ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FEDERIGO ENRIQUES

Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 3, nº 1 (1901), p. 77-84

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_1_77_0>

SUR LES

SURFACES ALGÉBRIQUES

ADMETTANT DES

INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE PREMIÈRE ESPÈCE,

PAR M. FEDERIGO ENRIQUES,

à Bologne.

En essayant de démontrer la proposition réciproque du théorème de M. Humbert (1), concernant les surfaces qui ne possèdent aucune intégrale de différentielle totale de première espèce, j'ai été amené au résultat suivant :

Toute surface algébrique admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce, avec 2p périodes, contient une série de courbes algébriques qui n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre.

Du résultat que je viens d'énoncer, découlent quelques conséquences remarquables; notamment on en déduit les *conditions, sous une forme transcendante, pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée,* par une transformation birationnelle, *à un cylindre de genre* $p > 0$.

1. Envisageons d'abord une surface F $[F(x, y, z) = 0]$ possédant *une* intégrale de première espèce elliptique,

$$I = \int_{x_0 y_0}^{xy} P\, dx + Q\, dy,$$

dont les *deux* périodes seront désignées par ω, ω'.

Construisons sur F un *faisceau* (2) linéaire $|C|$, de courbes C, doué d'un

(1) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1893).

(2) On donne le nom de *faisceau* à une famille ∞^1 de courbes appartenant à une surface, lorsqu'il y a *une* courbe de la famille passant par chaque point de la surface, choisi d'une façon générale.

point-base simple O; par exemple, le faisceau des courbes $z = \text{const.}$, si l'on suppose que la droite de l'infini du plan $z = 0$ rencontre la surface en quelques points simples (O serait alors un de ces points). Soit π le genre des C.

D'après M. Picard, on peut considérer I comme une fonction des points d'une courbe C; on a ainsi une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe; c'est, d'ailleurs, une intégrale réductible dont les périodes s'expriment par ω, ω'.

Envisageons maintenant les fonctions elliptiques de Weierstrass

$$p(\mathrm{I} \mid \omega, \omega'), \quad p'(\mathrm{I} \mid \omega, \omega'),$$

comme des fonctions attachées à la courbe C; ce seront des fonctions rationnelles des points de cette courbe. En conséquence, on aura sur la courbe C une *involution* elliptique γ'_n, dont les groupes (formés d'un certain nombre n de points) correspondent aux points de la courbe elliptique (p, p').

Faisons varier la courbe C dans le faisceau $|\mathrm{C}|$; les γ'_n, que nous venons de définir, donneront lieu à une involution Γ'_n sur la surface. On peut envisager les groupes de Γ'_n comme les *points* d'une nouvelle surface F', le mot « point » étant pris dans une acception abstraite. Les points de F' dépendront alors, d'une façon rationnelle, des points de F; et l'on aura sur F' un faisceau de courbes elliptiques C', homologues des C, dont les points correspondent aux groupes des γ' nommées ci-dessus. Le faisceau $|\mathrm{C}'|$ aura, sur F', un point-base simple O' correspondant à O.

Il est important de remarquer que toutes les courbes C' peuvent être ramenées, d'une manière birationnelle, à une même courbe définie par les fonctions elliptiques $p(\mathrm{I})$, $p'(\mathrm{I})$, douées des périodes ω, ω'.

Par suite, lorsqu'on envisage deux courbes *quelconques* C'_1, C'_2, du faisceau $|\mathrm{C}'|$, on peut établir entre elles *deux* correspondances birationnelles, en exigeant que le point O', considéré sur les deux courbes, corresponde à lui-même. En effet, si l'on suppose, en O', $\mathrm{I} = 0$ (ce qui n'entraîne aucune restriction essentielle) les deux correspondances nommées ci-dessus, entre $\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2$, sont données par la relation

$$\mathrm{I}_1 \equiv \pm \mathrm{I}_2 \qquad (\mathrm{mod}\, \omega, \omega'),$$

liant les paramètres (I) des points des deux courbes.

Pour séparer les deux correspondances l'une de l'autre, il y a lieu d'effectuer une opération irrationnelle qui consiste à extraire une racine carrée. On peut se demander si cette racine portera nécessairement sur le paramètre dont dépend la détermination des courbes C' dans le faisceau $|\mathrm{C}'|$, ou bien si elle en sera indépendante. Il y a lieu de montrer qu'il faut adopter la deuxième de ces hypothèses.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, les deux points homologues à un point A, donné sur C'_1 d'une façon tout à fait générale, décriraient une même courbe irréductible K, hyperelliptique lorsqu'on fait varier C'_2; et l'on aurait sur K quelques points de coïncidence. Désignons par B un tel point de coïncidence, et envisageons la courbe C' contenant B; nous la nommerons C'_2.

Entre C'_1, C'_2 on aura toujours deux correspondances; mais, par hypothèse, les deux points A, B, pris respectivement sur les deux courbes, doivent se correspondre également, soit qu'on envisage l'une ou l'autre des correspondances nommées. Or, cette conclusion est absurde, le point A étant choisi sur C'_1 d'une façon tout à fait générale, puisqu'il faudrait que A tombât en un des 4 points doubles de la série g'_2 dont O' est un point double, c'est-à-dire en des points donnés par l'équation

$$I_1 \equiv -I_1 \qquad (\operatorname{mod} \omega, \omega').$$

Le raisonnement que nous venons de développer suppose implicitement que le faisceau $|C'|$, sur F', ne renferme aucune courbe réductible. C'est ce qui a lieu lorsqu'on a choisi sur F le faisceau $|C|$ de manière qu'il n'y ait aucune courbe C réductible et qu'on n'ait jamais, sur une C, $I = \text{const.}$ Comme le choix de $|C|$ sur F est arbitraire, on peut supposer remplies ces conditions.

Nous venons de voir qu'en laissant fixe la courbe C'_1 et en faisant varier C'_2 dans le faisceau $|C'|$, les points homologues à un point A de C'_1, suivant les deux correspondances que nous avons précédemment établies, décrivent *deux* courbes séparées, coupant chacune en *un* point les courbes C'. Lorsque A décrit C'_1, on obtient ainsi les courbes rationnelles d'un faisceau (elliptique), coupant en un point les C'.

En revenant de F' à F, on a donc, sur cette dernière surface, un faisceau elliptique de courbes, coupant en n points les courbes C.

2. Le raisonnement que nous avons employé lorsque la surface F possède une intégrale $I = \int_{x_0 y_0}^{xy} P\,dx + Q\,dy$ de première espèce elliptique, s'étend au cas où il y a p intégrales de différentielles totales, à $2p$ périodes. Nous allons envisager l'hypothèse $p = 2$. Il sera aisé au lecteur de passer ensuite au cas général.

Soient

$$I_1 = \int_{x_0 y_0}^{xy} P_1\,dx + Q_1\,dy, \qquad I_2 = \int_{x_0 y_0}^{xy} P_2\,dx + Q_2\,dy$$

deux intégrales de première espèce attachées à la surface F

$$[F(x, y, z) = 0];$$

en les supposant normales, on peut écrire leurs périodes comme il suit :

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \omega_{11}, & \omega_{12}, \\ 0, & 1, & \omega_{21}, & \omega_{22} \end{matrix}$$
$$(\omega_{12} = \omega_{21}).$$

Construisons sur F un faisceau linéaire de courbes C, ayant un certain genre π, et deux points-bases simples O_1, O_2; le faisceau étant choisi d'ailleurs d'une façon générale.

Nous envisageons d'abord I_1, I_2 comme des intégrales abéliennes attachées à une courbe C du faisceau; ce sont des intégrales de première espèce, réductibles, dont les périodes s'expriment par des combinaisons linéaires entières des ω_{ik}. On peut supposer que les sommes des valeurs de I_1, I_2, calculées en O_1, O_2, s'évanouissent :

$$I'_1 + I''_1 \equiv I'_2 + I''_2 \equiv 0 \qquad (\bmod\, \omega_{ik}).$$

Envisageons ensuite trois fonctions abéliennes

$$M_1 = M_1(u_1 u_2), \qquad M_2 = M_2(u_1 u_2), \qquad M_3 = M_3(u_1 u_2)$$
$$\begin{bmatrix} u_1 = I_1(x_1 y_1) + I_1(x_2 y_2) \\ u_2 = I_2(x_1 y_1) + I_2(x_2 y_2) \end{bmatrix},$$

avec les périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \omega_{11}, & \omega_{12}, \\ 0, & 1, & \omega_{21}, & \omega_{22}. \end{matrix}$$

Ce sont des fonctions rationnelles des couples de points des courbes C, et elles font correspondre une surface algébrique F′ à chaque C. Comme on a un faisceau linéaire de C, on obtient ainsi une variété V′ à trois dimensions possédant un faisceau linéaire de surfaces F′.

Il faut remarquer maintenant que les surfaces F′ correspondent, d'une manière birationnelle, à une seule et même surface hyperelliptique; de sorte que l'on peut établir une correspondance birationnelle entre deux F′ : soient F'_1, F'_2. Comme d'ailleurs les F′ ont en commun un même point O′ représentant le couple

$$O_1, \quad O_2 \qquad (u_1 \equiv u_2 \equiv 0),$$

on a, entre F'_1, F'_2, *deux* correspondances, en posant

$$u'_1 \equiv + u''_1, \qquad u'_2 \equiv + u''_2 \qquad \text{ou} \qquad u'_1 \equiv - u''_1, \qquad u'_2 \equiv - u''_2 \qquad (\bmod\, \omega_{ik}).$$

Il est aisé de reconnaître que les deux points de F'_2 homologues à un point A, donné d'une façon générale sur F'_1, décrivent deux courbes distinctes, lorsque l'on fait varier F'_2 sur V′; car ils ne peuvent jamais se réunir en un même point, si A ne tombe pas en un des 16 points

$$u_1 \equiv u_2 \equiv 0 \qquad (\bmod\, \omega_{ik}),$$

c'est-à-dire en un des points doubles de l'involution hyperelliptique définie sur F′ par le point double O′.

Comme A peut varier sur F′, on engendre de cette façon une série ∞^2 de courbes algébriques sur V′, coupant en *un* point les surfaces F′.

En revenant à la surface F donnée en premier lieu, on obtient ainsi, sur elle, une série de courbes algébriques coupant chaque C en un certain nombre de couples de points. Cette série, voilà l'essentiel, n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre.

En effet, les groupes de points coupés par les courbes de la série sur une C, ne sauraient appartenir à une série linéaire, puisque la condition donnée par le théorème d'Abel n'est pas évidemment satisfaite.

3. Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration du théorème énoncé, en passant au cas de p quelconque, ce qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Nous aimons mieux indiquer quelques corollaires du théorème permettant de donner, sous une forme transcendante très simple, les conditions pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée, par une transformation birationnelle, à un cylindre de genre $p > 0$.

Il faut d'abord que le genre géométrique de la surface s'évanouisse, c'est-à-dire que l'on ait

$$p_g = 0.$$

C'est là une première condition que l'on peut regarder comme transcendante, p_g désignant le nombre des intégrales doubles de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la surface.

Il faut encore que la surface possède p intégrales de différentielles totales de première espèce, à $2p$ périodes. Cette condition, ajoutée à la première, est aussi suffisante lorsque $p > 1$.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur une remarque que M. Castelnuovo a bien voulu nous communiquer aimablement :

Lorsque, sur une surface de genre $p_g = 0$, on a une série algébrique $\infty^1(k)$ de courbes algébriques C, qui n'est pas renfermée dans une série linéaire, la surface contient un faisceau irrationnel de courbes algébriques.

M. Castelnuovo établit cette proposition de la manière suivante : D'abord on sait, d'après M. Nöther ([1]), que les intégrales de différentielles totales de première espèce appartenant à la surface ($p_g = 0$) sont des fonctions l'une de l'autre. En conséquence, elles définissent les mêmes courbes

$$I_h = \text{const.},$$

en désignant par I_h une de ces intégrales.

Il suffit de montrer que si les courbes $I_h = \text{const.}$ se distinguent des courbes C, elles sont aussi, en tous cas, des courbes algébriques : leur série est d'ailleurs un *faisceau* irrationnel admettant les I_h comme des intégrales abéliennes de première espèce.

Envisageons les courbes C de la série k comme déterminées par les valeurs d'un paramètre λ; soient

$$u_1(\lambda),\quad u_2(\lambda),\quad \ldots,\quad u_\pi(\lambda) \qquad (\pi > 0)$$

les intégrales abéliennes de première espèce attachées à k.

Désignons par

$i(>0)$ le nombre des courbes C issues d'un point P de la surface;
$C_1, C_2, \ldots, C_i$ ces courbes elles-mêmes;
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ les valeurs correspondantes du paramètre λ.

On aura, d'après M. Humbert,

$$u_h(\lambda_1) + u_h(\lambda_2) + \ldots + u_h(\lambda_i) = I_h(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \pi),$$

où I_h est une intégrale de différentielle totale de première espèce attachée à la surface, ou bien une constante (cette dernière hypothèse d'ailleurs n'étant pas vérifiée pour toutes les valeurs de h).

Or, faisons varier P sur une courbe $I_h = \text{const.}$ supposée distincte des C. Les $C_1, C_2, \ldots, C_i$, envisagées comme éléments de k, donnent lieu à une série de groupes γ_i qui, d'après le théorème d'Abel, est contenue dans une série linéaire. Cela donne une condition *algébrique* que le point P doit remplir lorsqu'il se meut sur la courbe $I_h = \text{const.}$ Cette courbe est donc algébrique, comme il fallait le démontrer.

On voit maintenant qu'une surface F, pour laquelle $p_g = 0$, admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce, à $2p$ périodes, possède un faisceau de courbes algébriques L; le genre du faisceau (dont les courbes L sont envisagées comme les éléments) est d'ailleurs

$$p\,(>0).$$

([1]) *Voir* Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* t. I, p. 136, n° 15. Paris, Gauthier-Villars.

Rappelons encore une formule qui donne le nombre δ des courbes L douées d'un point double, où l'on suppose d'abord que la surface F ait été transformée d'une manière convenable (de façon à éliminer, autant que cela est possible, ses *courbes exceptionnelles*); cette formule est la suivante :

$$\delta + 4(p-1)(\pi-1) + p^{(1)} = 12 p_n + 13,$$

où π désigne le genre des courbes L, $p^{(1)}$ le *genre linéaire* de la surface, p_n son *genre numérique* (¹).

On a d'ailleurs

$$\delta \geqq 0, \qquad p > 0,$$

et, d'après un théorème de M. Castelnuovo (²) sur les surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes,

$$p_n < p_g,$$

en sorte que

$$p_n \leqq -1.$$

En discutant la formule donnée ci-dessus, on trouve, ou bien

$$\pi = 0,$$

ce qui amène la possibilité de représenter la surface sur un cylindre de genre p (³), ou bien

$$p^{(1)} \leqq -3,$$

ce qui nous ramène à la même conclusion (*voir* la Note qui précède), ou enfin

$$p^{(1)} \leqq 1, \qquad p_n = -1, \qquad p = \pi = 1.$$

De sorte qu'il est permis d'énoncer la conclusion suivante :

Les conditions pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée, par une transformation birationnelle, à un cylindre de genre $p > 1$, peuvent être exprimées :

1° *Par la non-existence d'intégrales doubles de première espèce* ($p_g = 0$);

(¹) On trouvera cette formule (qui est une généralisation d'autres formules connues) dans un Mémoire que nous avons écrit en commun, M. Castelnuovo et moi, et qui sera publié prochainement par les *Annali di Matematica*. Dans le même Travail, on trouvera la définition tout à fait générale du caractère $p^{(1)}$, et le théorème dont on fait usage dans la suite, qu'une surface pour laquelle on a $p^{(1)} \leqq 0$ peut être ramenée à un cylindre.

(²) *Memorie della Società italiana delle Scienze* (dei XL), 1896. — *Annali di Matematica,* serie II, t. XV; 1897.

(³) Enriques, *Accademia dei Lincei,* 1898. — *Mathematische Annalen*, Bd 52.

2° *Par l'existence de p intégrales de différentielles totales de première espèces à $2p$ périodes.*

Lorsque $p = 1$ ces conditions ne suffisent plus : la surface contiendra, en tous cas, un faisceau elliptique de courbes algébriques L (de genre $\pi \leqq 1$); *il faut ajouter la condition* $\pi = 0$, que l'on peut regarder aussi comme une condition transcendante.