Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Émile Picard

Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 1, nº 1 (1887), p. A1-A15

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1887_1_1_1_A1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET LES GROUPES ALGÉBRIQUES DE TRANSFORMATIONS,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées et poursuivies dans des directions différentes. On n'a pas cependant, je crois, cherché comment la théorie célèbre de Galois concernant les équations algébriques pourrait être étendue aux équations différentielles linéaires. En employant une méthode présentant une grande analogie avec celle dont a fait usage l'illustre géomètre, on arrive à une proposition qui correspond, en quelque sorte, au théorème fondamental de Galois, et l'on est ainsi conduit à la notion de ce que j'appellerai le *groupe de transformations linéaires* correspondant à l'équation différentielle. J'emploie cette expression de *groupe de transformations* déjà employée d'une manière générale par M. Sophus Lie dans une série de Mémoires, extrêmement remarquables, que j'aurai plusieurs fois l'occasion de citer, afin de distinguer ce groupe de celui que l'on appelle généralement le *groupe de l'équation linéaire* (¹).

(¹) Les points principaux de ce travail ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en avril 1883.

Considérons donc une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0, \tag{1}$$

où nous supposerons que les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable x, et soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales.

J'envisage l'expression suivante

$$\begin{aligned} V = {} & A_{1,1} y_1 + A_{1,2} y_2 + \ldots + A_{1,m} y_m \\ & + A_{2,1} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + A_{2,m} \frac{dy_m}{dx} + \ldots + A_{m,m} \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}, \end{aligned}$$

qui est, comme on voit, une expression linéaire et homogène par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et à leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$.

Les m^2 coefficients A représentent des fractions rationnelles quelconques de x. Cette fonction V satisfait à une équation linéaire d'ordre m^2, qu'il serait facile de former; désignons cette équation par

$$\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}} + P_1 \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}} + \ldots + P_{m^2} V = 0, \tag{2}$$

où les P sont évidemment des fonctions rationnelles.

On a d'ailleurs, en différentiant V un nombre de fois égal à $m^2 - 1$, m^2 équations du premier degré par rapport à V et ses dérivées, qui donnent

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \\ y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \end{aligned}$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnelles en x.

A toute intégrale de l'équation (2) correspond un système d'intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ de l'équation (1); ce système pourrait n'être pas fondamental. Ceci arriverait si le déterminant de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$ était nul; en écrivant ceci, on obtiendra une certaine équation en V

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0, \tag{3}$$

k étant au plus égal à $m^2 - 1$.

On aura donc un système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ si l'on prend pour V une intégrale de l'équation (2) ne satisfaisant pas à l'équation (3).

Ceci posé, il arrivera, en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, que l'équation (2) n'aura aucune solution commune avec une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) à coefficients rationnels, d'ordre inférieur à m^2, si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à l'équation (3).

Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement; supposons donc que l'équation différentielle d'ordre p

$$(4) \qquad f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

(f représentant une fonction rationnelle) remplisse cette condition. Je suppose, de plus, l'équation précédente *irréductible*, dans le sens employé par M. Kœnigsberger (*Théorie des équations différentielles*, 1882), c'est-à-dire n'ayant aucune solution commune avec une équation de même forme et d'ordre moindre; dans ces conditions, *toutes* les fonctions V satisfaisant à l'équation (4) satisferont à l'équation (2), et, de plus, l'équation (4) n'aura, avec l'équation (3), *aucune* solution commune; par suite, à chaque solution de l'équation

$$f = 0$$

correspond un système fondamental d'intégrales pour l'équation linéaire proposée.

Soient donc $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le système fondamental correspondant à une certaine solution V de l'équation $f = 0$ et $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_m$ le système correspondant à une solution quelconque V de la même équation; on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}_1 &= a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,m}\, y_m, \\
\mathrm{Y}_2 &= a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,m}\, y_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{Y}_m &= a_{m,1} y_1 + a_{m,2} y_2 + \ldots + a_{m,m} y_m;
\end{aligned}$$

les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires, et nous allons voir facilement qu'on peut les considérer comme des fonctions *algébriques* de p paramètres arbitraires.

En effet, considérons l'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0.$$

Cette intégrale générale sera nécessairement de la forme

$$\mathrm{V} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{m^2} v_{m^2},$$

les v étant des solutions de l'équation (2), et les α des fonctions *algébriques* convenables de p paramètres arbitraires. Donc, dans

$$\mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Y}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Y}_m$$

figureront *algébriquement* p constantes arbitraires, et, par suite, si y_1, $y_2, \ldots, y_m$ désignent un système fondamental correspondant à une solution particulière v de l'équation f, les coefficients a de la substitution

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Y}_1 = a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,m}\, y_m, \\ \mathrm{Y}_2 = a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,m}\, y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_m = a_{m,1} y_1 + a_{m,2} y_2 + \ldots + a_{m,m} y_m \end{array}\right.$$

dépendront, d'une manière algébrique, de p paramètres arbitraires; nous désignerons ces paramètres par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

Il est évident que, si l'on considère deux substitutions, telles que (S), correspondant à deux systèmes distincts de valeurs des paramètres λ, le produit de ces substitutions sera une substitution de même forme, les paramètres λ étant remplacés par un troisième système de valeurs. Les substitutions (S) forment donc *un groupe continu de transformations,* d'après l'expression adoptée par M. Sophus Lie dans ses profondes et importantes recherches [voir *Theorie der Transformationsgruppen* (*Math. Annalen,* t. XVI) et une série de Mémoires en 1876-1878-1879 dans les Archives norwégiennes *for Mathematik og naturvidenskab*].

Je désignerai par G ce groupe *continu et algébrique* de transformations linéaires, et nous l'appellerons le *groupe de transformations* relatif à l'équation linéaire (1). Ce groupe de transformations ne doit évidemment pas être confondu avec ce que l'on appelle généralement le *groupe de l'équation linéaire.*

2. On peut établir, à l'égard de ce groupe, la proposition suivante, qui rappelle le théorème fondamental de Galois dans la théorie des équations algébriques :

Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ainsi que de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G.

Considérons, en effet, une telle fonction; en y remplaçant $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par leur valeur en fonction de V, et égalant à une fraction rationnelle, on aura

$$F\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = R(x),$$

F et R étant rationnelles. Or cette équation se trouvera vérifiée pour une certaine solution V de l'équation $f = 0$; elle le sera, par suite, pour toutes les solutions d'après l'irréductibilité de cette dernière équation. Ceci revient à dire que la fonction rationnelle considérée ne change pas quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ la substitution S.

A ce théorème on peut joindre la proposition suivante :

Toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ et leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, *est une fonction uniforme de x.*

Soit

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots)$$

une telle fonction; le groupe de l'équation (d'après la dénomination usuelle), c'est-à-dire le groupe des substitutions à effectuer sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ quand on fait décrire à la variable tous les chemins possibles, rentre évidemment dans le groupe de transformations, c'est-à-dire que toutes les substitutions du groupe de l'équation sont comprises dans la substitution (S) pour des valeurs convenables des paramètres λ. Donc la fonction f restera invariable quand on effectuera sur les y toutes les substitutions du groupe de l'équation; cette fonction f est, par suite, une fonction uniforme de x. On pourra ajouter que c'est une fonction rationnelle de x, si l'équation différentielle n'a que des points singuliers, pour lesquels les intégrales soient *régulières*.

3. Tels sont les résultats auxquels on est tout naturellement conduit, en cherchant à développer, pour les équations différentielles linéaires, une théorie analogue à celle de Galois pour les équations algébriques; nous nous trouvons ainsi amenés à la considération des groupes de transformations linéaires et *algébriques*.

Présentons d'abord à ce sujet une remarque générale.

Concevons un tel groupe de transformations

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n, \\ Y_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n, \end{aligned}$$

les a étant des fonctions algébriques de r paramètres arbitraires ($r < n^2$). Différentions ces équations une fois, deux fois, ... jusqu'à $(n-1)$ fois. On aura d'abord

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= a_{1,1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + a_{1,n}\frac{dy_n}{dx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dY_n}{dx} &= a_{n,1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + a_{n,n}\frac{dy_n}{dx}, \end{aligned}$$

et d'autres équations semblables. Entre $r+1$ de ces équations, qui sont en nombre n^2, éliminons les paramètres; nous aurons une relation entre les Y et leurs dérivées, et entre les y et leurs dérivées, et ce sera une relation algébrique entière.

Soit

$$f\left(Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \ldots, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = 0. \tag{1}$$

Concevons maintenant qu'on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution quelconque du groupe de transformations; on aura, en désignant par y'_1, $y'_2, \ldots, y'_n$ les valeurs transformées de $y_1, \ldots, y_n$,

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_{1,1}y'_1 + A_{1,2}y'_2 + \ldots + A_{1,n}y'_n, \\ Y_2 &= A_{2,1}y'_1 + A_{2,2}y'_2 + \ldots + A_{2,n}y'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= A_{n,1}y'_1 + A_{n,2}y'_2 + \ldots + A_{n,n}y'_n; \end{aligned}$$

on aura, par suite, en faisant la même élimination que plus haut,

$$f\left(Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \ldots, y'_1, \frac{dy'_1}{dx}, \ldots\right) = 0; \tag{2}$$

les relations (1) et (2) doivent avoir lieu, quels que soient les Y et leurs dérivées. Les coefficients des différents termes en Y et $\frac{dY}{dx}$, ... seront donc les mêmes, à un facteur près; on obtiendra ainsi des polynômes

$$\varphi\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et leurs dérivées [au plus jusqu'à l'ordre $(n-1)$]; ces polynômes seront des invariants du groupe, c'est-à-dire que, effectuant sur les y et simultanément sur leurs dérivées une substitution du groupe, on aura

$$\varphi\left(y'_1, \frac{dy'_1}{dx}, \ldots\right) = \mu\varphi\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right),$$

μ étant une constante.

L'étude des groupes de transformations est donc intimement liée à la recherche des polynômes ou des systèmes de polynômes en

$$\begin{array}{llll}
y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, \\
\frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{dy_n}{dx}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},
\end{array}$$

qui se reproduisent, à un facteur près, quand on effectue simultanément sur les termes d'une même ligne un ensemble de substitutions linéaires.

4. Cherchons à quoi reviendra la recherche directe des groupes algébriques de transformations linéaires. Il est nécessaire de rappeler les théorèmes généraux de M. Lie sur les groupes de transformations (*Mathem. Annalen*, t. XVI). Considérons, avec l'éminent géomètre, les n équations

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent une famille de transformations entre les x et les x', où figurent r paramètres arbitraires $a_1, \ldots, a_r$. Ces transformations formeront un groupe si la succession de deux transformations de cette famille est encore une transformation de la même famille.

Une transformation est dite *infinitésimale* par M. Lie si elle a la forme

$$x'_i = x_i + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t$$

ou

$$\delta x_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t,$$

δt désignant une quantité infiniment petite.

M. Lie a montré que chaque groupe de transformations à r paramètres contient r transformations infinitésimales indépendantes. Ces transformations infinitésimales déterminent complètement le groupe de transformations.

Soient

$$\delta_q x_1 = X_{q,1}\delta t, \qquad \delta_q x_2 = X_{q,2}\delta t, \qquad \ldots, \qquad \delta_q x_n = X_{q,n}\delta t \qquad (q = 1, 2, \ldots, r)$$

les r transformations infinitésimales du groupe. On aura pour chaque valeur de i, en posant $A_q(F) = X_{q,i}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_{q,n}\dfrac{\partial F}{\partial x_n}$, $\dfrac{r(r-1)}{2}$ relations de la forme

$$\text{(E)} \qquad A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji}) = \sum_s C_{jqs} X_{si}.$$

Les C_{jqs} sont des constantes indépendantes du nombre i. On a ainsi entre les X $\dfrac{r(r-1)n}{2}$ identités, qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les r transformations infinitésimales considérées puissent être les transformations infinitésimales d'un groupe à r paramètres. Ces conditions peuvent encore se mettre sous la forme

$$(A_j A_q),$$

c'est-à-dire

$$A_j[A_q(F)] - A_q[A_j(F)] = \sum_s C_{jqs} A_s(F).$$

Ces conditions étant remplies, on aura le groupe lui-même en procédant comme il suit. Considérons les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=}^{k=r} \lambda_k X_{k,1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \sum \lambda_k X_{k,2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \sum \lambda_k X_{k,n},$$

où les λ sont à considérer comme des constantes. Soient

$$W_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t) = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n intégrales premières de ce système, où les λ ont été mis en évidence, et posons

$$W_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = W_i(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1 t_0, \ldots, \lambda_r t_0);$$

de ces n équations, on tirera

$$x'_i = f_i[x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1(t-t_0), \lambda_2(t-t_0), \ldots, \lambda_r(t-t_0)];$$

ce sera le groupe cherché, en remplaçant

$$\lambda_1(t-t_0), \quad \lambda_2(t-t_0), \quad \ldots, \quad \lambda_r(t-t_0)$$

par les r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Ces théorèmes généraux rappelés, revenons maintenant aux groupes *linéaires* de transformations. Les substitutions infinitésimales seront manifestement ici des substitutions linéaires; on doit donc partir de r substitutions linéaires, entre lesquelles on supposera vérifiées les identités (E), dont il a été parlé plus haut. Le système

$$\frac{dx_1}{dt} = \Sigma\lambda_k X_{k,1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \Sigma\lambda_k X_{k,n}$$

est ici un système d'équations linéaires à coefficients constants. Nous aurons, d'après ce qui précède, à chercher les intégrales de ce système, qui, pour $t = t_0$, deviennent respectivement égales à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or ces intégrales devront être nécessairement de la forme

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n, \\ x'_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n, \end{array} \right.$$

les A étant des expressions linéaires et homogènes en $e^{\mu_1(t-t_0)}, e^{\mu_2(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant les racines de l'équation fondamentale relative au système des équations linéaires. Cette équation sera évidemment de la forme

$$\mu^n + \varphi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\mu^{n-1} + \ldots + \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des polynômes homogènes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de degrés respectivement égaux à leur indice; les μ seront donc des fonctions algébriques et homogènes de degré *un* en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Quant aux coefficients de $e^{\mu_1(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$ dans les A, ce seront des fonctions homogènes de degré *zéro* en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Si donc on pose

$$\lambda_1(t-t_0) = a_1, \qquad \lambda_2(t-t_0) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_r(t-t_0) = a_r$$

et, en outre,

$$\mu(t-t_0) = \rho,$$

on aura pour ρ l'équation

$$\rho^n + \varphi_1(a_1, \ldots, a_r)\rho^{n-1} + \ldots + \varphi_n(a_1, \ldots, a_r) = 0,$$

dont nous désignerons les racines par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Les A seront alors des fonctions linéaires et homogènes en $e^{\rho_1}, e^{\rho_2}, \ldots, e^{\rho_n}$, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles en $a_1, a_2, \ldots, a_r, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Les équations (S) donneront alors le groupe de transformations qui a pour substitutions infinitésimales les r substitutions initiales. Ce groupe ne sera pas, en général, algébrique, et la question serait de chercher comment doivent être choisies les r substitutions initiales pour que le groupe fût algébrique. Je me réserve de revenir plus tard sur cette question générale; nous allons examiner seulement, en ce moment, certains cas particuliers, d'ailleurs fort étendus.

5. Dans un de ses Mémoires (*Archives norwégiennes*, 1878, p. 110), M. Sophus Lie considère incidemment un groupe particulier de transformations linéaires. Désignons, comme plus haut, les r substitutions infinitésimales par $A_1(F), A_2(F), \ldots, A_r(F)$ et supposons-les telles que le crochet (A_i, A_{i+k}) soit une fonction linéaire de $A_1, A_2, \ldots, A_{i+k-1}$.

M. Lie a montré que, dans ces conditions, on pourra, par un choix convenable des variables indépendantes, donner aux expressions A(F) la forme commune

$$\alpha x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) \frac{\partial F}{\partial x_3} + \ldots$$
$$+ (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n) \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Ce sont les groupes dont les r substitutions infinitésimales sont de cette forme, que nous allons considérer.

On peut remarquer que *tout* groupe à *deux* paramètres rentre nécessairement dans l'hypothèse précédente, et c'est de ce cas que nous allons d'abord nous occuper. Soient donc

$$A_1(F) = \alpha x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n) \frac{\partial F}{\partial x_n},$$
$$A_2(F) = \alpha' x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + (\rho'_1 x_1 + \rho'_2 x_2 + \ldots + \rho'_n x_n) \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

les deux expressions correspondant aux deux substitutions fondamentales. Il nous faut écrire que $(A_1 A_2)$ est une combinaison linéaire de $A_1(F)$ et $A_2(F)$; on voit de suite qu'il faut poser

$$(A_1 A_2) = k(\alpha' A_1 - \alpha A_2),$$

car le terme en $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ manque dans $(A_1 A_2)$.

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ dans $(A_1 A_2)$ ne contiennent respectivement pas de termes en $x_2, x_3, \ldots, x_n$; il en résulte que

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta_2}{\beta'_2} = \frac{\gamma_3}{\gamma'_3} = \ldots = \frac{\rho_n}{\rho'_n},$$

et nous allons voir que ces relations vont nous donner la solution du problème. Les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'équation caractéristique correspondant au système d'équations linéaires formées dans le précédent paragraphe sont ici

$$\mu_1 = \alpha\lambda_1 + \alpha'\lambda_2, \qquad \mu_2 = \beta_2\lambda_1 + \beta'\lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_n = \rho_n\lambda_1 + \rho'_n\lambda_2,$$

donc

$$\frac{\mu_1}{\alpha} = \frac{\mu_2}{\beta_2} = \frac{\mu_3}{\gamma_3} = \ldots = \frac{\mu_n}{\rho_n};$$

les exponentielles $e^{\mu_1(t-t_0)}$, $e^{\mu_2(t-t_0)}$, ..., $e^{\mu_n(t-t_0)}$ sont donc fonctions de l'une d'entre elles, et fonctions algébriques si α, β_2, γ_3, ..., ρ_n sont dans des rapports commensurables. Quant aux coefficients de $e^{\mu_i(t-t_0)}$ dans les A, ce seront des fonctions de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; nous pourrons donc prendre pour paramètres

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = a_1, \qquad e^{\mu_1(t-t_0)} = a_2.$$

La condition nécessaire et suffisante, pour que $A_1(F)$ et $A_2(F)$, supposés susceptibles d'engendrer un groupe de transformations, *engendrent un groupe algébrique, est donc que* α, β_2, ..., ρ_n *soient dans des rapports commensurables,* et ce théorème nous permet, par suite, de *trouver tous les groupes algébriques de transformations linéaires à deux paramètres.*

L'énoncé précédent résout la question proposée, mais il est facile de terminer complètement le calcul. On simplifiera, en supposant, comme il est permis, que

$$A_2(F) = a_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + a_n x_n \frac{\partial F}{\partial x_n};$$

l'identité donne des relations dont le type général sera

$$\begin{aligned} \nu_1 \quad (a_1 \quad - a_i) &= k a_1 \nu_1, \\ \nu_2 \quad (a_2 \quad - a_i) &= k a_1 \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots, \\ \nu_{i-1}(a_{i-1} - a_i) &= k a_1 \nu_{i-1}, \end{aligned}$$

et $\alpha a_i = a_1 \nu_i$, en supposant que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ dans $A_1(F)$ soit

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_i x_i.$$

Différentes hypothèses peuvent être faites; prenons le cas général où a_1, a_2, ..., a_n sont distincts. Si donc on considère toutes les différences

$$a_1 - a_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

elles ne pourront être égales; soit, dans $A_1(F)$, $\beta_1 \neq 0$.

Alors on aura

$$a_1 - a_2 = k a_1;$$

toutes les autres différences

$$a_1 - a_i \quad (i = 3, \ldots, n)$$

ne pourront être égales à ka_1; par suite,

$$\gamma_1 = \delta_1 = \ldots = \rho_1 = 0.$$

Soit de même $\gamma_2 \neq 0$, on aura

$$a_2 - a_3 = ka_1,$$

et il faudra écrire

$$\delta_2 = \ldots = \rho_2 = 0.$$

En continuant ainsi, on voit que, dans l'hypothèse où $\beta_1 \gamma_2 \delta_3 \ldots \rho_{n-1} \neq 0$, on a

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \ldots = a_{n-1} - a_n = ka_1$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \delta_1 = \ldots = \rho_1 \quad &= 0, \\ \gamma_2 = \delta_2 = \ldots = \rho_2 \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \rho_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

On a vu plus haut que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ devaient être dans des rapports commensurables, ce qui revient ici à dire que k est commensurable.

6. On peut chercher, de la même manière, les groupes algébriques de transformations linéaires à un nombre quelconque de paramètres, pourvu que les substitutions infinitésimales remplissent les conditions indiquées au commencement du paragraphe précédent. Il suffira d'examiner le cas de trois paramètres; soit donc

$$\begin{aligned} A_1(F) &= \alpha\, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + \ldots + (\rho_1 x_1 + \ldots + \rho_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}, \\ A_2(F) &= \alpha'\, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (\gamma'_1 x_1 + \gamma'_2 x_2 + \gamma'_3 x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + \ldots + (\rho'_1 x_1 + \ldots + \rho'_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}, \\ A_3(F) &= \alpha''\, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta''_1 x_1 + \beta''_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (\gamma''_1 x_1 + \gamma''_2 x_2 + \gamma''_3 x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + \ldots + (\rho''_1 x_1 + \ldots + \rho''_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

On doit avoir identiquement

$$\begin{aligned} (A_2 A_3) &= \lambda\ A_1 + \mu\ A_2 + \nu\ A_3, \\ (A_3 A_1) &= \lambda'\ A_1 + \mu'\ A_2 + \nu'\ A_3, \\ (A_1 A_2) &= \lambda'' A_1 + \mu'' A_2 + \nu'' A_3, \end{aligned}$$

les λ, μ, ν étant des constantes.

Dans (A_2, A_3), il n'y a pas de terme en $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, et les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ ne contiennent respectivement pas de termes en $x_2, x_3, \ldots, x_n$; il en résulte que

$$\lambda\alpha + \mu\alpha' + \nu\alpha'' = 0, \quad \lambda\beta_2 + \mu\beta'_2 + \nu\beta''_2 = 0, \quad \lambda\gamma_3 + \mu\gamma'_3 + \nu\gamma''_3 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda\rho_n + \mu\rho'_n + \nu\rho''_n = 0;$$

pareillement la deuxième et la troisième identité nous donnent

$$\lambda'\alpha + \mu'\alpha' + \nu'\alpha'' = 0, \quad \lambda'\beta_2 + \mu'\beta'_2 + \nu'\beta''_2 = 0, \quad \lambda'\gamma_3 + \mu'\gamma'_3 + \nu'\gamma''_3 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda'\rho_n + \mu'\rho'_n + \nu'\rho''_n = 0,$$
$$\lambda''\alpha + \mu''\alpha' + \nu''\alpha'' = 0, \quad \lambda''\beta_2 + \mu''\beta'_2 + \nu''\beta''_2 = 0, \quad \lambda''\gamma_3 + \mu''\gamma'_3 + \nu''\gamma''_3 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda''\rho_n + \mu''\rho'_n + \nu''\rho''_n = 0.$$

On conclut de là, en laissant de côté des cas exceptionnels, dont la discussion, d'ailleurs bien facile, présenterait peu d'intérêt, que

$$\frac{\beta_2}{\alpha} = \frac{\beta'_2}{\alpha'} = \frac{\beta''_2}{\alpha''},$$
$$\frac{\gamma_3}{\alpha} = \frac{\gamma'_3}{\alpha'} = \frac{\gamma''_3}{\alpha''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\rho_n}{\alpha} = \frac{\rho'_n}{\alpha'} = \frac{\rho''_n}{\alpha''}.$$

Ces relations vont nous donner de suite la solution du problème. Les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'équation caractéristique (*voir* n° 4) sont ici

$$\mu_1 = \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha' + \lambda_3\alpha'', \quad \mu_2 = \lambda_1\beta_2 + \lambda_2\beta'_2 + \lambda_3\beta''_2, \quad \ldots, \quad \mu_n = \lambda_1\rho_n + \lambda_2\rho'_n + \lambda_3\rho''_n;$$

donc

$$\frac{\mu_1}{\alpha} = \frac{\mu_2}{\beta_2} = \frac{\mu_3}{\gamma_3} = \ldots = \frac{\mu_n}{\rho_n};$$

les exponentielles $e^{\mu_1(t-t_0)}, e^{\mu_2(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$ sont donc fonctions de l'une d'entre elles, et fonctions algébriques si $\alpha, \beta_2, \gamma_3, \ldots, \rho_n$ sont dans des rapports commensurables. Quant aux coefficients de $e^{\mu_i(t-t_0)}$ dans les A (*voir* n° 4), ce seront des fonctions de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$; nous pourrons donc prendre pour paramètres

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = a_1, \qquad \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = a_2, \qquad e^{\mu_1(t-t_0)} = a_3,$$

et, sous la condition indiquée, le groupe sera algébrique.

7. Prenons comme exemple, en terminant, le cas de deux variables et de deux paramètres.

Soient

$$A_1(F) = \alpha\, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2},$$

$$A_2(F) = a_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2};$$

on aura

$$a_1 - a_2 = k a_1, \qquad \alpha a_2 = a_1 \beta_2,$$

posons donc

$$a_2 = s a_1, \qquad \beta_2 = s\alpha.$$

On a les équations linéaires

$$\frac{dx_1}{dt} = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha) x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 \beta_1 x_1 + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 \beta_2) x_2;$$

le groupe correspondant sera

$$x'_1 = \sigma_1 x_1,$$
$$x'_2 = \sigma_2 x_1 + \sigma_1^s x_2,$$

σ_1 et σ_2 étant les deux paramètres arbitraires; s devra être commensurable, en le désignant par $\frac{p}{q}$; on peut alors écrire le groupe

$$x'_1 = \sigma_1^q x_1,$$
$$x'_2 = \sigma_2 x_1 + \sigma_1^p x_2,$$

p et q étant deux entiers.

x_1 et le déterminant $x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}$ sont les deux seuls invariants distincts de ce groupe si simple.