ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HERMITE

Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 2 (1888), p. C1-C12
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1888_1_2__C1_0>

REMARQUES

SUR LA

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. HERMITE.

En désignant par $F(x)$ une fonction uniforme aux périodes $2K$ et $2iK'$, et par $a, b, \ldots, l$ ses pôles situés à l'intérieur du rectangle des périodes, on a l'expression suivante

$$\begin{aligned}
F(x) = C &+ A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L\frac{H'(x-l)}{H(x-l)} \\
&+ D_x\left[A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B'\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L'\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\
&+ D_x^2\left[A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B''\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L''\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien, pour abréger,

$$\begin{aligned}
F(x) = C &+ \sum A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x^2 A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La quantité $\frac{H'(x)}{H(x)}$, qui joue le rôle d'élément simple dans cette formule, n'est pas doublement périodique, mais ses dérivées le sont, comme le montre la relation

$$D_x\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}.$$

Il en résulte que les termes de la première somme sont d'une autre nature que les autres, mais la condition $A + B + \ldots + L = 0$ permet de la mettre aussi sous la forme doublement périodique; c'est le premier point dont je vais m'occuper.

I. J'emploierai, dans ce but, la relation suivante

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

qui est une conséquence de l'égalité fondamentale

$$-k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) = \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Changeons, en effet, a en $a + i\mathrm{K}'$: on aura d'abord

$$-\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)};$$

prenons ensuite la dérivée logarithmique des deux membres de l'équation

$$\operatorname{sn} a = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(a)}{\Theta(a)},$$

ce qui donne

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et ajoutons membre à membre. Au moyen de la formule

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a},$$

on trouvera, après une réduction facile, la relation à établir.

D'une autre manière, en partant de la décomposition en éléments simples de la quantité $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}$ qui a pour périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, nous opérerons comme il suit. Les pôles étant $x = a$, $x = 2\mathrm{K} - a$, et les résidus correspondants $\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, $-\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, nous avons d'abord

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C} + \frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left[\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}\right]$$

ou plutôt

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C}' + \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}.$$

Pour déterminer la constante, je fais $x = 0$, ce qui donne

$$-\frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a} = \mathrm{C}' - \frac{2\,\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{C}' = 2\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\right] = 2\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Nous avons ainsi l'égalité

$$\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)};$$

permutant x et a, on en conclut

$$\frac{2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 x} = \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

et enfin, en retranchant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Cela posé, l'élément simple $\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}$ s'obtient en changeant a en $-a$, sous la forme suivante

$$\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} = \frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et voici la nouvelle expression des fonctions doublement périodiques qui en résulte. En premier lieu et dans la somme $\sum \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}$, le terme $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ disparaît en vertu de la condition $\sum \mathrm{A} = 0$; on a donc simplement

$$\sum \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} = \sum \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} + \text{const.}$$

Soient ensuite, pour simplifier l'écriture,

$$\mathrm{S}' = \sum \mathrm{A}', \qquad \mathrm{S}'' = \sum \mathrm{A}'', \qquad \ldots;$$

en faisant usage de l'égalité de Jacobi

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

nous trouvons successivement

$$\sum A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x + \text{const.},$$

$$\sum A'' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La nouvelle expression des fonctions doublement périodiques, où n'entrent plus que des éléments doublement périodiques, à savoir $\operatorname{sn}^2 x$ et sa dérivée, est donc

$$\begin{aligned} F(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} \\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on en conclut facilement qu'on a

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

en désignant par $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$ et $\psi(\operatorname{sn}^2 x)$ des fonctions rationnelles en $\operatorname{sn}^2 x$.

Une remarque à laquelle elle donne lieu immédiatement, c'est que le second membre contient un point singulier apparent, $x = iK'$, qui se trouve dans la formule

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

C'est, sous ce rapport, une imperfection qui est évitée avec les éléments simples $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$; nous observerons toutefois qu'il n'y a point de pôle apparent dans le cas particulier où, la fonction doublement périodique étant paire, tous les pôles sont simples, puisque alors on obtient

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{C} + \sum \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a}.$$

Ce cas n'est pas le seul : il en est encore de même dans d'autres circonstances où l'expression des fonctions doublement périodiques s'offre sous des formes nouvelles que nous allons indiquer.

II. A cet effet, je distingue parmi les fonctions aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$ celles qui se reproduisent au signe près lorsqu'on ajoute à la variable l'une des demi-périodes $i\mathrm{K}$, $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, K; je les désignerai par $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x)$, $\mathrm{F}_3(x)$, de sorte qu'on aura ces conditions caractéristiques

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_1(x + i\mathrm{K}') &= -\mathrm{F}_1(x),\\
\mathrm{F}_2(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') &= -\mathrm{F}_2(x),\\
\mathrm{F}_3(x + \mathrm{K}) &= -\mathrm{F}_3(x).
\end{aligned}$$

Considérons d'abord la première ; nous pourrons écrire

$$2\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}_1(x) - \mathrm{F}_1(x + i\mathrm{K}'),$$

et, en observant que l'on a

$$\frac{\mathrm{H}'(x + i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(x + i\mathrm{K}')} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}},$$

la première formule de décomposition en éléments simples donne immédiatement

$$\begin{aligned}
2\mathrm{F}_1(x) = {} & \sum \mathrm{A}\left[\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right]\\
& + \sum \mathrm{A}'\mathrm{D}_x\left[\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right]\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$2\mathrm{F}_1(x) = \sum \mathrm{A}\mathrm{D}_x \log \mathrm{sn}(x-a) + \sum \mathrm{A}'\mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{sn}(x-a) + \ldots$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{F}_1(x) = \sum \mathrm{A}\mathrm{D}_x \log \mathrm{sn}(x-a) + \sum \mathrm{A}'\mathrm{D}_x^2 \log \mathrm{sn}(x-a) + \ldots.$$

si l'on n'emploie que les pôles contenus dans le rectangle ayant pour côtés $2K$ et K'.

De la même manière, en faisant usage des équations,

$$\frac{H'(x+K+iK')}{H(x+K+iK')} = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - \frac{i\pi}{2K},$$

$$\frac{H'(x+K)}{H(x+K)} = \frac{H'_1(x)}{H_1(x)},$$

nous trouverons ensuite

$$2F_2(x) = \sum A_1 D_x \log\frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \sum A'_1 D_x^2 \log\frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \ldots,$$

$$2F_3(x) = \sum A_2 D_x \log\frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \sum A'_1 D_x^2 \log\frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \ldots.$$

Ces quantités prennent une forme plus simple, si l'on change dans la première x en $x+K$, et dans la seconde x en $x+K+iK'$. Nous avons, en effet,

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K)}{\operatorname{dn}(x+K)} = \frac{1}{k'}\operatorname{cn} x,$$

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K+iK')}{\operatorname{cn}(x+K+iK')} = \frac{i}{k'}\operatorname{dn} x;$$

en écrivant donc

$$F_2(x) \quad \text{et} \quad F_3(x),$$

au lieu de

$$2F_2(x+K) \quad \text{et} \quad 2F_3(x+K+iK'),$$

on obtient ainsi les formules

$$F_2(x) = \sum A_1 D_x \log\operatorname{cn}(x-a') + \sum A'_1 D_x^2 \log\operatorname{cn}(x-a') + \ldots,$$

$$F_3(x) = \sum A_2 D_x \log\operatorname{dn}(x-a'') + \sum A'_2 D_x^2 \log\operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Les expressions des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, auxquelles nous venons de parvenir, ont pour éléments simples les fonctions doublement périodiques

$$D_x \log\operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$D_x \log\operatorname{cn} x = -\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x},$$

$$D_x \log\operatorname{dn} x = -k^2\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$

et ne présentent pas de pôle apparent; voici quelques remarques auxquelles elles donnent lieu [1].

III. L'expression, par une somme d'éléments simples, des fonctions rationnelles et des fonctions doublement périodiques, donne immédiatement leurs intégrales; on obtient ainsi pour les fonctions doublement périodiques les plus générales, désignées précédemment par $\mathrm{F}(x)$,

$$\int \mathrm{F}(x)\,dx = \mathrm{C}x + \sum \mathrm{A} \log \mathrm{H}(x-a) + \sum \mathrm{A}' \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \ldots,$$

puis les formules, auxquelles je m'arrêterai un instant,

$$\int \mathrm{F}_1(x)\,dx = \sum \mathrm{A} \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum \mathrm{A}' \mathrm{D}_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots.$$

$$\int \mathrm{F}_2(x)\,dx = \sum \mathrm{A}_1 \log \operatorname{cn}(x-a') + \sum \mathrm{A}'_1 \mathrm{D}_x \log \operatorname{cn}(x-a') + \ldots.$$

$$\int \mathrm{F}_3(x)\,dx = \sum \mathrm{A}_2 \log \operatorname{dn}(x-a'') + \sum \mathrm{A}'_2 \mathrm{D}_x \log \operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Soit pour un instant $\operatorname{sn} x = \xi$ et $\mathrm{R}(\xi) = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$, on aura

$$\mathrm{F}_1(x) = f_1[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}],$$
$$\mathrm{F}_2(x) = f_2[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}],$$
$$\mathrm{F}_3(x) = f_3[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}],$$

en représentant par f_1, f_2, f_3 des expressions rationnelles en ξ et $\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}$; cela étant, on voit que les intégrales

$$\int \frac{f_1[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}]}{\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_2[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}]}{\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_3[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}]}{\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}}\,d\xi$$

s'expriment sous forme finie explicite, par les fonctions élementaires. Soit, de plus,

$$f[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}] = f_1[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}] + f_2[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}] + f_3[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}],$$

---

[1] Dans une Note du *Journal de Liouville*, sur une formule d'Euler, année 1879, je suis arrivé, par une autre méthode, à ces mêmes formules.

il en sera de même de la quantité

$$\mathrm{J} = \int \frac{f[\xi, \sqrt{\mathrm{R}(\xi)}]}{\sqrt{\mathrm{R}(\xi)}}\, d\xi,$$

de sorte qu'on a ainsi un type des intégrales qui ont été nommées *pseudo-elliptiques*. Revenons maintenant à la variable x, et posons, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x) + \mathrm{F}_3(x),$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{J} = \int \mathrm{F}(x)\, dx,$$

il est facile d'établir la relation

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}(x + \mathrm{K}) = 0.$$

Considérons, en effet, les quatre termes qui dépendent de la même fonction, par exemple $\mathrm{F}_1(x)$: ils donnent la somme

$$\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_1(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_1(x + \mathrm{K});$$

or on voit immédiatement qu'elle est nulle en vertu de l'égalité

$$\mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_1(x + i\mathrm{K}') = 0,$$

et il est clair qu'on a de même

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}_2(x) + \mathrm{F}_2(x + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_2(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_2(x + \mathrm{K}) = 0,\\ &\mathrm{F}_3(x) + \mathrm{F}_3(x + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_3(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') + \mathrm{F}_3(x + \mathrm{K}) = 0. \end{aligned}$$

J'ajoute maintenant que toute fonction doublement périodique $\mathrm{F}(x)$ qui satisfait à cette condition, pouvant s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned} 4\mathrm{F}(x) = {} & \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + i\mathrm{K}')\\ & + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}')\\ & + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + \mathrm{K}), \end{aligned}$$

on en conclut cette expression

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x) + \mathrm{F}_3(x).$$

Effectivement les différences

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + i\mathrm{K}'), \quad \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + \mathrm{K})$$

offrent les propriétés caractéristiques de $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$; elles se reproduisent changées de signe, en y remplaçant successivement x par $x+i\mathrm{K}'$, $x+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$ et $x+\mathrm{K}$. Il en résulte que la transformée par la substitution $\operatorname{sn} x = \xi$ de l'intégrale $\int F(x)\,dx$, c'est-à-dire $J = \int \frac{f[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi$, s'obtient sous une forme finie explicite au moyen des fonctions élémentaires, et représente une intégrale pseudo-elliptique. Je remarque encore qu'ayant pour la fonction doublement périodique $F(x)$ cette expression

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x)\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

où φ et ψ désignent des fonctions rationnelles, on en conclut

$$f[\xi, \sqrt{R(\xi)}] = \varphi(\xi^2) + \psi(\xi^2)\,\xi\sqrt{R(\xi)},$$

de sorte que l'intégrale J se décompose en deux parties, dont la première $\int \frac{\varphi(\xi^2)\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$ est seule à considérer. Cela étant, je dis que la fonction $\varphi(\xi^2)$ vérifie la relation

$$\varphi(\xi^2) + \varphi\left(\frac{1}{k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-k^2\xi^2}{k^2-k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-\xi^2}{1-k^2\xi^2}\right) = 0.$$

Changeons, en effet, x en $-x$, dans l'égalité

$$F(x) + F(x+i\mathrm{K}') + F(x+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') + F(x+\mathrm{K}) = 0,$$

on obtiendra, eu égard à la périodicité, l'équation

$$F(-x) + F(-x-i\mathrm{K}') + F(-x-\mathrm{K}-i\mathrm{K}') + F(-x-\mathrm{K}) = 0,$$

et, en ajoutant membre à membre, on conclut que la partie paire de $F(x)$, c'est-à-dire $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$, satisfait à la même condition que la fonction elle-même. Cela étant, la proposition énoncée est la conséquence des relations élémentaires

$$\operatorname{sn}^2(x+i\mathrm{K}') = \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 x}, \quad \operatorname{sn}^2(x+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn}^2 x}{k^2\operatorname{cn}^2 x}, \quad \operatorname{sn}^2(x+\mathrm{K}) = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}.$$

C'est M. Goursat qui a donné ce résultat, dans un beau travail intitulé *Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques*, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, 1887. Je renvoie aussi sur la même question à d'excellentes recherches qu'a publiées M. Raffy dans le même Recueil, t. XII, p. 51; la méthode des deux auteurs, qui n'empruntent rien à la théorie des fonctions doublement périodiques, étant entièrement différente de celle que j'ai suivie.

IV. Je considérerai maintenant les fonctions $\Phi(x)$ aux périodes $4K$ et $4iK'$, pour montrer succinctement comment elles se décomposent en éléments simples, qui sont encore formés au moyen des quantités $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; voici, dans ce but, une première remarque.

Soient, pour un moment,

$$2\Pi(x) = \Phi(x) + \Phi(x + 2iK'),$$
$$2\Pi_1(x) = \Phi(x) - \Phi(x + 2iK'),$$

on aura les égalités

$$\Pi(x + 2iK') = +\Pi(x),$$
$$\Pi_1(x + 2iK') = -\Pi(x),$$

et l'on en conclut que la fonction proposée $\Phi(x)$ s'exprime par la somme de deux autres dont la première se reproduit et la seconde change de signe quand on ajoute $2iK'$ à la variable.

Posons ensuite

$$2\Phi_0(x) = \Pi(x) + \Pi(x + 2K),$$
$$2\Phi_1(x) = \Pi(x) - \Pi(x + 2K)$$

et semblablement

$$2\Phi_2(x) = \Pi_1(x) - \Pi_1(x + 2K),$$
$$2\Phi_3(x) = \Pi_1(x) + \Pi_1(x + 2K);$$

nous en déduirons cette expression

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

où les termes du second membre satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x + 2K) &= +\Phi_0(x), & \Phi_0(x + 2iK') &= +\Phi_0(x),\\
\Phi_1(x + 2K) &= -\Phi_1(x), & \Phi_1(x + 2iK') &= +\Phi_1(x),\\
\Phi_2(x + 2K) &= -\Phi_2(x), & \Phi_2(x + 2iK') &= -\Phi_2(x),\\
\Phi_3(x + 2K) &= +\Phi_3(x), & \Phi_3(x + 2iK') &= -\Phi_3(x).
\end{aligned}$$

Elles montrent que $\Phi_0(x)$ revient à $F(x)$; on voit aussi que $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ peuvent être considérées comme des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant respectivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, qui leur serviront d'éléments simples. Nous avons donc, en premier lieu,

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} \\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x + \operatorname{sn}a \operatorname{cn}a \operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{aligned}$$

puis, en représentant les pôles par $a' + iK'$, $a'' + iK'$, $a''' + iK'$, ...,

$$\Phi_1(x) = \sum A_1 \operatorname{sn}(x - a') + \sum A'_1 D_x \operatorname{sn}(x - a') + \ldots,$$

$$\Phi_2(x) = \sum A_2 \operatorname{cn}(x - a'') + \sum A'_2 D_x \operatorname{cn}(x - a'') + \ldots,$$

$$\Phi_3(x) = \sum A_3 \operatorname{dn}(x - a''') + \sum A'_3 D_x \operatorname{dn}(x - a''') + \ldots.$$

Cela posé, à la formule précédemment donnée pour $\Phi_0(x)$, à savoir

$$\Phi_0(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x,$$

nous ajouterons les suivantes, dans lesquelles les lettres φ et ψ désignent des fonctions rationnelles :

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \varphi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x + \psi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x, \\ \Phi_2(x) &= \varphi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn}x + \psi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{dn}x, \\ \Phi_3(x) &= \varphi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{dn}x + \psi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x.\end{aligned}$$

On les obtient au moyen des relations élémentaires pour l'addition des arguments dans les éléments simples $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, ou encore en remarquant que les produits $\Phi_1(x)\operatorname{sn}x$, $\Phi_2(x)\operatorname{cn}x$, $\Phi_3(x)\operatorname{dn}x$ ont pour périodes $2K$ et $2iK'$, et rentrent, par conséquent, dans le type analytique de $\Phi_0(x)$.

Ces résultats montrent que $\Phi(x)$, c'est-à-dire toute fonction uniforme dont les périodes sont $4K$ et $4iK'$, s'exprime en fonction rationnelle de

$\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$. J'indiquerai comme exemple les formules suivantes :

$$\operatorname{sn}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 + \operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{2} + \mathrm{K} \right) = \frac{1 + \operatorname{cn} x}{1 + \operatorname{dn} x},$$

$$\operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{2} + i\mathrm{K}' \right) = \frac{1 + \operatorname{cn} x}{1 - \operatorname{dn} x}, \qquad \operatorname{sn}^2 \left(\frac{x}{2} + \mathrm{K} + i\mathrm{K}' \right) = \frac{1 - \operatorname{cn} x}{1 - \operatorname{dn} x}.$$

Je remarquerai aussi que, en posant

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

ce qui donne

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Psi(x),$$

on a la relation

$$\Psi(x) + \Psi(x + 2i\mathrm{K}') + \Psi(x + 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}') + \Psi(x + 2\mathrm{K}) = 0,$$

et qu'on peut en conclure l'expression de la fonction $\Psi(x)$.

Soient, en effet, pour un moment,

$$2\Psi_1(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2i\mathrm{K}'),$$
$$2\Psi_2(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'),$$
$$2\Psi_3(x) = \Psi(x) + \Psi(x + 2\mathrm{K});$$

nous obtenons d'abord, d'après l'égalité admise,

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \Psi_3(x).$$

Cela étant, on trouve ensuite, en ayant égard à cette même relation ainsi qu'à la périodicité de $\Psi(x)$,

$$\Psi_1(x + 2\mathrm{K}) = -\Psi_1(x),$$
$$\Psi_2(x + 2\mathrm{K}) = -\Psi_2(x),$$
$$\Psi_3(x + 2\mathrm{K}) = +\Psi_3(x),$$

et pareillement

$$\Psi_1(x + 2i\mathrm{K}') = +\Psi_1(x),$$
$$\Psi^2(x + 2i\mathrm{K}') = +\Psi_2(x),$$
$$\Psi_3(x + 2i\mathrm{K}') = -\Psi_3(x).$$

On voit donc que les fonctions $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$ possèdent les propriétés caractéristiques de $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, ce qui démontre le résultat annoncé.