1 < \dots < i_l \leq j$ et l'on conclut de même.

(ii). — D'une part $F_{U,V} \in \mathfrak{G}_{A_0}[\bar{c}]$ (d'après (i)) et c'est bien un isomorphisme méromorphe $A_U \rightarrow A_V$; d'autre part, pour tout tel isomorphisme méromorphe G , toujours d'après (i), GF_U satisfait les propriétés qui, selon le théorème, caractérisent uniquement F_V . \square

Le cas particulier suivant est important dans les questions de « filtration q -Gevrey ».

LEMME 3.3. — *Supposons, avec les notations du lemme précédent, que $U_{i,j} = V_{i,j}$ aux niveaux $\mu_j - \mu_i < \delta$ (cette relation sera notée plus loin $A_U \equiv_{\delta} A_V$, cf. équation (3.7) de la section 3.2.2). Alors :*

- (i) Les blocs de niveaux $\mu_j - \mu_i < \delta$ de F_U et F_V coïncident (c'est encore la relation $F_U \equiv_{\delta} F_V$).
- (ii) Les blocs de niveaux $\mu_j - \mu_i < \delta$ de $F_{U,V}$ sont nuls et ses blocs $F_{i,j}$ de niveau $\mu_j - \mu_i = \delta$ sont déterminés par les équations :

$$(\sigma_q F_{i,j})(z^{\mu_j} A_j) - (z^{\mu_i} A_i) F_{i,j} = V_{i,j} - U_{i,j},$$

avec la condition $\text{div}_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)[\bar{c}]$.

Démonstration. —

(i). — Soit $\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}$ le sous-groupe distingué de \mathfrak{G}_{A_0} formé des éléments dont les blocs de niveaux $\mu_j - \mu_i < \delta$ de $F_{U,V}$ sont nuls (ce sous-groupe sera étudié de plus près en 3.2.2). On vérifie facilement par calcul⁽⁸⁾ que, pour deux matrices quelconques $F, G \in \mathfrak{G}_{A_0}$, on a $F \equiv_{\delta} G \Leftrightarrow FG^{-1} \in \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}$ (congruence modulo $\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}$). Il en découle, en vertu du lemme 3.2(ii), que $F_U \equiv_{\delta} F_V \Leftrightarrow F_{U,V} \in \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}$. Il suffit donc de prouver (ii).

(ii). — La propriété $F_{U,V}[A_U] = A_V$ se traduit par le système d'équations en les blocs $F_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad U_{i,j} + \sum_{i < l < j} (\sigma_q F_{i,l}) U_{l,j} + (\sigma_q F_{i,j})(z^{\mu_j} A_j) \\ = (z^{\mu_i} A_i) F_{i,j} + \sum_{i < l < j} V_{i,l} F_{l,j} + V_{i,j}. \end{aligned}$$

Pour $\mu_j - \mu_i < \delta$, on a $U_{i,j} = V_{i,j}$ et on voit immédiatement que les solutions $F_{i,j} = 0$ conviennent : par unicité, ce sont donc les seules. Les équations au niveau $\mu_j - \mu_i = \delta$ prennent alors bien la forme indiquée dans le lemme. \square

Rappelons (cf. section 2.2) qu'il existe une unique transformation de jauge formelle $\widehat{F} \in \mathfrak{G}_{A_0}(\widehat{K})$ telle que $\widehat{F}[A_0] = A$; elle est en général divergente et l'on considère $F_{\bar{c}}$ comme « somme de \widehat{F} dans la direction \bar{c} » (au sens de la sommation des séries divergentes).

COROLLAIRE 3.4. — *Soient $\bar{c}, \bar{d} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$. Alors $F_{\bar{c}, \bar{d}} := F_{\bar{c}}^{-1} F_{\bar{d}}$ vérifie : $F_{\bar{c}, \bar{d}}[A_0] = A_0$; autrement dit, si l'on note $F_{i,j}$ les blocs rectangulaires de $F_{\bar{c}, \bar{d}}$, on a : $\sigma_q F_{i,j} = z^{-(\mu_j - \mu_i)} A_i F_{i,j} A_j^{-1}$. De plus, $\text{div}_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)([\bar{c}] + [\bar{d}])$, autrement dit, $F_{i,j}$ est méromorphe sur \mathbf{C}^* , tous ses pôles sont sur $[-c, -d; q] := [-c; q] \cup [-d; q]$ et leurs multiplicités sont inférieures ou égales à $\mu_j - \mu_i$.*

De la relation évidente $F_{\bar{c}, \bar{d}} F_{\bar{d}, \bar{e}} = F_{\bar{c}, \bar{e}}$, on déduit que les $F_{\bar{c}, \bar{d}}$ forment un cocycle pour un certain faisceau de groupes (non abéliens) $\Lambda_I(A_0)$ sur \mathbf{E}_q défini comme suit : les sections de $\Lambda_I(A_0)$ sur l'ouvert U de \mathbf{E}_q sont les $F \in \mathfrak{G}_{A_0}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U)))$ telles que $F[A_0] = A_0$. Ce cocycle est attaché au recouvrement \mathfrak{U}_{A_0} de \mathbf{E}_q formé des ouverts de Zariski $U_{\bar{c}} := \mathbf{E}_q \setminus \{-\bar{c}\}$, $\bar{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$. On traduit les relations $\text{div}_{\mathbf{E}_q}(F_{i,j}) \geq -(\mu_j - \mu_i)([\bar{c}] + [\bar{d}])$ en disant que c'est un cocycle *privilegié*. L'ensemble des cocycles privilégiés est

⁽⁸⁾ Mais c'est plus généralement lié aux propriétés de filtration des groupes de matrices nilpotentes telles que celles discutées dans [15, §6.2.2, p. 92].

noté $Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0))$. Le théorème suivant est un q -analogue du théorème de Birkhoff–Malgrange–Sibuya :

THÉORÈME 3.5 ([15]). — *Le cocycle $(F_{\bar{c}, \bar{d}})$ ne dépend que de la classe de A dans $\mathcal{F}(A_0)$. Les applications :*

$$\mathcal{F}(A_0) \rightarrow Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0)) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$$

ainsi définies sont bijectives.

Il s’agit bien entendu de cohomologie non abélienne [10] (mais, les groupes impliqués étant unipotents, la non-abélianité est modérée!) et les bijections ci-dessus sont en fait des isomorphismes d’ensembles pointés : la classe de (A_0, Id) dans $\mathcal{F}(A_0)$ correspond au cocycle trivial dans $Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0))$ et à la classe de cohomologie triviale dans $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$.

3.1.2. Encore quelques calculs explicites

Nous reprenons les notations des exemples de la section 2.2.4. Nous aurons besoin pour ces calculs de quelques rappels sur les fonctions theta de la théorie des équations aux q -différences.

Fonctions.

Nous noterons⁽⁹⁾ :

$$\theta_q(z) := \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{-m(m+1)/2} z^m.$$

C’est une fonction holomorphe sur \mathbf{C}^* , qui vérifie les équations fonctionnelles :

$$\theta_q(qz) = z\theta_q(z) = \theta_q(1/z)$$

et la *formule du triple produit de Jacobi* :

$$\theta_q(z) = (-q^{-1}; q^{-1})_\infty (-q^{-1}z; q^{-1})_\infty (-z^{-1}; q^{-1})_\infty,$$

où l’on définit les *symboles de Pochhammer* par les produits infinis :

$$(a; q^{-1})_\infty := \prod_{m \geq 0} (1 - q^{-m}a).$$

Il en découle en particulier que la fonction $\theta_{q,c}(z) := \theta_q(cz)$ est holomorphe sur \mathbf{C}^* , qu’elle vérifie $\sigma_q \theta_{q,c} = cz \theta_{q,c}$ et que ses zéros sont simples et constituent la q -spirale discrète $[-1/c; q]$.

⁽⁹⁾ Cette formule, ainsi que l’équation fonctionnelle $\theta_q(qz) = z\theta_q(z)$, sont directement liées au choix de l’hypothèse $|q| > 1$. Pour le cas de l’hypothèse symétrique $|q| < 1$, voir par exemple [11].

Deux pentes, degré Gevrey $\delta = 1$.

On reprend les notations du premier exemple. Pour résoudre l'équation $az\sigma_q f - f = u$, on s'inspire de la méthode de variation des constantes. Puisque l'équation homogène associée $az\sigma_q f - f = 0$ admet la solution $1/\theta_{q,a}$, où $\theta_{q,a}(z) := \theta_q(az)$, on cherche f sous la forme $g/\theta_{q,a}$ ce qui nous ramène à l'équation $\sigma_q g - g = v$, où $v := u\theta_{q,a} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*, 0)$ (germe holomorphe dans un voisinage époinché de 0 dans \mathbf{C}^*). Malheureusement les développements en série de g et v mènent aux relations $(q^n - 1)g_n = v_n$ pour lesquelles une obstruction $v_0 \neq 0$ est possible. (Le lecteur pourra vérifier qu'elle est directement liée au $\widehat{u}(1/a)$ du premier exemple de 2.2.4.) On a donc recours à une méthode de variation des constantes "tordue", où l'on cherche f sous la forme $g/\theta_{q,c}$ mais en se laissant le choix de $c \in \mathbf{C}^*$. On est successivement ramené à l'équation $(a/c)\sigma_q g - g = v$, où $v := u\theta_{q,c}$, et aux relations $(q^n a/c - 1)g_n = v_n$. Si c est choisi dans $\mathbf{C}^* \setminus [a; q]$, aucun des facteurs $q^n a/c - 1$ ne s'annule et l'on en déduit une unique solution $g \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*, 0)$ (la convergence de la série g est immédiate) puis une unique solution $f = g/\theta_{q,c}$ à pôles simples sur la spirale des zéros de $\theta_{q,c}$, i.e. sur $[-1/c; q]$. Le lecteur vérifiera la conformité de cette conclusion avec l'énoncé du théorème 3.1.

Deux pentes, degré Gevrey δ arbitraire.

On reprend les notations du deuxième exemple. Pour résoudre l'équation $az^\delta \sigma_q f - f = v$, on pose $f = g/\theta_{q,c}^\delta$, ce qui explique par avance l'apparition de pôles de multiplicité $\delta = \mu_2 - \mu_1$ sur la q -spirale $[-1/c; q]$. L'équation et les relations correspondantes sont ici $ac^{-\delta} \sigma_q g - g = v$, où $v := u\theta_{q,c}^\delta$, et $(ac^{-\delta} q^n - 1)g_n = v_n$, d'où la condition $c^\delta \notin [a; q]$ pour les « directions de sommation autorisées ».

Trois pentes.

On reprend les notations du troisième exemple. Au lieu de résoudre (en F) l'équation $(\sigma_q F)A = A'F$, on va poser $B := T[A]$ et $B' := T[A']$, où T est une matrice diagonale $\text{Diag}(T_1, T_2, T_3)$ destinée à faire disparaître les z^{μ_i} (on l'explique plus loin). On est donc ramené à une équation $(\sigma_q G)B = B'G$, où $G := TFT^{-1}$. Hors le fait que T n'est pas la matrice d'une transformation de jauge réglementaire, le calcul est formellement le suivant :

$$B' = T[A'] = TF[A] = TFT^{-1}[T[A]] = TFT^{-1}[B] = G[B].$$

En prenant par exemple $T_i := \theta_{q,c}^{-\mu_i}$, on voit que B et B' ont la forme $\begin{pmatrix} b_1 & \star & \star \\ 0 & b_2 & \star \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, où chaque $b_i := a_i c^{-\mu_i}$ et où les symboles \star désignent des éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{C}^*, 0)$. On choisit c pour que les b_i soient deux à deux non congrus modulo $q^{\mathbb{Z}}$. Par ailleurs, $G = \begin{pmatrix} 1 & f' & g' \\ 0 & 1 & h' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $f' = f\theta_q^{\mu_2 - \mu_1}$, $g' = g\theta_q^{\mu_3 - \mu_1}$, $h' = h\theta_q^{\mu_3 - \mu_2}$ s'obtiennent en résolvant les équations qui traduisent $(\sigma_q G)B = B'G$:

$$b_2\sigma_q f' - b_1 f' = \star, \quad b_3\sigma_q g' - b_1 g' = \star, \quad b_3\sigma_q h' - b_2 h' = \star.$$

Les conditions de non-congruence sur les b_i garantissent l'existence et l'unicité de solutions f', g', h' dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ (développements en séries) puis l'existence et l'unicité de solutions f, g, h satisfaisant des conditions de polarités (sur une q -spirale $[-1/c; q]$ donnée, avec multiplicités contrôlées par les pentes), qui sont précisément celles du théorème.

3.2. Compléments

3.2.1. Familles trivialisantes

Le cas général qui sera abordé à la section 3.3 se ramènera au cas des pentes entières par ramification. Pour garantir que les constructions sont indépendantes des choix arbitraires, nous aurons besoin d'une nouvelle notion et de deux lemmes.

DÉFINITION 3.6. — *Soit A de la forme (2.5) (donc triangulaire supérieure par blocs) dans \mathcal{E}_q et soit $A_0 := \text{gr } A$. On ne fait ici aucune hypothèse sur les pentes. Une famille trivialisante adaptée à A est la donnée :*

- d'un recouvrement $\mathfrak{U} := (U_\alpha)$ de \mathbf{E}_q par des ouverts de Zariski ;
- d'isomorphismes méromorphes $F_\alpha : A_0 \rightarrow A$, dans \mathfrak{S}_{A_0} , chaque F_α étant holomorphe sur U_α .

On voit alors que la famille des $F_{\alpha,\beta} := F_\alpha^{-1}F_\beta$ est un cocycle de $Z^1(\mathfrak{U}, \Lambda_I(A_0))$.

LEMME 3.7. — *Tous les cocycles provenant de familles trivialisantes adaptées ont même classe dans $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$.*

Démonstration. — Soient deux familles trivialisantes adaptées $((U_\alpha), (F_\alpha))$ et $((V_\beta), (G_\beta))$. Soit (W_γ) le recouvrement des $U_\alpha \cap V_\beta$, qui raffine à la fois (U_α) et (V_β) et soient F_γ, G_γ les restrictions correspondantes des F_α et des G_β . Posons $H_\gamma := G_\gamma^{-1}F_\gamma \in \Gamma(W_\gamma, \Lambda_I(A_0))$. Alors les

$F_{\gamma,\delta} := F_\gamma^{-1}F_\delta$ et les $G_{\gamma,\delta} := G_\gamma^{-1}G_\delta$ vérifient $F_{\gamma,\delta} = H_\gamma^{-1}G_{\gamma,\delta}H_\delta$, donc définissent la même classe. \square

On voit donc que la « sommation algébrique » n'est en somme qu'un moyen explicite de faire apparaître une famille trivialisante adaptée.

Soient maintenant A_0 et A'_0 de la forme (2.4) (donc diagonales par blocs de même taille) et $\Phi : A_0 \rightarrow A'_0$ un isomorphisme : A_0 et A'_0 ont donc même polygone de Newton. Alors la matrice Φ est diagonale par blocs, de blocs $\Phi_i \in \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$, $i = 1, \dots, k$. Si A est triangulaire supérieure par blocs de gradué $\mathrm{gr} A = A_0$, on vérifie immédiatement que $A' := \Phi[A]$ est triangulaire supérieure par blocs de gradué $\mathrm{gr} A' = A'_0$. De plus, si B est triangulaire supérieure par blocs de gradué $\mathrm{gr} B = A_0$, notant $B' := \Phi[B]$, toute équivalence $F : A \rightarrow B$ dans \mathfrak{S}_{A_0} donne lieu à une équivalence $\Phi F \Phi^{-1} : A' \rightarrow B'$ qui est dans $\mathfrak{S}_{A'_0} = \mathfrak{S}_{A_0}$. On définit ainsi une application bijective $\mathcal{F}(A_0) \rightarrow \mathcal{F}(A'_0)$.

Notant $A_0 = \mathrm{Diag}(z^{\mu_1}A_1, \dots, z^{\mu_k}A_k)$, on a $A'_0 = \mathrm{Diag}(z^{\mu_1}A'_1, \dots, z^{\mu_k}A'_k)$ où $A'_i := \Phi_i A_i \Phi_i^{-1}$ d'où l'on tire que $\Sigma_{A_0} = \Sigma_{A'_0}$ et aussi que $\mathfrak{U}_{A_0} = \mathfrak{U}_{A'_0}$. Un cocycle privilégié $(F_{\bar{c},\bar{d}}) \in Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0))$ donne lieu à un cocycle privilégié $(F'_{\bar{c},\bar{d}}) \in Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A'_0}, \Lambda_I(A'_0))$ par la formule $F'_{\bar{c},\bar{d}} := \Phi F_{\bar{c},\bar{d}} \Phi^{-1}$, et on obtient ainsi un isomorphisme de $Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0))$ sur $Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A'_0}, \Lambda_I(A'_0))$. De même, les $F_{\bar{c}}$ obtenus par sommation algébrique pour A (théorème 3.1) donnent lieu aux $F'_{\bar{c}}$ obtenus par sommation algébrique pour A' par la formule $F'_{\bar{c}} := \Phi F_{\bar{c}} \Phi^{-1}$. En résumé :

LEMME 3.8. — *Ces constructions donnent lieu à un diagramme commutatif, dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes d'ensembles pointés :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(A_0) & \longrightarrow & Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A_0}, \Lambda_I(A_0)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(A'_0) & \longrightarrow & Z_{pr}^1(\mathfrak{U}_{A'_0}, \Lambda_I(A'_0)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A'_0)) \end{array}$$

3.2.2. Structure affine sur $\mathcal{F}(A_0)$ et $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$

La structure affine de $\mathcal{F}(A_0) = \mathcal{F}(M_0)$ (théorème 2.8) a été décrite dans [15, §6]. Dans ce même travail, il est affirmé sans justification suffisante⁽¹⁰⁾ que les suites exactes de cohomologie (non abélienne) permettent de munir $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$ d'une structure affine telle que les bijections du

⁽¹⁰⁾ Le cœur de l'argument fourni est le suivant : si l'espace vectoriel de dimension finie V opère librement sur l'ensemble pointé X et si le quotient X' est muni d'une structure

théorème 3.5 soient des isomorphismes affines (cf. [15, cor. 6.2.2 p. 93]). Cette structure est précisée, encore sans justification suffisante, dans [14] (voir p. 188 après l'explicitation de la suite exacte en haut de la page). Nous complétons ici ces arguments en vue d'une généralisation à la section 3.3.

Divers groupes et algèbres de Lie.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{A_0} := \text{Lie}(\mathfrak{G}_{A_0})$ du groupe unipotent \mathfrak{G}_{A_0} décrit par l'équation (2.3) à la fin de la section 2.2.3 est définie par le format :

$$\begin{pmatrix} 0_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \star & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0_{r_k} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

C'est une algèbre de Lie nilpotente. Quelle que soit la \mathbf{C} -algèbre R , les applications $x \mapsto I_n + x$ et $x \mapsto \exp x$ réalisent des isomorphismes (au sens de la géométrie algébrique et différentielle) de $\mathfrak{g}_{A_0}(R)$ dans $\mathfrak{G}_{A_0}(R)$.

Nous allons munir \mathfrak{G}_{A_0} , resp. \mathfrak{g}_{A_0} , d'une filtration par des sous-groupes distingués, resp. par des idéaux⁽¹¹⁾. Pour tout $\delta > 0$, on pose :

$$\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta} := \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} I_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_{r_k} \end{array} \right) \middle| 0 < \mu_j - \mu_i < \delta \Rightarrow F_{i,j} = 0 \right\} \tag{3.3}$$

et :

$$\mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta} := \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0_{r_k} \end{array} \right) \middle| 0 < \mu_j - \mu_i < \delta \Rightarrow F_{i,j} = 0 \right\}, \tag{3.4}$$

autrement dit, tous les *niveaux q -Gevrey* $\mu_j - \mu_i < \delta$, $1 \leq i < j \leq k$, sont nuls. Ainsi, $\text{Lie}(\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}) = \mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta}$ et les applications $x \mapsto I_n + x$ et $x \mapsto \exp x$ réalisent des isomorphismes de $\mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta}$ dans $\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}$.

affine, alors X admet une structure affine canonique compatible avec ces données (et qui permet donc d'identifier X à $V \times X'$). C'est faux : il faut encore pour cela disposer d'une section $X' \rightarrow X$.

⁽¹¹⁾ Ces filtrations sont ici décrites de manière purement algébrique, comme plus bas celles des faisceaux $\Lambda_I(A_0)$ et $\lambda_I(A_0)$. Leur interprétation q -Gevrey est formulée dans [15, §3.4 et §6.2] et dans [14, p. 188].

Ces filtrations sont exhaustives (elles démarrent pour δ petit à l'espace entier) et séparées (elles stationnent pour δ grand au sous-groupe trivial). Elles ont un nombre fini de crans rationnels (les valeurs possibles de $\mu_j - \mu_i$). On note selon l'usage :

$$\mathfrak{G}_{A_0}^{>\delta} := \bigcup_{\delta' > \delta} \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{A_0}^{>\delta} := \bigcup_{\delta' > \delta} \mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta'}.$$

En particulier, si A_0 est à pentes entières, $\mathfrak{G}_{A_0}^{>\delta} = \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta+1}$ et $\mathfrak{g}_{A_0}^{>\delta} = \mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta+1}$.

Soit $\mathfrak{g}_{A_0}^{(\delta)}$ le sous espace de \mathfrak{g}_{A_0} défini par l'annulation de tous les niveaux q -Gevrey $\mu_j - \mu_i \neq \delta$. On a donc $\mathfrak{g}_{A_0}^{\geq \delta} = \mathfrak{g}_{A_0}^{(\delta)} \oplus \mathfrak{g}_{A_0}^{>\delta}$. De plus, les applications $x \mapsto I_n + x$ et $x \mapsto \exp x$ réalisent un isomorphisme (le même) de $\mathfrak{g}_{A_0}^{(\delta)}$ dans $\mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta} / \mathfrak{G}_{A_0}^{>\delta}$ et l'on a une suite exacte d'extension centrale⁽¹²⁾ :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_{A_0}^{(\delta)} \longrightarrow \mathfrak{G}_{A_0} / \mathfrak{G}_{A_0}^{>\delta} \longrightarrow \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta} / \mathfrak{G}_{A_0}^{>\delta} \longrightarrow 1.$$

Divers faisceaux et suites exactes.

Le faisceau sur \mathbf{E}_q de groupes unipotents $\Lambda_I(A_0)$ donne lieu à un faisceau $\lambda_I(A_0) := \text{Lie}(\Lambda_I(A_0))$ d'algèbres de Lie nilpotentes; pour tout ouvert U de \mathbf{E}_q :

$$\lambda_I(A_0)(U) = \{F \in \mathfrak{g}_{A_0}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))) \mid (\sigma_q F)A_0 = A_0 F\}.$$

Les filtrations de \mathfrak{G}_{A_0} et \mathfrak{g}_{A_0} introduites plus haut donnent lieu à des filtrations des faisceaux $\Lambda_I(A_0)$ et $\lambda_I(A_0)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)(U) &:= \Lambda_I(A_0)(U) \cap \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))) \\ &= \{F \in \mathfrak{G}_{A_0}^{\geq \delta}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))) \mid (\sigma_q F)A_0 = A_0 F\}, \end{aligned}$$

etc; on définit de même $\Lambda_I^{>\delta}(A_0)$, ainsi que $\lambda_I^{\geq \delta}(A_0)$, $\lambda_I^{>\delta}(A_0)$ et $\lambda_I^{(\delta)}(A_0)$. On a encore une suite exacte d'extension centrale :

$$0 \longrightarrow \lambda_I^{(\delta)}(A_0) \longrightarrow \Lambda_I(A_0) / \Lambda_I^{>\delta}(A_0) \longrightarrow \Lambda_I(A_0) / \Lambda_I^{\geq \delta}(A_0) \longrightarrow 1. \quad (3.5)$$

Pour $1 \leq i < j \leq k$, notons $\mathfrak{g}_{A_0}^{(i,j)} \subset \mathfrak{g}_{A_0}$ le sous-espace formé des matrices dont tous les blocs autres que $F_{i,j}$ sont nuls et $\lambda_I^{(i,j)}(A_0) \subset \lambda_I(A_0)$ le sous-faisceau correspondant. On a donc :

$$\mathfrak{g}_{A_0}^{(\delta)} = \bigoplus_{\mu_j - \mu_i = \delta} \mathfrak{g}_{A_0}^{(i,j)} \quad \text{et} \quad \lambda_I^{(\delta)}(A_0) = \bigoplus_{\mu_j - \mu_i = \delta} \lambda_I^{(i,j)}(A_0).$$

⁽¹²⁾ Nous notons 0 le groupe à gauche en vertu de la notation additive sur \mathfrak{g}_{A_0} et 1 le groupe à droite en vertu de la notation multiplicative sur \mathfrak{G}_{A_0} .

Identifiant une matrice de $\mathfrak{g}_{A_0}^{(i,j)}(R)$ à son bloc $F_{i,j} \in \text{Mat}_{r_i, r_j}(R)$, on peut écrire pour tout ouvert U de \mathbf{E}_q :

$$\lambda_I^{(i,j)}(A_0)(U) = \{F \in \text{Mat}_{r_i, r_j}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))) \mid (\sigma_q F)(z^{\mu_j} A_j) = (z^{\mu_i} A_i)F\}.$$

Ce faisceau est un fibré vectoriel sur \mathbf{E}_q de rang $r_i r_j$ et de degré $\mu_i - \mu_j$ (cf. [15, 6.2 et 6.3]). Le faisceau $\lambda_I^{(\delta)}(A_0)$ est donc un fibré vectoriel sur \mathbf{E}_q de rang $\sum_{\mu_j - \mu_i = \delta} r_i r_j$ et de degré $-\delta$. En conséquence :

$$V^{(i,j)} := H^1(\mathbf{E}_q, \lambda_I^{(i,j)}(A_0)) \quad \text{et} \quad V^{(\delta)} := H^1(\mathbf{E}_q, \lambda_I^{(\delta)}(A_0)) = \bigoplus_{\mu_j - \mu_i = \delta} V^{(i,j)}$$

sont des \mathbf{C} -espaces vectoriels de dimensions respectives $r_i r_j (\mu_j - \mu_i)$ et $\delta \sum_{\mu_j - \mu_i = \delta} r_i r_j$.

De l'extension centrale (3.5) on déduit, selon Frenkel [10] la suite exacte de cohomologie non abélienne :

$$0 \longrightarrow V^{(\delta)} \longrightarrow H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)) \longrightarrow H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)) \longrightarrow 1, \quad (3.6)$$

qui signifie que $V^{(\delta)}$ opère librement sur l'ensemble pointé $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0))$ avec quotient $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0))$.

Filtration q -Gevrey (cf. figure 3.1).

À partir d'ici et pour toute la suite de 3.2.2, on suppose les pentes de A_0 entières. Avec la notation introduite en 2.3.1, équation (2.5), on note temporairement :

$$\mathcal{F}_{A_0} := \{A_U \text{ en forme normale de Birkhoff-Guenther}\},$$

autrement dit (2.3.1, équation (2.6)), l'ensemble des A_U telles que $U_{i,j} \in \text{Mat}_{r_i, r_j}(K_{\mu_i, \mu_j})$, $1 \leq i < j \leq k$. (Rappelons que, d'après l'équation (2.6) de 2.3.1, cela signifie que chacun des $r_i r_j$ coefficients de la matrice rectangulaire $U_{i,j}$ est un polynôme de Laurent dont les exposants parcourent l'intervalle $[\mu_i; \mu_j[$.) L'ensemble \mathcal{F}_{A_0} est donc d'après la section 2.3.1 un ensemble de représentants pour la relation d'équivalence qui définit $\mathcal{F}(A_0)$, i.e. l'application naturelle $\mathcal{F}_{A_0} \rightarrow \mathcal{F}(A_0)$ est bijective. Plus précisément, l'application de $\prod_{1 \leq i < j \leq k} \text{Mat}_{r_i, r_j}(K_{\mu_i, \mu_j})$ dans $\mathcal{F}(A_0)$ qui, à $(U_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k}$ associe la classe de A_U , est un isomorphisme d'espaces affines.

Pour tout $\delta \geq 0$, on définit une relation d'équivalence \equiv_δ sur \mathcal{F}_{A_0} par :

$$A_U \equiv_\delta A_V \stackrel{\text{def}}{\iff} U_{i,j} = V_{i,j} \text{ pour } 0 < \mu_j - \mu_i \leq \delta. \quad (3.7)$$

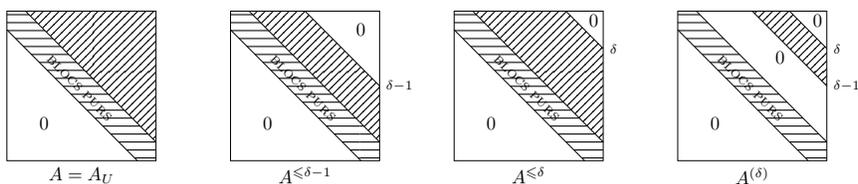


FIGURE 3.1. Filtration q -Gevrey

Un ensemble de représentants pour le quotient $\frac{\mathcal{F}_{A_0}}{\equiv_\delta}$ est alors donné par le sous-espace affine :

$$\mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} := \{A_U \in \mathcal{F}_{A_0} \mid U_{i,j} = 0 \text{ pour } \mu_j - \mu_i > \delta\},$$

autrement dit la flèche composée $\mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} \rightarrow \mathcal{F}_{A_0} \rightarrow \frac{\mathcal{F}_{A_0}}{\equiv_\delta}$ est bijective. Pour $0 \leq \delta' < \delta$, on a $\equiv_\delta \subset \equiv_{\delta'}$ et la surjection naturelle $\frac{\mathcal{F}_{A_0}}{\equiv_\delta} \rightarrow \frac{\mathcal{F}_{A_0}}{\equiv_{\delta'}}$ s'identifie à la troncature $\mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} \rightarrow \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta'}$, qui remplace par 0 tous les blocs $U_{i,j}$ tels que $\mu_j - \mu_i > \delta'$.

Notant, pour tout $\delta \geq 0$:

$$W^{(\delta)} := \bigoplus_{\mu_j - \mu_i = \delta} \text{Mat}_{r_i, r_j}(K_{\mu_i, \mu_j}) \quad \text{et} \quad W^{\leq \delta} := \bigoplus_{\delta' \leq \delta} W^{(\delta')},$$

on a donc un isomorphisme d'espaces affines :

$$W^{\leq \delta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta}.$$

L'application de classification $\mathcal{F}_{A_0} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$ induit alors par passage au quotient une *bijection* :

$$\mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} \xrightarrow{\sim} H^1\left(\mathbf{E}_q, \frac{\Lambda_I(A_0)}{\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)}\right)$$

et l'on a des diagrammes commutatifs à flèches verticales bijectives :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{A_0} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) & \longrightarrow & H^1\left(\mathbf{E}_q, \frac{\Lambda_I(A_0)}{\Lambda_I^{\geq \delta+1}(A_0)}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^1\left(\mathbf{E}_q, \frac{\Lambda_I(A_0)}{\Lambda_I^{\geq \delta+1}(A_0)}\right) & \longrightarrow & H^1\left(\mathbf{E}_q, \frac{\Lambda_I(A_0)}{\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)}\right)
 \end{array}$$

On a vu plus haut que la flèche horizontale basse de ce dernier diagramme est un passage au quotient par l'action libre de $V^{(\delta)}$. Il est bien évident que la flèche horizontale haute est un passage au quotient par l'action libre de $W^{(\delta)}$ et que cette dernière est affine. On a décrit dans [15, §6.2.3, p. 93] et dans [14, fin de §3.1 p. 189] un isomorphisme $W^{(\delta)} \xrightarrow{\sim} V^{(\delta)}$ compatible avec ces données (il est rappelé ci-dessous à la section 3.2.3, « Calculs de cocycles »). La section (inclusion naturelle) $\mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta-1} \rightarrow \mathcal{F}_{A_0}^{\leq \delta}$ de la flèche horizontale haute induit par transport une section $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0)) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta+1}(A_0))$ de la flèche horizontale basse compatible avec les données. En itérant, cela permet de munir de proche en proche chaque ensemble $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0))$ d'une structure affine, de telle sorte que :

- (1) les suites exactes de cohomologie (3.6) soient scindées ;
- (2) il s'en déduise un isomorphisme affine $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\delta > 0} V^{(\delta)}$;
- (3) la bijection $\mathcal{F}_{A_0} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$ soit un isomorphisme affine.

Cela complète la justification annoncée.

3.2.3. Calculs de cocycles et action de C^*

Calculs de cocycles.

Rappelons pour mémoire, et pour son utilité quand on traite d'exemples, le calcul de l'application $W^{(\delta)} \xrightarrow{\sim} V^{(\delta)}$ invoquée plus haut. Soient d'abord A_U et A_V quelconques de gradué A_0 (pas nécessairement en forme normale de Birkhoff–Guenther). L'équation $F[A_U] = A_V$ avec $F \in \mathfrak{C}_{A_0}$ (abréviation pour dire que F est au format décrit dans (2.3)) équivaut au système :

$$\begin{aligned}
 \forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq k, \quad U_{i,j} + \sum_{i < l < j} (\sigma_q F_{i,l}) U_{l,j} + (\sigma_q F_{i,j})(z^{\mu_j} A_j) \\
 = (z^{\mu_i} A_i) F_{i,j} + \sum_{i < l < j} V_{i,l} F_{l,j} + V_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $A_U \equiv_\delta A_V$, et donc que leurs classes dans $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0))$ soient les mêmes. Alors les équations ci-dessus admettent, aux niveaux $\mu_j - \mu_i < \delta$, les solutions $F_{i,j} = 0$; et, si ces solutions sont choisies, les équations au niveau δ deviennent :

$$\forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq k, \\ \mu_j - \mu_i = \delta, \quad (\sigma_q F_{i,j})(z^{\mu_j} A_j) - (z^{\mu_i} A_i) F_{i,j} = V_{i,j} - U_{i,j}.$$

On se place dans les conditions du théorème 3.1 (sommation algébrique dans une direction autorisée $\bar{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$), ce qui garantit l'unicité de la solution, notons la $F_{\bar{c}}$. Pour i, j fixés tels que $\mu_j - \mu_i = \delta$, les blocs (i, j) des différences $(F_{\bar{c}} - F_{\bar{c}})$ définissent un cocycle privilégié du faisceau $\lambda_I^{(i,j)}(A_0)$ et la collection de ces cocycles est elle-même un cocycle privilégié du faisceau $\lambda_I^{(\delta)}(A_0)$. La classe de ce cocycle est alors l'unique élément $c_{U,V} \in V^{(\delta)}$ dont l'action amène la classe de A_U dans $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)/\Lambda_I^{\geq \delta}(A_0))$ sur la classe de A_V (c'est la suite exacte (3.6) qui garantit *a priori* l'existence et l'unicité de cet élément).

Prenant $U = 0$ et $V \in W^{(\delta)}$ (étendu par 0 aux niveaux $\neq \delta$) on définit ainsi une application $V \mapsto c_{0,V}$ qui est l'isomorphisme recherché $W^{(\delta)} \xrightarrow{\sim} V^{(\delta)}$.

Action de \mathbf{C}^* .

Nous en parlons ici pour usage ultérieur à la section 3.3.2. Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et notons $f^\lambda(z) := f(\lambda z)$, $A_0^\lambda(z) := A_0(\lambda z)$, etc (donc $f^q = \sigma_q f$). Du fait que $f \mapsto f^\lambda$ commute avec σ_q , on déduit que $A_U \mapsto A_U^\lambda$ induit une application $\mathcal{F}(A_0) \rightarrow \mathcal{F}(A_0^\lambda)$ et un diagramme commutatif dont toutes les flèches sont des isomorphismes affines :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{A_0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(A_0) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{A_0^\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{F}(A_0^\lambda) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0^\lambda)) \end{array}$$

Nous appliquerons ce diagramme au cas où $A_0 = A_0^\lambda$.

3.3. Extension au cas de pentes arbitraires

3.3.1. Ramification

Soit $r \geq 2$ un entier. On reprend les notations des sections 1.4 et 2.3.2 concernant la ramification ; en particulier, on notera $A'(z_r) := A(z_r^r) = A(z)$,

etc. Si A est triangulaire supérieure par blocs de partie diagonale A_0 , alors A' est triangulaire supérieure par blocs de partie diagonale $A'_0(z_r) = A_0(z_r^r) = A_0(z)$. Si $F : A \rightarrow B$ est une transformation de jauge dans $\mathfrak{G}_{A_0}(K)$, alors $F' : A' \rightarrow B'$ est une transformation de jauge dans $\mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$.

Selon la section 1.4, le groupe μ_r des racines r^{es} de l'unité dans \mathbf{C}^* opère sur K_r , donc sur $\text{GL}_n(K_r)$, et en particulier sur le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures par blocs de partie diagonale A'_0 .

PROPOSITION 3.9. — *L'application de ramification $A(z) \mapsto A'(z_r)$ envoie $\mathcal{F}(A_0)$ dans le sous-ensemble $\mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r}$ des points fixes de $\mathcal{F}(A'_0)$. Cette application est injective. (On verra en 3.3.2, théorème 3.13, qu'elle est bijective.)*

Démonstration. — Soient A, B dans la classe de A_0 et soit $G : A' \rightarrow B'$ une transformation de jauge dans $\mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$. La partie μ_r -fixe de $G(z_r)$, obtenue par le projecteur habituel $\frac{1}{r} \sum_{j \in \mu_r} \sigma_j$ est :

$$F(z) := \frac{1}{r} \sum_{j \in \mu_r} G(jz_r).$$

Or $F(z) \in \mathfrak{G}_{A_0}(K)$: c'est une fonction de z car $K_r^{\mu_r} = K$; la matrice F est évidemment triangulaire supérieure par blocs ; et sa partie diagonale est la partie fixe de la partie diagonale de G , qui est I_n : c'est donc encore I_n . De plus, en appliquant le même projecteur à la relation $G(q_r z_r)A'(z_r) = B'(z_r)G(z_r)$, on obtient, puisque A' et B' sont μ_r -invariants, $F(qz)A(z) = B(z)F(z)$, i.e. A et B représentent le même élément de $\mathcal{F}(A_0)$. On a donc défini une injection :

$$\mathcal{F}(A_0) \rightarrow \mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r}. \quad \square$$

On va maintenant définir une injection analogue pour les H^1 . L'application $x \mapsto x^r$ de \mathbf{C}^* dans lui-même envoie $q_r^{\mathbf{Z}}$ dans $q^{\mathbf{Z}}$ et passe donc au quotient en $p : \mathbf{E}_{q_r} \rightarrow \mathbf{E}_q$, qui est surjective de noyau $\mu_r q_r^{\mathbf{Z}} / q_r^{\mathbf{Z}} \simeq \mu_r$, donc une isogénie de degré r . Soit $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de \mathbf{E}_q . Les $U'_\alpha := p^{-1}(U_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert \mathfrak{U}' de \mathbf{E}_{q_r} . Si $(F_{\alpha,\beta})$ est un cocycle de dans $Z^1(\mathfrak{U}, \Lambda_I(A_0))$, alors $(F'_{\alpha,\beta})$ est un cocycle de dans $Z^1(\mathfrak{U}', \Lambda_I(A'_0))$. Si $(G_{\alpha,\beta}) = (H_\alpha F_{\alpha,\beta} H_\beta^{-1})$ est un cocycle équivalent à $(F_{\alpha,\beta})$, alors $(G'_{\alpha,\beta}) = (H'_\alpha F'_{\alpha,\beta} H'_\beta^{-1})$ est un cocycle équivalent à $(F'_{\alpha,\beta})$. On a donc défini une application $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))$.

Conservant les mêmes notations, on a une action évidente de μ_r sur $Z^1(\mathfrak{U}', \Lambda_I(A'_0))$ (toujours par $f(z_r) \mapsto f(jz_r)$), et il est clair que l'application vue plus haut envoie $Z^1(\mathfrak{U}, \Lambda_I(A_0))$ dans $Z^1(\mathfrak{U}', \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r}$. De plus, l'opération de μ_r est compatible avec l'équivalence des cocycles, et l'on a pour finir une application de $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$ dans $H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r}$.

PROPOSITION 3.10. — *Cette application est injective. (On verra en 3.3.2, théorème 3.13, qu'elle est bijective.)*

Démonstration. — Une relation de cohomologie $(G'_{\alpha,\beta}) = (H'_\alpha F'_{\alpha,\beta} H'_\beta{}^{-1})$ entre cocycles $(G'_{\alpha,\beta})$ et $(F'_{\alpha,\beta})$ provenant respectivement par ramification de cocycles $(G_{\alpha,\beta})$ et $(F_{\alpha,\beta})$ s'écrit :

$$\forall \alpha, \beta ; G'_{\alpha,\beta} H'_\beta = H'_\alpha F'_{\alpha,\beta},$$

et, en appliquant le même opérateur de projection que ci-dessus, on obtient :

$$\forall \alpha, \beta ; G_{\alpha,\beta} H_\beta = H_\alpha F_{\alpha,\beta},$$

où les H_α s'obtiennent par application aux H'_α du projecteur, et sont dans \mathfrak{G}_{A_0} comme précédemment, d'où une relation de cohomologie $(G_{\alpha,\beta}) = (H_\alpha F_{\alpha,\beta} H_\beta{}^{-1})$. On a donc défini une injection :

$$H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r}. \quad \square$$

3.3.2. Classification

Supposons maintenant que r est un dénominateur commun des pentes de A_0 , de sorte que les pentes de A'_0 sont entières. Il est immédiat, par construction, que l'application $\mathcal{F}(A'_0) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))$ définie au théorème 3.5 est compatible avec l'opération de μ_r et que l'on a donc une bijection $\mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r} \rightarrow H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r}$.

PROPOSITION 3.11. — *L'image de $\mathcal{F}(A_0)$ dans $\mathcal{F}(A'_0)$ est égale à $\mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r}$.*

Démonstration. — Notons j un générateur de μ_r et B^j pour $\sigma_j B$ (et de même, une quinzaine de lignes plus loin, H^j désignera $\sigma_j H$). Une classe de $\mathcal{F}(A'_0)$ fixée par μ_r est représentée par une matrice $B(z_r)$ triangulaire supérieure par blocs de gradué $\text{gr } B = A'_0$ et telle que $B \sim B^j$ (équivalence de jauge). On veut montrer que $B \sim C$, où $\text{gr } C = A'_0$ et $C = C^j$, i.e. C est fonction de $z_r^r = z$. Soit donc $G : B \rightarrow B^j$ un isomorphisme $G \in \mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$. Comme l'action de μ_r commute à celle de σ_q , on voit que $G^j \in \mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$ est un isomorphisme $G^j : B^j \rightarrow B^{j^2}$, et l'on peut itérer. On obtient ainsi des isomorphismes composés :

$$B \xrightarrow{G} B^j \xrightarrow{G^j} \dots \xrightarrow{G^{j^{k-1}}} B^{j^k}.$$

Notons $G(k) := G^{j^{k-1}} \dots G^j G : B \simeq B^{j^k} \in \mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$ cet isomorphisme. En particulier, puisque $j^r = 1$, $G(r) = G^{j^{r-1}} \dots G^j G$ est un automorphisme de B dans $\mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$, donc l'identité d'après le corollaire 2.7 :

$$G(r) = G^{j^{r-1}} \dots G^j G = I_n.$$

Avec la convention naturelle $G(0) = I_n$, on vérifie les formules $G(1) = G$ et $G(k+1) = G(k)^j G$. On pose alors :

$$H := \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r G(k) = \frac{1}{r+1} (I_n + G + G^j G + \dots + G^{j^{r-1}} \dots G^j G),$$

qui vérifie (d'après les formules ci-dessus et la définition de H^j au début de la démonstration) :

$$H^j G = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r G(k)^j G = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r G(k+1) = H,$$

puisque $G(r) = I_n = G(0)$. De plus, en tant que moyenne de matrices de $\mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$, la matrice H est elle même triangulaire supérieure unipotente, et, plus précisément, une matrice de $\mathfrak{G}_{A_0}(K_r)$. Posant $C := H[B]$, on calcule enfin (rappelons que $B^j = G[B]$) :

$$C^j = H^j [B^j] = H^j [G[B]] = (H^j G)[B] = H[B] = C,$$

d'où la conclusion voulue. □

Remarque 3.12. — La parenté de cette démonstration avec celle du « Théorème 90 de Hilbert » suggère qu'une bonne partie de nos arguments pourrait être simplifiée par des considérations de cohomologie des groupes (voire de cohomologie galoisienne).

On a actuellement un diagramme incomplet

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A_0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r} \\ \text{?} \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r} \end{array}$$

Pour le compléter, partons de la classe de A dans $\mathcal{F}(A_0)$ et posons $A'(z_r) := A(z)$; soit (G_α) une famille trivialisante adaptée à A' , par exemple celle obtenue par « sommation algébrique ». Les parties μ_r -fixes F_α des G_α , obtenues par le même opérateur de projection que précédemment, forment une famille trivialisante adaptée à A et définissent donc un cocycle de $Z^1(\mathfrak{U}, \Lambda_I(A_0))$, donc une classe de $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$. Ceci définit sans ambiguïté une flèche verticale gauche qui rend le diagramme ci-dessus commutatif. Du fait que les flèches horizontale haute et verticale droite sont bijectives et que la flèche horizontale basse est injective, il s'ensuit que toutes les flèches sont bijectives :

THÉORÈME 3.13. — On a un diagramme commutatif à flèches bijectives :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A_0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A'_0)^{\mu_r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{E}_{q_r}, \Lambda_I(A'_0))^{\mu_r} \end{array}$$

Il résulte de plus des arguments de la section 3.2 que la bijection $\mathcal{F}(A_0) \rightarrow H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(A_0))$ est indépendante du degré de ramification r .

Ajouté lors de la relecture des épreuves

Voir également le livre *Basic Modern Theory of Linear Complex Analytic q -difference Equations* (J. Sauloy) à paraître prochainement dans la collection *Mathematical Surveys and Monographs* de l'American Mathematical Society, ainsi que le « Companion Volume » (par Chen, Ohyama, Ramis, Roques, Sauloy et Zhang) prévu pour 2026 dans la même collection.

Bibliographie

- [1] D. G. BABBITT & V. S. VARADARAJAN, *Local moduli for meromorphic differential equations.*, Astérisque, vol. 169-170, Société Mathématique de France, 1989.
- [2] G. D. BIRKHOFF, « The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q -difference equations », *Proc. Am. Acad.* **49** (1913), p. 521-568.
- [3] V. BUGEAUD, « Groupe de Galois local des équations aux q -différences irrégulières. », *Ann. Inst. Fourier* **68** (2018), n° 3, p. 901-964.
- [4] L. DI VIZIO, « Arithmetic theory of q -difference equations : the q -analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p -curvatures », *Invent. Math.* **150** (2002), n° 3, p. 517-578.
- [5] ———, « Local analytic classification of q -difference equations with $|q| = 1$. », *J. Noncommut. Geom.* **3** (2009), n° 1, p. 125-149.
- [6] L. DI VIZIO & J. SAULUY, « Tools for local classification of linear complex q -difference equations », in *Arithmetic and Galois theories of differential equations. Proceedings of the summer school, 'Galoisian and arithmetic theory of differential equations', CIRM, Luminy, France, September 21–25, 2009*, Société Mathématique de France, 2011, p. 169-222.
- [7] L. DI VIZIO & C. ZHANG, « On q -summation and confluence. », *Ann. Inst. Fourier* **59** (2009), n° 1, p. 347-392.
- [8] T. DREYFUS & A. ELOY, « q -Borel–Laplace summation for q -difference equations with two slopes. », *J. Difference Equ. Appl.* **22** (2016), n° 10, p. 1501-1511.
- [9] P. ETINGOF, « Galois groups and connection matrices for q -difference equations. », *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.* **1** (1995), n° 1, p. 1-9.

- [10] J. FRENKEL, « Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. », *Bull. Soc. Math. Fr.* **85** (1957), p. 135-220.
- [11] Y. OHYAMA, J.-P. RAMIS & J. SAULOY, « The space of monodromy data for the Jimbo-Sakai family of q -difference equations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **29** (2021), n° 5, p. 1119-1250.
- [12] M. VAN DER PUT & M. REVERSAT, « Galois theory of q -difference equations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **16** (2007), n° 3, p. 665-718.
- [13] M. VAN DER PUT & M. F. SINGER, *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1666, Springer, 1997, viii+180 pages.
- [14] J.-P. RAMIS & J. SAULOY, « Le q -analogue du groupe fondamental sauvage et le problème inverse de la théorie de Galois aux q -différences. », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **48** (2015), n° 1, p. 171-226.
- [15] J.-P. RAMIS, J. SAULOY & C. ZHANG, *Local analytic classification of q -difference equations*, Astérisque, vol. 355, Société Mathématique de France, 2013, vi+151 pages.
- [16] J.-P. RAMIS & C. ZHANG, « q -Gevrey asymptotic expansion and Jacobi theta function. (Développement asymptotique q -Gevrey et fonction thêta de Jacobi.) », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), n° 11, p. 899-902.
- [17] J. ROQUES, « Generalized basic hypergeometric equations. », *Invent. Math.* **184** (2011), n° 3, p. 499-528.
- [18] J. ROQUES & J. SAULOY, « Euler characteristics and q -difference equations », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.* **19** (2019), n° 1, p. 129-154.
- [19] J. SAULOY, « Systèmes aux q -différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie », *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), n° 4, p. 1021-1071.
- [20] ———, « Galois theory of Fuchsian q -difference equations », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **36** (2003), n° 6, p. 925-968.
- [21] ———, « Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q -difference equations », in *Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I*, Astérisque, vol. 296, Société Mathématique de France, 2004, p. 227-251.
- [22] ———, « La filtration canonique par les pentes d'un module aux q -différences et le gradué associé », *Ann. Inst. Fourier* **54** (2004), n° 1, p. 181-210.
- [23] ———, « Théorie analytique locale des équations aux q -différences de pentes arbitraires », 2020, <https://arxiv.org/abs/2006.03237>.