

HERMITE

## Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série*, tome 2 (1888), p. G1-G6

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1888\\_1\\_2\\_\\_G1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1888_1_2__G1_0)

© Université Paul Sabatier, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR LA  
**TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE**  
**DE SECONDE ESPÈCE;**

PAR M. HERMITE.

---

Extrait d'une Lettre adressée à M. MATYAS LERCH, dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême*, 7<sup>e</sup> série, t. II; 1888.

---

En modifiant un peu le procédé ordinaire de réduction des intégrales hyperelliptiques, j'ai considéré, dans mes Leçons (1), les expressions de la forme suivante

$$\int \frac{G dx}{A^{a+1} \sqrt{R}},$$

où G, A et R sont des polynômes entiers en  $x$ , A et R n'ayant que des facteurs simples et étant supposés premiers entre eux. J'ai montré qu'elles se ramènent facilement à un terme algébrique et à une expression semblable où l'exposant  $a$  est diminué d'une unité. Dans le cas, par exemple, de  $a = 1$  que je vais employer, on détermine deux polynômes P et Q par la condition

$$G = AP - A'RQ,$$

et, en posant

$$Q_1 = P - RQ' - \frac{1}{2}R'Q,$$

on a cette égalité, qui se vérifie immédiatement par la différentiation,

$$\int \frac{G dx}{A^2 \sqrt{R}} = \frac{Q \sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1 dx}{A \sqrt{R}}.$$

Je vais l'appliquer à la recherche de l'expression de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\lambda^3 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

---

(1) *Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris*, 3<sup>e</sup> édit., p. 28.

où  $y = \frac{U}{V}$  est la formule de transformation de Jacobi qui satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Je remarque d'abord que l'on peut écrire

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

de sorte qu'en prenant

$$R = (1-x^2)(1-k^2 x^2), \quad G = \lambda^2 U^2, \quad A = V,$$

la relation précédente nous donne

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1 dx}{V\sqrt{R}}.$$

Cela étant, je dis que  $Q_1$  est divisible par  $V$ , c'est-à-dire que le second membre ne contient pas d'intégrales de troisième espèce qui admettent des infinis logarithmiques. M. Fuch obtient *a priori*, et sans calcul, ce résultat important que j'établirai ensuite algébriquement de la manière suivante. L'illustre géomètre m'a fait observer que, l'intégrale

$$\int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

n'ayant point d'infini logarithmique, il en est de même nécessairement de la transformée en  $x$  obtenue en faisant  $y = \frac{U}{V}$ , puisque la nouvelle variable est une fonction algébrique de  $y$ . Il ne nous reste plus, par conséquent, qu'à obtenir le polynôme  $Q$  et le quotient entier  $\frac{Q_1}{V}$ . Pour cela, j'emploie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{R}};$$

après avoir substitué la valeur  $y = \frac{U}{V}$ , j'élève au carré, ce qui donne l'égalité

$$M^2 R (U'V - UV')^2 = V^4 - (1 + \lambda^2) U^2 V^2 + \lambda^2 U^4,$$

SUR LA TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE SECONDE ESPÈCE. G.3  
ou, sous une autre forme,

$$U^2(M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2) = V^4 - (1 + \lambda^2)U^2V^2 - M^2R(U'^2V^2 - 2UU'VV').$$

On montre ainsi que  $M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2$  est divisible par  $V$  qui, étant premier avec  $U$ , et par conséquent avec  $U^2$ , entre dans le second membre comme facteur. Soit donc, en désignant par  $H$  un polynôme entier,

$$M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2 = VH,$$

nous aurons

$$\lambda^2 U^2 = -VH + M^2RV'^2;$$

or la relation par laquelle se déterminent les quantités désignées plus haut par  $P$  et  $Q$ , étant maintenant

$$\lambda^2 U^2 = VP - V'RQ,$$

on voit immédiatement qu'on peut prendre  $P = -H$  et  $Q = -M^2V'$ .

Soit ensuite  $S$  le quotient entier  $\frac{Q_1}{V}$  que nous avons encore à obtenir, et qui donne l'égalité

$$\int \frac{\lambda^2 U^2 dx}{V^2 \sqrt{R}} = -\frac{M^2 V' \sqrt{R}}{V} + \int \frac{S dx}{\sqrt{R}}.$$

On trouve, par la différentiation, l'expression suivante

$$S = \frac{\lambda^2 U^2}{V^2} + M^2 \sqrt{R} D_x \left( \frac{V' \sqrt{R}}{V} \right),$$

et il en résulte facilement que  $S$  est un simple binôme  $g x^2 + h$ .

Je cherche, en effet, la limite de  $\frac{S}{x^2}$  pour  $x$  infiniment grand; en faisant, avec Jacobi,

$$U = \frac{x}{M} [1 + A' x^2 + A'' x^4 + \dots + A^{(m)} x^{2m}],$$

$$V = 1 + B' x^2 + B'' x^4 + \dots + B^{(m)} x^{2m},$$

de sorte que l'ordre de la transformation soit  $n = 2m + 1$ , on obtient la

quantité finie

$$\left[ \frac{\lambda \mathbf{A}^{(m)}}{\mathbf{M} \mathbf{B}^{(m)}} \right]^2 + 2mk^2 \mathbf{M}^2,$$

qui représente, par conséquent, la constante  $g$ .

Cette valeur se simplifie au moyen des relations établies à la fin du § XII des *Fundamenta*. Si l'on emploie les suivantes

$$\frac{\mathbf{A}^{(m)}}{\mathbf{M}} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} k^m, \quad \frac{1}{\mathbf{M}} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}} \frac{\mathbf{B}^{(m)}}{k^m},$$

on en tire aisément

$$\frac{\lambda \mathbf{A}^{(m)}}{\mathbf{M} \mathbf{B}^{(m)}} = k \mathbf{M},$$

ce qui donne

$$g = k^2 \mathbf{M}^2 + 2mk^2 \mathbf{M}^2 \quad \text{ou bien} \quad g = nk^2 \mathbf{M}^2.$$

En supposant ensuite  $x = 0$ , dans l'expression de  $\mathbf{S}$ , il vient  $h = 2\mathbf{B}'\mathbf{M}^2$ , et nous avons, en conséquence, le résultat important contenu dans la relation

$$\int \frac{\lambda^2 \mathbf{U}^2 dx}{\mathbf{V}^2 \sqrt{\mathbf{R}}} = -\frac{\mathbf{M}^2 \mathbf{V}' \sqrt{\mathbf{R}}}{\mathbf{V}} + \mathbf{M}^2 \int \frac{(nk^2 x^2 + 2\mathbf{B}') dx}{\sqrt{\mathbf{R}}},$$

ou encore, si l'on revient à la variable  $y$ , après avoir divisé les deux membres par  $\mathbf{M}^2$ ,

$$\frac{1}{\mathbf{M}} \int \frac{\lambda^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = -\frac{\mathbf{V}' \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}{\mathbf{V}} + \int \frac{(nk^2 x^2 + 2\mathbf{B}') dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

C'est la relation qu'a donnée Jacobi, en remplaçant l'intégrale de seconde espèce de Legendre par celle de  $\mathbf{M}$ . Weierstrass.

Je reviens maintenant au polynôme  $\mathbf{Q}_1$ , afin d'établir, par une voie purement algébrique, qu'il est divisible par  $\mathbf{V}$ . A cet effet, je reprends la formule générale de réduction, dans laquelle  $\mathbf{R}$  est un polynôme de degré quelconque,

$$\int \frac{\mathbf{G} dx}{\mathbf{A}^2 \sqrt{\mathbf{R}}} = \frac{\mathbf{Q} \sqrt{\mathbf{R}}}{\mathbf{A}} + \int \frac{\mathbf{Q}_1 dx}{\mathbf{A} \sqrt{\mathbf{R}}},$$

en me proposant d'exprimer, au moyen de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{R}$ , la condition pour

que  $Q_1$  soit divisible par  $A$ . Ainsi qu'on l'a vu plus haut, on a

$$Q_1 = P - RQ' - \frac{1}{2}R'Q,$$

et, par conséquent, si l'on fait  $Q_1 = AS$ , il vient

$$P = AS + RQ' + \frac{1}{2}R'Q.$$

Cela étant, en différentiant l'équation

$$G = AP - A'RQ,$$

nous obtenons

$$G' = AP' + A'(P - RQ' - \frac{1}{2}R'Q) - A''RQ,$$

puis, au moyen de la valeur de  $P$ ,

$$G' = A(P' + A'S) - Q(RA'' + \frac{1}{2}R'A').$$

Prenons maintenant, suivant le module  $A$ , les valeurs de  $G$  et  $G'$ ; on aura

$$G \equiv -A'RQ,$$

$$G' \equiv -Q(RA'' + \frac{1}{2}R'A'),$$

et l'on en conclut immédiatement que le polynôme

$$RA'G' - G(RA'' + \frac{1}{2}R'A')$$

est divisible par  $A$ ; c'est le résultat auquel il s'agissait de parvenir et que je vais appliquer en supposant  $R = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ ,  $G = U^2$  et  $A = V$ .

Nous obtenons alors l'expression suivante

$$U[2RU'V' - U(RV'' + \frac{1}{2}R'V')],$$

ou bien, en multipliant par 2,

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')],$$

et il s'agit de prouver qu'elle est divisible par  $V$ . C'est ce qu'on établit au moyen de l'équation

$$M^2R(U'V - UV')^2 = V^3 - (1 + \lambda^2)U^2V^2 + \lambda^2U^3$$

et de sa dérivée, dans lesquelles je ferai, pour un moment,  $U'V - UV' = W$ .

G.6 HERMITE. — SUR LA TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE, ETC.

On a ainsi

$$\begin{aligned} M^2 RW^2 &= V^4 - (1 + \lambda^2) U^2 V^2 + \lambda^2 U^4, \\ M^2 W(2RW' + R'W) &= 4V^3 V' - 2(1 + \lambda^2) UV(U'V + UV') + 4\lambda^2 U^3 U'. \end{aligned}$$

Multiplions la première par  $4U'$ , la seconde par  $U$ , et retranchons membre à membre, après avoir supprimé le facteur  $W$ , nous aurons

$$M^2 [4RU'W - U(2RW' + R'W)] = 4V^3 - 2(1 + \lambda^2)U^2V.$$

Cela étant, on obtient facilement, au moyen de la valeur de  $W$ ,

$$\begin{aligned} 4RU'W - U(2RW' + R'W) \\ = V[4RU'^2 - U(2RU'' + R'U')] - U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')]; \end{aligned}$$

le premier membre de l'équation contenant en facteur  $V$ , il est donc démontré que la quantité considérée

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')]$$

est elle-même divisible par  $V$ , comme je l'ai annoncé. Je remarquerai en outre qu'on peut joindre les égalités suivantes à celles qui viennent d'être employées :

$$\begin{aligned} M^2 [4RV'W - V(2RW' + R'W)] &= 2(1 + \lambda^2)UV^2 - 4\lambda^2U^3, \\ 4RV'W - V(2RW' + R'W) \\ &= V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')] - U[4RV'^2 - V(2RV'' + R'V')]; \end{aligned}$$

elles montrent que l'expression

$$V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')]$$

est divisible par  $U$ , et comme  $U$  et  $V$  sont premiers entre eux, on en conclut ces relations, qu'il ne m'a pas paru inutile d'indiquer :

$$\begin{aligned} 4RU'V' - U(2RV'' + R'V') &\equiv 0 \pmod{V}, \\ 4RU'V' - V(2RU'' + R'U') &\equiv 0 \pmod{U}, \end{aligned}$$

